



2 2013
ročník XIII

**Vysoká škola báňská -
Technická univerzita Ostrava**

SBORNÍK
vědeckých prací Vysoké školy báňské -
Technické univerzity Ostrava
Řada stavební

TRANSACTIONS
of the VŠB - Technical University
of Ostrava
Civil Engineering Series

ISSN 1213-1962

BALÁZS Ivan, MELCHER Jindřich GEOMETRICKY NELINEÁRNÍ NUMERICKÁ ANALÝZA TENKOSTĚNNÝCH NOSNÍKŮ JEDNOOSE SYMETRICKÉHO PRŮŘEZU ZATÍŽENÝCH KOLMO K ROVINĚ SYMETRIE	1
BORZOVIČ Viktor, LACO Ján BOND STRESS – SLIP BEHAVIOUR OF PRESTRESSING UNITS COATED WITH CORROSION PROTECTION	11
ČAJKA Radim, FOJTÍK Roman EXPERIMENTÁLNÍ MĚŘENÍ ZÁKLADOVÉ DESKY NÁRODNÍHO SUPERPOČÍTAČOVÉHO CENTRA	19
JANULÍKOVÁ Martina, STARÁ Marie VÍCEVRSTVÉ REOLOGICKÉ KLUZNÉ SPÁRY V ZÁKLADOVÝCH KONSTRUKCÍCH	27
KŠIŇAN Jozef, VODIČKA Roman AN ENERGETIC APPROACH FOR INTERFACE DELAMINATION PROBLEM IN SLIDING MODE WITH COHESIVE OR ADHESIVE CONTACT	33
LABUDKOVÁ Jana, MATEČKOVÁ Pavlína VÝPOČETNÍ PROGRAM PRO ANALÝZU KRUHOVÝCH A MEZIKRUHOVÝCH ROTAČNĚ SYMETRICKY ZATÍŽENÝCH ŽELEZOBETONOVÝCH DESEK	43
MAGURA Martin ANALÝZA VÝFUKOVÉHO TRAKTU TURBOKOMPRESORA ZAŘAŽENÉHO VYSOKÝMI TEPLOTAMI	53
PEŠEK Ondřej, MELCHER Jindřich NUMERICKÁ ANALÝZA PŮSOBNÍ TLAČENÝCH PRUTŮ Z VRSTVENÉHO KONSTRUKČNÍHO SKLA	63
SANDANUS Jaroslav, SÓGEL Kristián MODELOVANIE NOSNÝCH KONŠTRUKCIÍ PAMIATKOVÝCH OBJEKTŮ	73
BENEŠOVÁ Anna, VANĚREK Jan, DROCHYTKA Rostislav VLIV PODÍLU PLASTOVÉHO REGRANULÁTU NA VLASTNOSTI DŘEVOPLASTOVÉHO KOMPOZITU	81
PETŘÍK Tomáš, HRUBEŠOVÁ Eva NUMERICKÝ MODEL ODEZVY DYNAMICKÉHO ZATÍŽENÍ REÁLNÉHO HORNINOVÉHO PROSTŘEDÍ S POUŽITÍM METODY LATIN HYPERCUBE SAMPLING	87
KORENKOVÁ Renáta, KRUŠINSKÝ Petr DIAGNOSTICS OF THE TECHNICAL CONDITION OF TIMBER ROOF FRAMES USING FAKOPP 3D SONIC TOMOGRAPH	93
KUBENKOVÁ Kateřina POSOUZENÍ ENERGETICKÉ NÁROČNOSTI BUDOVY Z HLEDISKA LEGISLATIVNÍCH ZMĚN	99
URBÁNKOVÁ Radka FLOOR MOSAICS FROM THE TERRITORY OF ROMAN PROVINCE MOESIA	105

GRZYWIŃSKI Maksym, POKORSKA Iwona SENSITIVITY ANALYSIS OF CYLINDRICAL SHELL.....	115
HOLUŠOVÁ Táňa, SEITL Stanislav, Alfonso FERNÁNDEZ-CANTELI NUMERICKÁ PODPORA EXPERIMENTÁLNÍ ZKOUŠKY EXCENTRICKÝM TAHEM NA VÁLCOVÝCH BETONOVÝCH TĚLESECH.....	119
JURČÍKOVÁ Anežka, ROSMANIT Miroslav DOPORUČENÍ PRO NUMERICKÉ MODELOVÁNÍ A ANALYTICKÉ POSOUZENÍ ROVINNÉHO OCELOVÉHO STYČNÍKU Z CHS PROFILŮ	129
MAJOR Maciej, MAJOR Izabela ACCELERATION WAVE PROPAGATING IN HYPERELASTIC MOONEY-RIVLIN AND ZAHORSKI MATERIALS	139
MICHALCOVÁ Vladimíra, KUZNETSOV Sergej, POSPÍŠIL Stanislav MODEL Y ZATÍŽENÍ OBJEKTU OD ÚČINKŮ PROUDOVÉHO POLE.....	147
MIKOLÁŠEK David, SUCHARDA Oldřich, BROŽOVSKÝ Jiří NUMERICKÁ ANALÝZA PROLAMOVANÉHO NOSNÍKU.....	153
NĚMEC Ivan, LANG Rostislav NÁVRH POČÁTEČNÍHO TVARU PRO MEMBRÁNOVÉ KONSTRUKCE.....	159
NĚMEC Ivan, SYCHROVÁ Šárka PARAMETRICKÁ STUDIE ODEZVY KONTEJNMENTU NA ZATÍŽENÍ NÁRAZEM LETADLA.....	163
ŠIMONOVÁ Hana, HAVLÍKOVÁ Ivana, KERŠNER Zbyněk STUDIE STATISTICKÉHO CHOVÁNÍ GUMBELOVA MODELU ÚNAVOVÉ ODEZVY BETONŮ TŘÍD C30/37 A C45/55	169
ŠTAFÁ Michal, FRANTÍK Petr PLASTIZACE TENKOSTĚNNÉHO NOSNÍKU POMOCÍ PRUŽINOVÝCH SÍTÍ.....	173
SUMEC Jozef, MINÁROVÁ Mária MECHANICAL AND MATHEMATICAL MODELING OF VISCO-ELASTIC CONTINUA – CONSTITUTIVE EQUATIONS.....	179
SÝKORA Miroslav, HOLICKÝ Milan, KREJSA Jan MODEL UNCERTAINTY FOR SHEAR RESISTANCE OF REINFORCED CONCRETE BEAMS WITH SHEAR REINFORCEMENT ACCORDING TO EN 1992-1-1.....	189
VALEŠ Jan VLIV NÁHODNÉHO ZAKŘIVENÍ OSY NA ÚNOSNOST TENKOSTĚNNÉHO PRUTU	199
VESELÝ Václav, SOBEK Jakub NUMERICKÁ STUDIE PORUŠOVÁNÍ TĚLES Z CEMENTOVÝCH KOMPOZITŮ PŘI MODIFIKACI LOMOVÉHO TESTU EXCENTRICKÝM TAHEM.....	209
VOŘECHOVSKÝ Miroslav, KADĚROVÁ Jana VÝVOJ NOREM KORELACE PŘI NÁHODNÝCH ZÁMĚNÁCH POŘADÍ ELEMENTŮ	217
SKOTNICOVÁ Iveta, GALDA Zdeněk, TYMOVÁ Petra, LAUSOVÁ Lenka POROVNÁNÍ VÝSLEDKŮ EXPERIMENTÁLNÍHO MĚŘENÍ A NUMERICKÉ SIMULACE TEPELNÉHO CHOVÁNÍ OBVODOVÉ STĚNY DŘEVOSTAVBY.....	227

Ivan BALÁZS¹, Jindřich MELCHER²

GEOMETRICKY NELINEÁRNÍ NUMERICKÁ ANALÝZA TENKOSTĚNNÝCH NOSNÍKŮ
JEDNOOSE SYMETRICKÉHO PRŮŘEZU ZATÍŽENÝCH KOLMO K ROVINĚ SYMETRIE

GEOMETRICALLY NONLINEAR NUMERICAL ANALYSIS OF BEAMS
OF MONOSYMMETRIC THIN-WALLED CROSS-SECTIONS LOADED PERPENDICULARLY
TO THE PLANE OF SYMMETRY

Abstrakt

Příspěvek se zabývá geometricky nelineární analýzou ocelových nosníků jednoose symetrického tenkostěnného průřezu zatížených kolmo k rovině symetrie excentricky ke středu smyku. Numerická analýza vybraných příčně zatížených nosníků je provedena v programu Dlubal RFEM metodou konečných prvků. Na základě výsledků je studována vhodnost použití interakčního vztahu pro posouzení ohybu s klopením a kroucením.

Klíčová slova

Analýza, kroucení, MKP, napětí, nosník, numerické modelování, ocel, ohyb, stabilita.

Abstract

The paper deals with geometrically nonlinear analysis of steel beams of monosymmetric thin-walled cross-sections loaded perpendicularly to the plane of symmetry eccentrically to the cross-section shear centre. Numerical analysis of selected transversely loaded beams is performed using Dlubal RFEM code based on finite element method. Accuracy of interaction formula for bending with lateral torsional buckling and torsion is studied.

Keywords

Analysis, beam, bending, FEM, numerical model, stability, steel, stress, torsion.

1 ÚVOD

Ocelové nosníky jednoose symetrických tenkostěnných průřezů (např. průřezy tvaru U, C) jsou často využívány ve stavebním inženýrství jako součásti nosných konstrukcí, jedná se například o střešní vaznice nebo pažďíky. Obvykle jsou namáhány normálovou silou, příčným zatížením nebo jejich kombinací. U výše uvedených průřezů se střed smyku nachází mimo průřez, vektor příčného zatížení jím zpravidla neprochází, a proto působí i kroucení. Vzhledem ke štíhlosti tenkostěnného příčného řezu jsou tyto nosníky ohroženy také stabilitními problémy. Tento příspěvek se blíže soustředí na problematiku nosníků jednoose symetrického průřezu U zatížených příčným zatížením působícím kolmo k rovině symetrie průřezu excentricky ke středu smyku, způsobujícího namáhání ohybem s případnou ztrátou stability (klopením) a kroucením.

Teoretické řešení problému stability (klopení) ideálního prutu obecného průřezu zatíženého příčným zatížením bylo odvozeno v práci [1]. Rozpracování obecného případu do tvaru použitelného

¹ Ing. Ivan Balázs, Ústav kovových a dřevěných konstrukcí, Fakulta stavební, Vysoké učení technické v Brně, Veveří 331/95, 602 00 Brno, e-mail: balazs.i@fce.vutbr.cz.

² Prof. Ing. Jindřich Melcher, DrSc., Ústav kovových a dřevěných konstrukcí, Fakulta stavební, Vysoké učení technické v Brně, Veveří 331/95, 602 00 Brno, e-mail: melcher.j@fce.vutbr.cz.

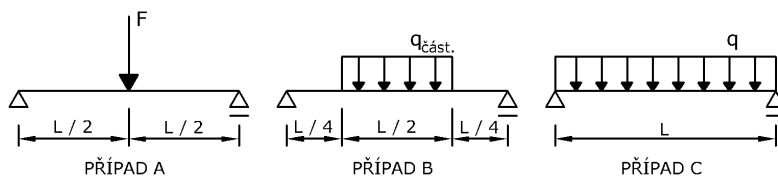
pro praktické posouzení skutečného nosníku alespoň jednoose symetrického průřezu zatíženého v rovině symetrie bylo v československé literatuře provedeno v práci [2]. Pro jednoose souměrné průřezy zatížené kolmo k ose symetrie byly potřebné vztahy pro hledání kritického momentu pro příčné zatížení procházející středem smyku uvedeny v [3]. Vztahy pro výpočet klopení v aktuálně platné normě pro navrhování ocelových konstrukcí [4] jsou také platné pouze pro případy, kdy vektor příčného zatížení protíná střed smyku a nepůsobuje tak přidavné kroucení. Pro ostatní případy je doporučeno použít např. numerické postupy. Interakční vztah pro namáhání nosníku ohybem s klopením a kroucením není uveden. Chování skutečného nosníku (s imperfekcemi) při klopení je zohledněno zavedením křivek klopení, jimž přísluší dané hodnoty amplitud počátečního zakřivení.

2 NUMERICKÁ ANALÝZA

2.1 Řešené případy

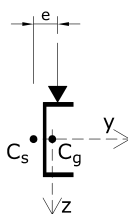
Pro numerickou analýzu v programu Dlubal RFEM (dále jen RFEM) je zvolen ocelový tenkostěnný válcovaný průřez UPE 300 z oceli S355 (mez kluzu $f_y = 355$ MPa), je provedena parametrická studie, kdy je s krokem 1 m měněno rozpětí nosníku L od 1 m do 5 m. Nosník je prostě uložen jak v ohybu, tak v kroucení.

Jsou uvažovány tři případy příčného zatížení: osamělé břemeno F působící uprostřed rozpětí, tedy ve vzdálenosti $x = L / 2$ od krajní podpory (případ A), částečné rovnoměrné spojitě zatížení $q_{\text{část.}}$ působící na části rozpětí nosníku od vzdálenosti $x = L / 4$ do vzdálenosti $x = 3L / 4$ od krajní podpory (případ B) a plné rovnoměrné spojitě zatížení q působící po celé délce nosníku (případ C). Všechny případy jsou schematicky znázorněny na obr. 1.



Obr. 1: Řešené případy zatížení

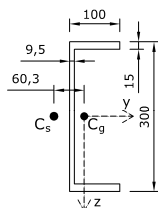
Všechna zatížení působí ve svislém směru. Excentricita zatížení ke středu smyku je ve všech případech zvolena hodnotou $e = 100$ mm, aby zatížení působilo na horní pásnici průřezu, jak je prakticky obvyklé. Příčný řez a orientace osového systému je vyobrazena na obr. 2. Osa x je podélnou osou nosníku. Parametrická studie různých rozpětí bude provedena pro všechny tři uvedené případy zatížení.



Obr. 2: Příčný řez a orientace osového systému

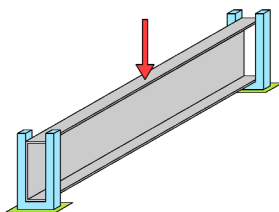
2.2 Popis modelů

Nosníky uvažovaného průřezu jsou pro numerickou analýzu metodou konečných prvků (MKP) v programu RFEM modelovány za použití prostorových konečných prvků. Program umožňuje nastavit požadovanou délku prvku; ta je nastavena ve všech případech na 10 mm. Síť konečných prvků je generována automaticky programem, výsledkem je pravidelná síť bez ostrých vnitřních úhlů mezi hranami jednotlivých prvků. Ostré vnitřní úhly by mohly negativně ovlivnit přesnost získaných výsledků [5]. Dimenze modelovaného průřezu odpovídají uvažovanému profilu UPE 300 a jsou znázorněny na obr. 3.



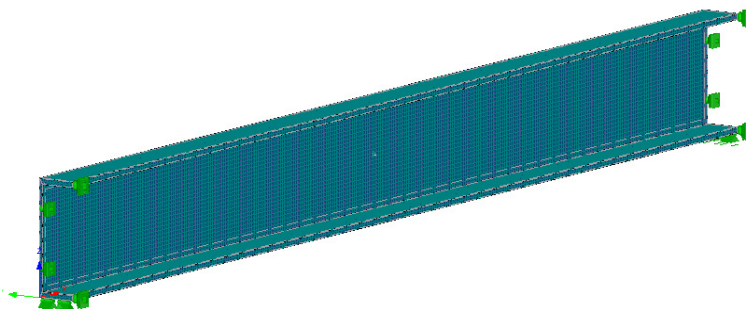
Obr. 3: Dimenze řešeného průřezu

Uložení nosníku je uvažováno jako kloubové v ohybu i kroucení. Jedná se o tzv. vidlicové uložení nosníku, které umožňuje rozvoj deplance a zamezuje volnému příčnému posunu průřezu v uložení a které je dle podkladového dokumentu [6] normy pro navrhování ocelových konstrukcí [4] při řešení klopení předpokládáno. Jednoduché znázornění vidlicového uložení nosníku je na obr. 4.



Obr. 4: Znázornění vidlicového uložení řešeného nosníku

Následující obr. 5 ukazuje nosník modelovaný v programu RFEM rozdělený na konečné prvky. Je patrná i realizace vidlicového uložení v podporách.



Obr. 5: Modelovaný nosník

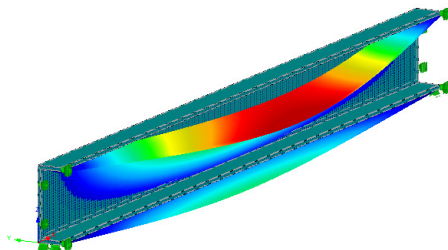
Jsou uvažovány 3 případy zatížení; v případě A je to osamělé břemeno uprostřed rozpětí působící na horní pásnici (excentricky ke středu smyku). Aby bylo zamezeno vzniku singularit v následné analýze MKP, je osamělá bodová síla (kN) přepočítána a zadána jako plošné kruhové zatížení (kN/m^2) o poloměru $R = 10$ mm. Působíště bodové síly by v numerické analýze znamenalo singularitu a výsledky by nemusely být zcela spolehlivé [7]. Také spojitá rovnoměrná liniová zatížení (případy B, C) byla převedena na plošná zatížení o malé šířce, aby byl vliv singularit eliminován.

Singularitou mohou obecně být i ostré hrany těles z prostorových konečných prvků [7]. Pro ověření jejich vlivu v řešeném případě byl vytvořen kontrolní model nosníku se zaoblenou hranou přechodu pásnice ve stojinu (poloměr zaoblení $R = 10$ mm), na které budou odečítány hodnoty normálového napětí. Rozdíl napětí σ_x oproti modelu s ostrou hranou (s úhlem 90°) byl zanedbatelný (činil cca $0,7$ MPa).

2.3 Postup numerické analýzy

Numerická analýza v programu RFEM proběhla v několika fázích: po namodelování vlastní geometrie nosníku, přiřazení materiálu, uložení a zatížení byla provedena stabilitní analýza

přídavným modulem RF-STABILITY programu RFEM pro získání vlastních tvarů; první z nich (s nejnižším součinitelem kritického zatížení, rozhodující; obr. 6) byl použit jako počáteční zakřivení nosníku se zadanou amplitudou $e_0 = L / 150$, což odpovídá křivce klopení d, která je pro U-průřezy normou předepsána [4].

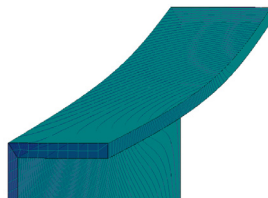


Obr. 6: První vlastní tvar, výsledek stabilitní analýzy

Geometrie nosníku pak byla přizpůsobena tomuto počátečnímu zakřivení za použití přídavného modulu RF-IMP programu RFEM. Zavedením počátečního zakřivení byl proveden přechod od ideálního nosníku ke „skutečnému“ (s imperfekcemi) a model tak byl připraven pro provedení geometricky nelineární analýzy podle teorie II. řádu (GNIA analýza). V tomto okamžiku by již bylo možné posouzení normálového napětí σ_x podle vztahu (1), bez součinitele klopení [8]:

$$\sigma_x \leq f_y . \quad (1)$$

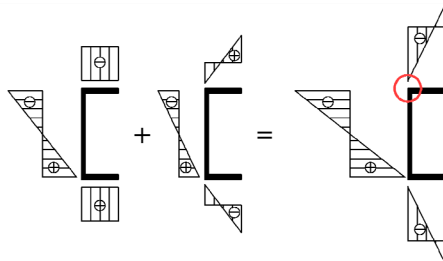
Velikost zadávané amplitudy počáteční imperfekce závisí obecně také na reziduálních napětích v průřezu. Údaje o reziduálních napětích v U-průřezích nejsou v literatuře k dispozici [9]. Tuto skutečnost lze v modelu zohlednit například přímým zavedením odhadovaného průběhu reziduálních napětí po průřezu stanovených na základě běžnějších ocelových profilů dvojose symetrického průřezu nebo nepřímo volbou méně příznivější křivky klopení a tím i větší hodnotou amplitudy počáteční imperfekce. Touto cestou šli i autoři příspěvku [9] a velikost této amplitudy ve své studii také volili hodnotou $e_0 = L / 150$ odpovídající křivce klopení d. To je také předepsáno normou [4]. Obr. 7 ukazuje již imperfektní nosník, konkrétně jeho horní pásnici.



Obr. 7: Počáteční zakřivení nosníku

2.4 Výsledky numerické analýzy

Cílem numerické analýzy modelovaných nosníků daného průřezu o různých rozpětích a pod různými případy zatížení bylo najít takovou hodnotu zatížení F_{\max} (př. A), resp. $q_{\text{část,max}}$ (př. B) nebo q_{\max} (př. C), při které bylo dosaženo meze kluzu v nejmíce namáhaném místě, v řešených případech bylo toto místo očekáváno v polovině rozpětí (zatížení jsou symetrická). Tedy v místě s maximálním ohybovým momentem M i bimomentem B . Na případná zvýšená napětí pod liniově modelovanými podporami nebyl brán zřetel [7]. Výsledky pro jednotlivé uvažované případy zatížení a rozpětí jsou přehledně uvedeny v Tab. 1. Hodnota normálového napětí při příslušném zatížení byla odečítána v bodě průřezu vyznačeném na obr. 8, který schematicky ukazuje průběhy normálového napětí σ_x od ohybu a kroucení a výsledný průběh vzniklý jejich součtem.

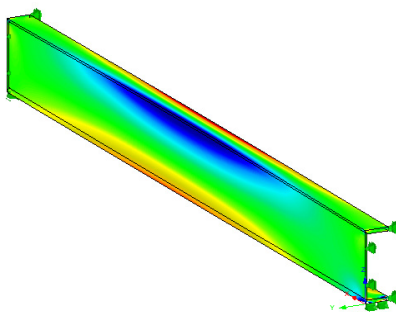


Obr. 8: Průběhy napětí od ohybu, kroucení a jejich součet

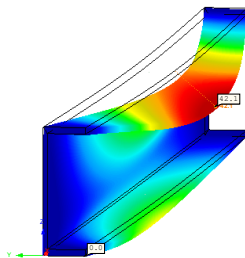
Tab. 1: Výsledky numerické analýzy

rozpětí nosníku	řešené případy zatížení		
	A	B	C
L (m)	F_{\max} (kN)	$q_{\text{část,max}}$ (kN/m)	q_{\max} (kN/m)
1	210,0	470,0	340,0
2	101,0	122,0	92,0
3	64,5	53,5	42,0
4	52,5	30,5	24,0
5	49,0	25,5	18,5

Následující obr. 9 ukazuje průběh normálového napětí σ_x jako grafický výstup numerické analýzy programem RFEM, zde ilustrativně pro rozpětí $L = 3$ m a pro případ zatížení B (při hodnotě zatížení na mezi kluzu). Modrá barva značí tlakové napětí. Obr. 10 zachycuje celkovou deformaci.



Obr. 9: Normálové napětí ($L = 3$ m, částečné spojitě zatížení)



Obr. 10: Deformace ($L = 3$ m, částečné spojitě zatížení)

3 ANALYTICKÝ VÝPOČET

Pro účely vyhodnocení výsledků numerické analýzy je proveden i srovnávací analytický výpočet. Nejprve jsou odvozeny obecné vztahy pro výpočet potřebných vnitřních sil od ohybu a kroucení způsobujících normálová napětí – ohybový moment M a bimoment B .

3.1 Osamělé břemeno F uprostřed rozpětí (případ A)

Ohybový moment uprostřed rozpětí ($x = L / 2$) od svislé síly F (působící na excentricitě e ke středu smyku) je dán vztahem (2):

$$M = \frac{FL}{4} \quad (2)$$

a bimoment (obecný vztah pro osamělé břemeno uprostřed rozpětí) vztahem (3) [10]:

$$B = \frac{T \sinh kx}{2k \cosh \frac{kL}{2}}. \quad (3)$$

Po úpravě pro řez uprostřed rozpětí ($x = L / 2$):

$$B = \frac{T}{2k} \operatorname{tgh} \frac{kL}{2}, \quad (4)$$

kde

$$T = Fe, \quad (5)$$

$$k = \sqrt{\frac{GI_t}{EI_\omega}}, \quad (6)$$

kde G je modul pružnosti oceli ve smyku, E modul pružnosti v tahu a tlaku, I_t moment setrvačnosti v prostém kroucení a I_ω výsečový moment setrvačnosti.

3.2 Částečné spojitě zatížení $q_{\text{část}}$ (případ B)

Ohybový moment uprostřed rozpětí od spojitěho částečného zatížení působícího mezi řezy $x = L / 4$ a $x = 3L / 4$ je dán vztahem (7):

$$M = \frac{3q_{\text{část}}L^2}{32}. \quad (7)$$

Pro odvození vztahu pro výpočet bimomentu uprostřed rozpětí byla použita metoda počátečních parametrů pro řešení diferenciální rovnice vázaného kroucení vyložená v [11] při uvážení okrajových podmínek řešeného nosníku, kloubově uloženého jak v ohybu, tak kroucení. Pro tento případ uložení se uplatní dvě okrajové podmínky, jedna je kinematická, druhá statická: úhel kroucení v uložení v ($x = 0$) je nulový a bimoment v uložení B ($x = 0$) je nulový, tedy prut může volně deplanovat. Výsledkem je vztah (8):

$$B = \frac{mL^2}{k} \left\{ \frac{1}{2 \cosh \frac{k}{2}} \left[\frac{\sinh k}{4} + \frac{1}{k} \left(\cosh \frac{3k}{4} - \cosh \frac{k}{4} \right) \right] - \frac{\sinh \frac{k}{2}}{4} - \frac{\cosh \frac{k}{4} - 1}{k} \right\}, \quad (8)$$

kde

$$m = q_{\text{část}}e \quad (9)$$

a k je dáno vztahem (6).

3.3 Plně spojitě zatížení q (případ C)

Vztah pro ohybový moment uprostřed rozpětí je dán výrazem (10):

$$M = \frac{1}{8} qL^2. \quad (10)$$

Vztah pro bimoment (obecný vztah pro plně spojitě zatížení na excentricitě e) je vyjádřen vztahem (11) [10]:

$$B = \frac{m}{k^2} \left[1 - \frac{\cosh k \left(\frac{L}{2} - x \right)}{\cosh \frac{kL}{2}} \right] \quad (11)$$

a po úpravě pro řez uprostřed rozpětí ($x = L / 2$)

$$B = \frac{m}{k^2} \left[1 - \frac{1}{\cosh \frac{kL}{2}} \right], \quad (12)$$

$$m = qe \quad (13)$$

3.4 Výpočet normálových napětí

Normálová napětí od ohybu σ_M a kroucení σ_ω byla ve všech případech zatížení určena podle obecných vztahů (14) a (15):

$$\sigma_M = \frac{M}{W_y}, \quad (14)$$

$$\sigma_\omega = \frac{B}{I_\omega} \omega, \quad (15)$$

ve kterých M značí hodnotu ohybového momentu uprostřed rozpětí, W_y průřezový modul daného průřezu, B hodnotu bimomentu uprostřed rozpětí, I_ω výsečový moment setrvačnosti průřezu a ω hodnotu výsečové souřadnice ve vyšetřovaném místě.

3.5 Interakce ohybu s klopením a kroucením

Posouzení ohybu s klopením je v normě [4] provedeno pomocí vztahu (16):

$$M_{Ed} \leq M_{b,Rd}. \quad (16)$$

Ten lze modifikovat (do formy s normálovým napětím) na tvar (17):

$$\frac{\sigma_M}{\chi_{LT}} \leq f_y, \quad (17)$$

kde χ_{LT} značí součinitel klopení, který se určí standardním postupem daným v normě [4].

Máme-li převeden vztah (16) do formy normálového napětí σ_M modifikovaného součinitelem klopení (17), lze k němu již přičíst výsečové normálové napětí σ_ω vyvozené kroucením a získat tak jednoduchý lineární interakční vztah (18):

$$\frac{\sigma_M}{\chi_{LT}} + \sigma_\omega \leq f_y. \quad (18)$$

Tento interakční vztah (18) je použitý pro nalezení takové hodnoty zatížení, při které součet napětí od ohybu a kroucení ve vyšetřovaném místě způsobí dosažení meze kluzu. Je tedy hledána taková jeho hodnota, při které je splněna rovnost mezi levou a pravou stranou výrazu (18):

$$\frac{\sigma_M}{\chi_{LT}} + \sigma_\omega = f_y \quad (19)$$

Výsledky tohoto výpočtu jsou shrnuty v Tab. 2. V tabulce Tab. 3 jsou uvedeny některé dílčí mezivýsledky normového výpočtu: hodnoty kritického momentu M_{cr} , poměrné štíhlosti $\bar{\lambda}_{LT}$ a součinitele klopení χ_{LT} (pro křivku klopení d), vše určeno standardním postupem [4]. Hodnota kritického momentu M_{cr} závisí též na průběhu ohybového momentu od zatížení, což je zohledněno součiniteli C_1 , C_2 a C_3 . Průběhy momentu od zatížení v případech B a C jsou velmi podobné, proto byly v těchto dvou případech tyto součinitele brány stejnou hodnotou. Vliv na přesnost výsledku je malý a lze zanedbat.

Tab. 2: Výsledky analytického výpočtu – řešení rovnice (19)

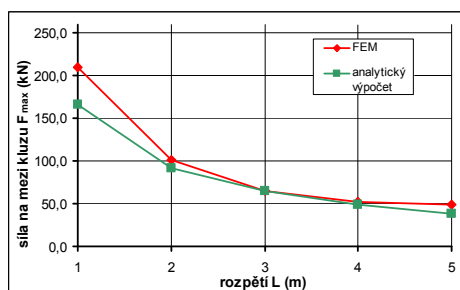
rozpětí nosníku L (m)	řešené případy zatížení		
	A	B	C
	F_{\max} (kN)	$q_{\text{část,max}}$ (kNm)	q_{\max} (kNm)
1	165,9	449	338,9
2	91,5	101,5	97,3
3	64,7	40,9	46,9
4	49,1	21,2	26,6
5	38,5	12,7	16,5

Tab. 3: Některé mezivýsledky normového výpočtu

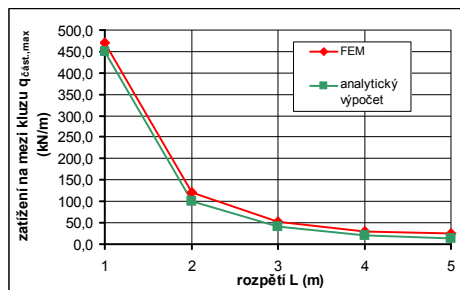
L (m)	řešené případy zatížení								
	A			B			C		
	M_{cr} (kNm)	$\bar{\lambda}_{LT}$ (-)	χ_{LT} (-)	M_{cr} (kNm)	$\bar{\lambda}_{LT}$ (-)	χ_{LT} (-)	M_{cr} (kNm)	$\bar{\lambda}_{LT}$ (-)	χ_{LT} (-)
1	1028,6	0,46	0,81	937,0	0,48	0,79	937,0	0,48	0,79
2	338,0	0,80	0,58	304,3	0,85	0,55	304,3	0,85	0,55
3	201,8	1,04	0,45	179,4	1,10	0,42	179,4	1,10	0,42
4	148,0	1,21	0,37	130,2	1,29	0,34	130,2	1,29	0,34
5	118,9	1,35	0,32	103,7	1,45	0,29	103,7	1,45	0,29

4 POROVNÁNÍ VÝSLEDKŮ

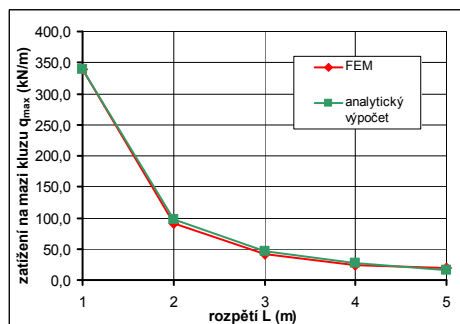
Grafy na obr. 11, obr. 12 a obr. 13 ukazují porovnání hodnot zatížení vedoucích k napětí na mezi kluzu uprostřed rozpětí získaných numerickou analýzou a pomocí analytického výpočtu.



Obr. 11: Porovnání (případ zatížení A – osamělé břemeno)

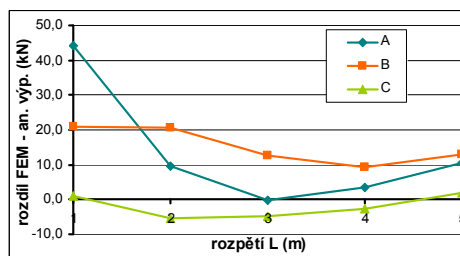


Obr. 12: Porovnání (případ zatížení B – částečné spojité zatížení)



Obr. 13: Porovnání (případ zatížení C – plné spojité zatížení)

Porovnání výsledků numerické analýzy studovaných nosníků při vybraných případech zatížení a analytického výpočtu shrnutých v této kapitole ukazuje, že použití uvedeného interakčního vztahu poskytuje ve většině případů hodnoty zatížení na mezi kluzu menší než ty získané numerickou analýzou. Pouze pro případ zatížení C dává numerická analýza MKP pro některá rozpětí mírně menší hodnoty. Obr. 14 ukazuje graficky znázorněné hodnoty rozdílu numerického a analytického výpočtu pro vyšetřovaná rozpětí L . Kladné hodnoty znamenají, že výsledky numerické analýzy poskytly vyšší hodnotu velikosti zatížení než výsledky analytického výpočtu, záporné hodnoty znamenají opak.



Obr. 14: Graf rozdílů výsledků v závislosti na rozpětí

5 ZÁVĚR

Příspěvek je zaměřen na problematiku numerického modelování a geometricky nelineární analýzu ohýbaných a kroucených tenkostěnných ocelových nosníků jednoose symetrického průřezu zatížených příčným zatížením kolmo k rovině symetrie. Výsledky numerické analýzy metodou konečných prvků jsou porovnány s výsledky analytického výpočtu za použití jednoduchého lineárního interakčního vztahu beroucího v úvahu jak ohyb s klopením, tak kroucení.

Při vyhodnocování numerických stabilitních analýz je třeba uvážit, že pro malá rozpětí nosníku L (resp. pro nízké hodnoty jeho poměrné štíhlosti $\bar{\lambda}_{LT}$) nemusí získaný vlastní tvar odpovídat vlastnímu tvaru pro ztrátu příčné a torzní stability, jelikož se v numerické analýze projevuje vliv lokální ztráty stability stojiny nosníku. Vliv klopení není v těchto případech rozhodující. Dle normy

[4] se jeho účinek může zanedbat při $\bar{\lambda}_{LT} \leq 0,4$. Použitý interakční vztah (18) vliv lokální ztráty stability nepostihuje, což zřejmě vysvětluje jistý rozdíl mezi výsledky numerické analýzy a analytického výpočtu, patrný v případě zatížení osamělým břemenem uprostřed rozpětí.

Předmětem tohoto příspěvku byla analýza normálového napětí nosníků vybraných rozpětí od různého zatížení; v širším kontextu by samozřejmě bylo účelné analyzovat i velikosti deformací.

Při interpretaci výsledků numerických analýz je též vhodné uvážit podstatu těchto metod. MKP jako numerická metoda poskytuje „pouze“ aproximace přesného řešení. Tyto aproximace mohou být velmi přesné, na což má jistý vliv i velikost použitých konečných prvků. Při eliminaci singularit v modelu poskytuje MKP zpravidla prakticky použitelné a reálné výsledky.

PODĚKOVÁNÍ

Příspěvek byl vypracován v rámci řešení projektu specifického výzkumu č. FAST-J-13-2059 a projektu GAČR č. P105/12/0314.

LITERATURA

- [1] VLASOV, V. Z. *Tenkostěnné pružné pruty*. Praha: SNTL, 1962. 572 s.
- [2] BŘEZINA, V. *Vzpěrná pevnost prutů kovových konstrukcí*. Praha: SNTL, 1963. 184 s.
- [3] MELCHER, J. Kippen von Trägern als Stabilitätsproblem zweier Gruppen von Querschnitten. *Stahlbau*. Berlin, SRN: Ernst & Sohn, 1999, roč. 68, č. 1, s. 24-29. ISSN 0038-9145.
- [4] ČSN EN 1993-1-1. *Eurokód 3: Navrhování ocelových konstrukcí – Část 1-1: Obecná pravidla a pravidla pro pozemní stavby*. Praha: Český normalizační institut, 2006. 96 s.
- [5] DALÍK, J. *Numerické metody II*. Brno: Ústav matematiky a deskriptivní geometrie FAST VUT v Brně, 2012. 52 s.
- [6] SEDLACEK, G. a NAUMES, J. *Excerpt from the Background Dokument to EN 1993-1-1: Flexural buckling and lateral buckling on a common basis: Stability assessments according to Eurocode 3*. Aachen, SRN: Institut und Lehrstuhl für Stahlbau und Leichtmetallbau, Rheinisch-Westfälische technische Hochschule, 2009. 142 s.
- [7] NĚMEC, I., KOLÁŘ, V., ŠEVČÍK, I., VLK, Z., BLAAUWENDRAAT, J., BUČEK, J., TEPLÝ, B., NOVÁK, D. a ŠTEMBERA, V. *Finite Element Analysis of Structures: Principles and Praxis*. Aachen, SRN: Shaker Verlag, 2010. ISBN 978-3-8322-9314-7. 638 s.
- [8] KINDMANN, R. a WOLF, C. Geometrische Ersatzimperfectionen für Tragfähigkeitsnachweise zum Biegeknicken von Druckstäben. *Stahlbau*. Berlin, SRN: Ernst & Sohn, 2009, roč. 78, č. 1, s. 25-34. ISSN 0038-9145.
- [9] SNIJDER, H. H., HOENDERKAMP, J. C. D., BAKKER, M. C. M., STEENBERGEN, H. M. G. M. a DE LOUW, C. H. M. Design rules for lateral torsional buckling of channel sections subjekt to web loading. *Stahlbau*. Berlin, SRN: Ernst & Sohn, 2008, roč. 77, č. 4, s. 247-256. ISSN 0038-9145.
- [10] MELCHER, J. *Ohyb, kroucení a stabilita ocelových nosníků*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, 1975. 217 s.
- [11] PANC, V. *Statika tenkostěnných prutů a konstrukcí*. Praha: Nakladatelství Československé akademie věd, 1959. 423 s.

Oponentní posudek vypracoval:

Prof. Ing. František Wald, CSc., Katedra ocelových a dřevěných konstrukcí, Fakulta stavební, ČVUT v Praze.

Ing. Vít Křivý, Ph.D., Katedra konstrukcí, Fakulta stavební, VŠB-TU Ostrava.

Viktor BORZOVIČ¹, Ján LACO²

BOND STRESS – SLIP BEHAVIOUR OF PRESTRESSING UNITS COATED WITH CORROSION PROTECTION

ZÁVISLOSŤ NAPATIE V SÚDRŽNOSTI – POKLZ PREDPÍNACÍCH JEDNOTIEK OPATRENÝCH PROTİKORÓZNOU OCHRANOU

Abstract

Experimental research of interaction between prestressing units coated with corrosion protection agents and surrounding material has been performed. This paper shows the result from pull-out tests of strands coated with emulsifiable oil and thixotropic compound. Primary goal is to compare bond stress behaviour at different types of specimens with strand coated or not coated with corrosion protection.

Keywords

Bond, anti-corrosion protection, pull-out test, strand.

Abstrakt

Realizovaný bol experimentálny výskum spolupôsobenia medzi predpínacími jednotkami opatrenými protikoróznou náterovou ochranou s okolím. Príspevok predstavuje výsledky testov súdržnosti predpínacích lán opatrených protikoróznou ochranou na báze olejovej emulzie a tixotropnej gélovej zloženie. Hlavným cieľom je vzájomné porovnanie priebehu súdržnosti na rôznych vzorkách, ktoré obsahovali lano bez náteru a s protikoróznymi nátermi.

Kľúčová slova

Súdržnosť, protikorózna ochrana, skúška súdržnosti, predpínacie lano.

1 INTRODUCTION

The time between prestressing of tendons and the injection of ducts in concrete post-tensioned bridges may take several weeks. During this time, it is necessary to protect tendons against weathering and atmospheric humidity. Tendons should be protected with various agents, which can influence their bond with a structure.

Bond between prestressing unit and concrete or injection grout may be influenced by the use of corrosion protection emulsions. Most of the post-tensioned concrete bridges are designed with the use of prestressing units with bond, where a full connection between reinforcement and concrete is assumed. Main reasons are as follows:

- protection against corrosion of prestressing units,

¹ Ing. Viktor Borzovič, PhD., Department of Concrete Structures and Bridges, Faculty of Civil Engineering, Slovak University of Technology in Bratislava, Radlinského 11, 813 68 Bratislava, phone: (+421) 2 59 274 542, e-mail: viktor.borzovic@stuba.sk.

² Ing. Ján Laco, Department of Concrete Structures and Bridges, Faculty of Civil Engineering, Slovak University of Technology in Bratislava, Radlinského 11, 813 68 Bratislava, phone: (+421) 2 59 274 295, e-mail: jan.laco@stuba.sk.

- denser distribution of cracks for partially prestress concrete,
- higher resistance for ultimate limit state.

Using prestressing reinforcement with a bond can prevent a sudden failure of a member. In this case, shear stress between reinforcement and concrete (bond stress) reduces the increased tensile stress of the reinforcement in areas near the first crack. Increased tensile stress in reinforcement is developed only at short length and depends on its bond stress. This leads to small elongations and also narrow crack width. Due to the bond stress, the tensile stress in concrete near the crack is almost without changes and grows with the increasing amount of load. Therefore, the other cracks appear close to the first crack. Before the failure of prestressed member with bonded reinforcement, there are many small narrow cracks that slowly lengthen to the compressed edge. The neutral axis moves slowly to the top of the member and so the compressed part of the section is much higher than in a girder reinforced with units without a bond. This also allows much greater tensile stress in reinforcement until it slowly reaches the yield strength of the prestressing unit in the crack. After that, the crack opens to such a level that the compressed concrete starts to crush. Therefore, bonds ensure a higher resistance against failures by way of a better utilization of prestressing steel.

2 BOND EXPERIMENTAL TESTS

There are many aspects that affect the bond between prestressing unit and concrete or injection grout of experimental specimens, for example:

- dimensions of the specimen,
- embedment length,
- method of loading.

Experiments usually mean to estimate transmission length and anchorage capacity. Primary goal of our test was to compare bond stress behaviour on different types of specimens with strand coated or not coated with corrosion protection.

2.1 Corrosion protection agents

Two type of corrosion protection agents were tested. The first was emulsifiable oil prepared from non-aromatic mineral oil soluble with raffinates. The main components are sodium sulfonate, polyvalent alcohols and modified derivatives of fatty acids and antioxidants. It serves as a corrosion and oxidation inhibitor. Density of oil is 904 kg/m^3 . Concentration by applying was 25%.

The second type of corrosion protection agent was thixotropic compound. It may be used as reliable corrosion protection filling material for various steel elements. It is cold processed, water blocking material based on highly refined base oil. Also serve as a corrosion and oxidation inhibitor. This compound has zero oil separation in any temperature conditions. Density of compound is 870 kg/m^3 and can be applied by cold pumping.

2.2 Test arrangement

There are several types of test arrangement shown in Fig. 1. It was chosen the method of bond measuring called pull-out test free (Fig. 1a), where the unstressed strand is pulled out from the concrete specimen [1].

The test arrangement is shown in Fig. 2. A part of the test arrangement was a calibrated hollow jack. Cylindrical specimen was fixed and the strand was pulled out with the jack. On the specimen were measured displacements on both ends and also corresponding pulling force.

2.3 Specimens description

In the experimental program the measuring of the bond on 36 specimens was performed. Twelve specimens were dry with uncoated strands, for 12 specimens emulsifiable oil and for 12 thixotropic compounds was applied. Specimens were of cylindrical shape with the length of 600 mm and diameter of 165 mm made from concrete and injection grout placed to the plastic tubes. In their centre, strand $\phi 15.7$ (0.62") with characteristic tensile strength of 1860 MPa were placed. The specimen body was made from concrete of mean cube strength 32.1 MPa. The strand was placed in the centre of the corrugated steel duct. After reaching 28 day strength of the grout, that means approximately 50 MPa, specimens were tested with device constructed for this purpose.

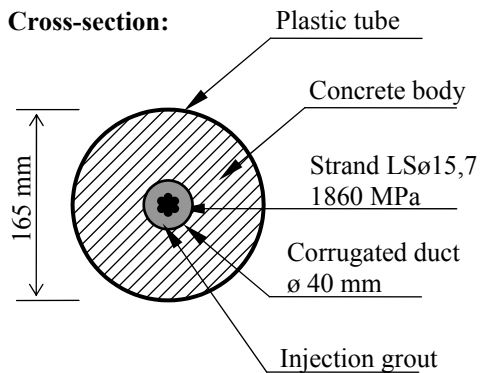


Fig. 4: Specimens

3 DISCUSSION OF RESULTS

Typical mode of failure was represented by longitudinal splitting cracks accompanied with crushed grout wedge around strand on the active pulling side, see Fig. 5. Strands were losing their adhesion if coated with anticorrosion emulsifiable oil. Adhesion losing was obviously due to the fact that the strand was possible to screw out from specimen. Therefore strands were prevented against twisting on both ends of the specimen. Results and comparison of maximal bond stress are shown in Fig. 6.



Fig. 5: Failure mode of specimens with crushed grout wedge

A failure criterion for bond strength is maximum measured load in a pull-out test on strand. Then constant equivalent bond stress was derived from this force. The equivalent area of interface between strand and grout in specimens is 0.02605 m^2 . For some pull test, the bond strength is the force recorded when strand draw in certain value, e.g. according to [2] it is 0.25 mm (0.01 in), or according to [3] 2.5 mm (0.1 in). Because our specimens are different and unique from standard ones, it was not provided such criterion for passive displacements.

Maximum bond between strand and surrounding grout was reached in dry type specimens without corrosion protection. The strand was pulled out by 126.1 kN, which is corresponding with constant equivalent bond stress 4.84 MPa. Specimens with strand coated with emulsifiable oil reached average bond stress of 1.61 MPa what is approximately 33 % of dry ones. Specimens with strand coated with thixotropic compound reached average bond stress of 3.98 MPa what is approximately 82 % of dry ones. Bond strength measurements of specimens are shown in Fig. 6.

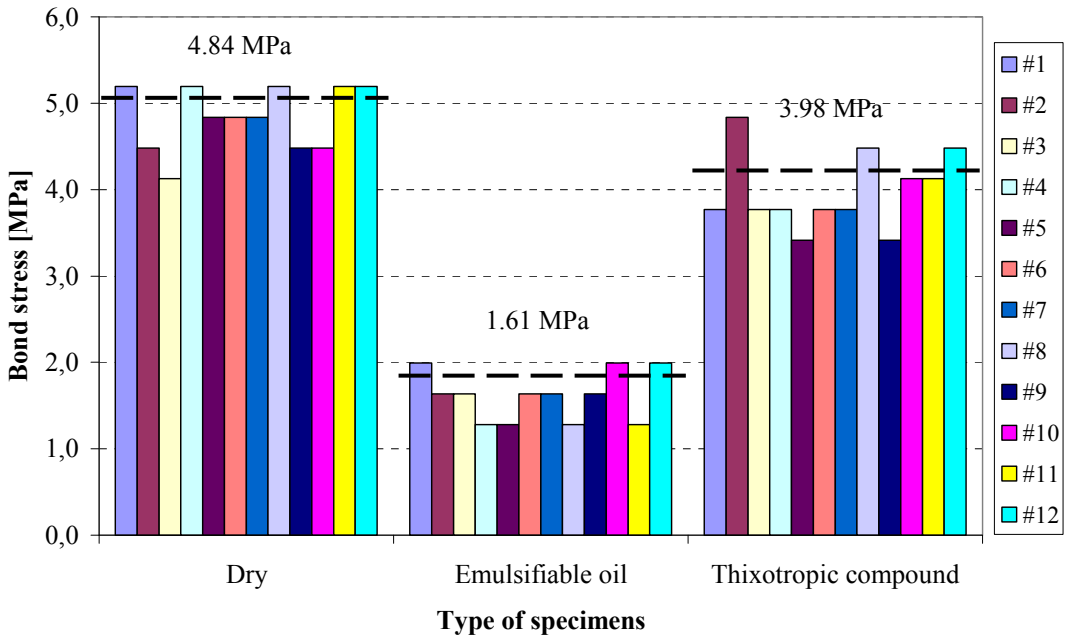


Fig. 6: Maximum bond stress at specimen failure with average values

Another difference except the bond strength can be observed from Fig. 7, Fig. 8 and Fig. 9, where displacements on active and passive side are presented. Measured displacements were summarized by trend lines for active and passive slips and also for all three types of specimens.

Behaviour of dry type specimens may be described as bilinear, see Fig. 7. After rupture of an adhesion, a friction is activated. This debonding occurs at very small slip. Pulling force transmitted before debonding was small and not measurable compared to a force of bond strength. The first part of bilinear trend lines represents a friction due to the radial compressive stress caused by e.g.: irregular shape of strand, varying pitch. After rupture of a friction, a residual bond is provided by mechanical interlock of pulling helical strand. This represents the second part of the trend line presented in Fig. 7. The slope of the second part of trend line compared to the first one is much smaller.

Behaviour of specimens with strand coated with corrosion protection may be described as monilinear, see Fig. 8 and Fig. 9. Compared to the dry type specimen, the first part of trend line is missing. We consider that friction plays only a minor role in this case.

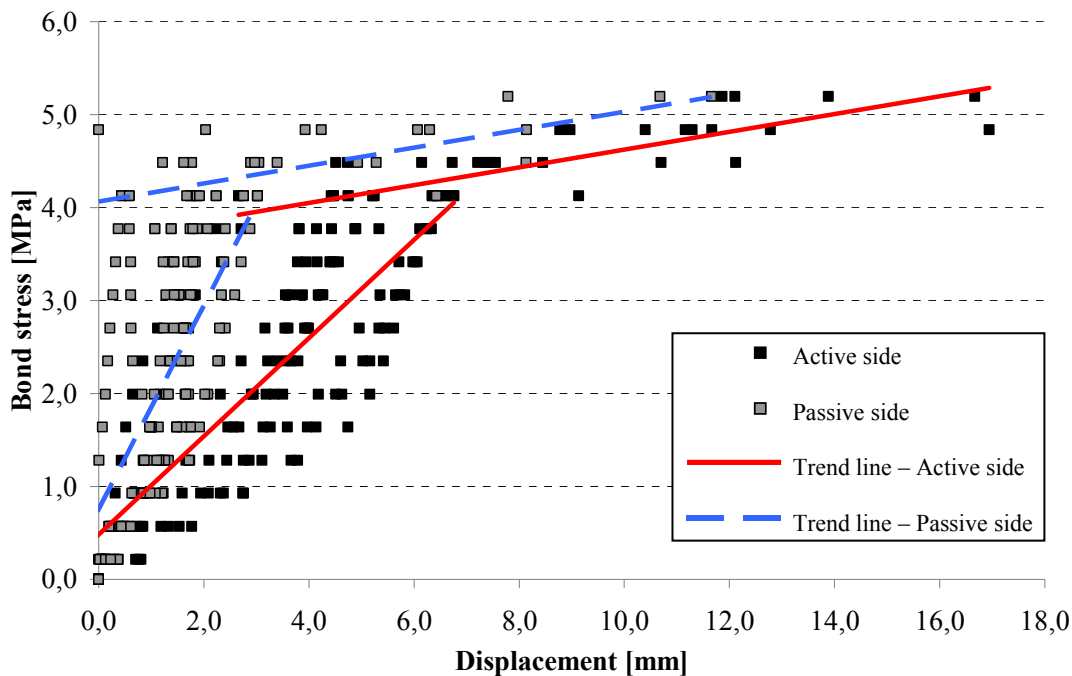


Fig. 7: Bond stress – slip development of “dry” type specimens on active and passive side (strands not coated with corrosion protection agents)

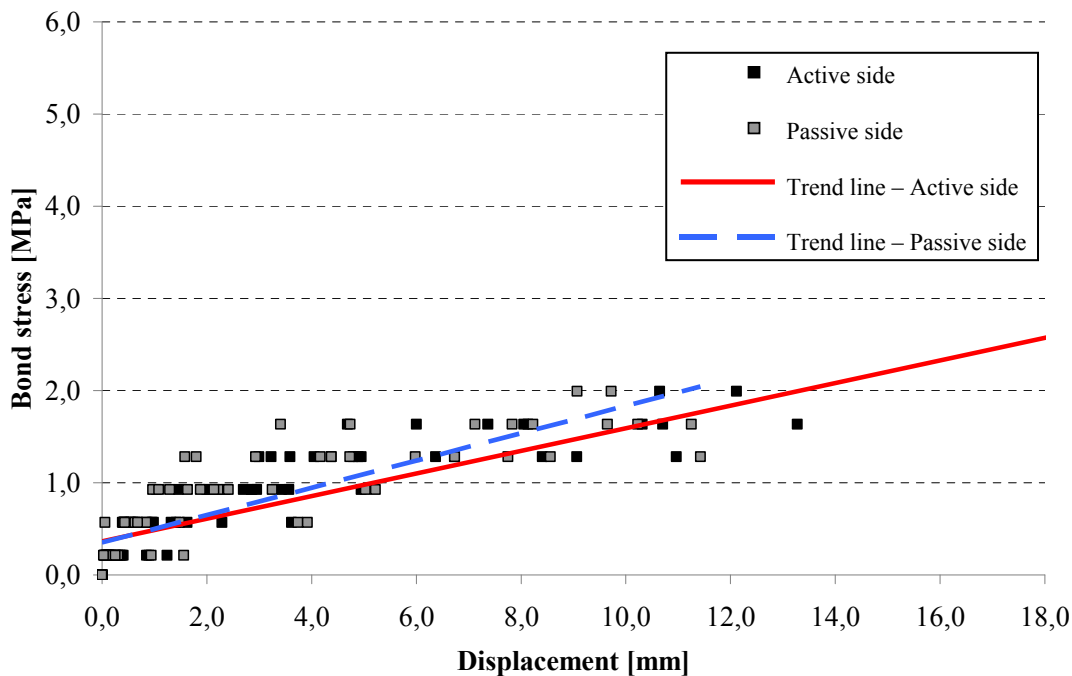


Fig. 8: Bond stress – slip development of “emulsifiable oil” type specimens on active and passive side (strands coated with emulsifiable oil)

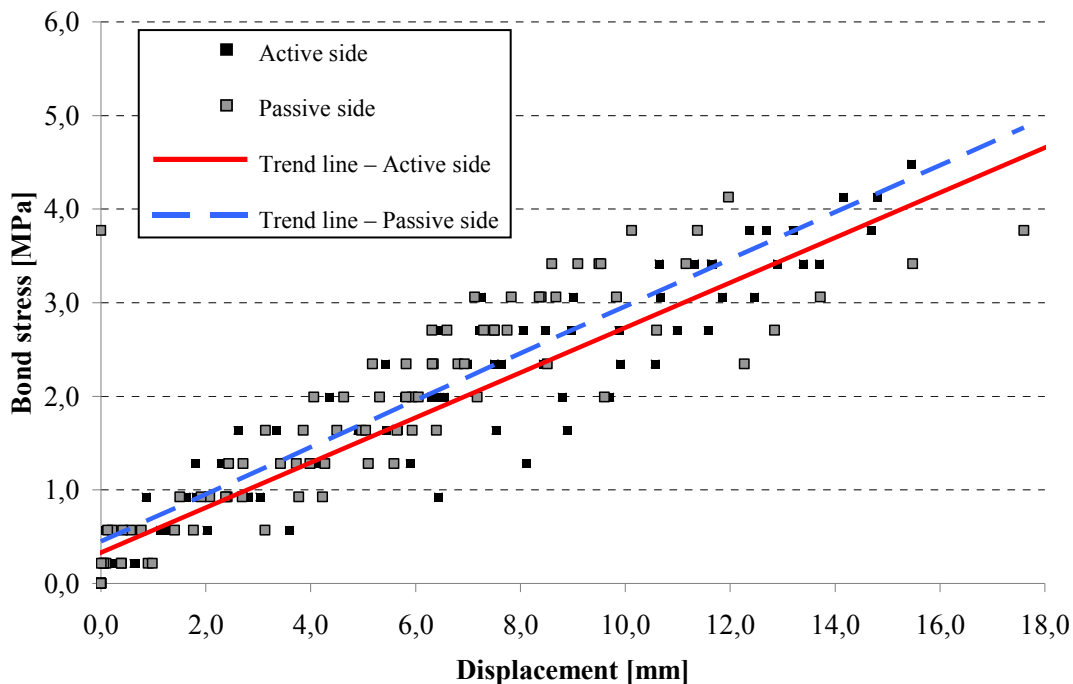


Fig. 9: Bond stress – slip development of “thixotropic compound” type specimens on active and passive side (strands coated with thixotropic compound)

6 CONCLUSIONS

The use of corrosion protection decreases the bond between prestressing units and grout. The results of pull out tests have shown that difference between dry type specimens and specimens with strands coated with corrosion protection is not only in bond strength but also in slip development (bond stress – slip relation). The bond stress of specimens with strands coated with emulsifiable oil reached 33 % of dry ones and the bond stress of specimens with strands coated with thixotropic compound reached 82 % of dry ones. Slip of the strands coated with corrosion protection was in the beginning significantly larger compared to dry ones. Bond stress – slip relation of dry specimens may be described as bilinear compared to monolinear bond stress – slip relation of specimens with strands coated with corrosion protection. We assumed that this difference is due to lower friction, particularly in case of strands coated with emulsifiable oil.

ACKNOWLEDGEMENTS

Authors gratefully acknowledge Slovak Research and Development Agency, project No. APVV-0442-12.

Authors gratefully acknowledge technical support provided by Doprastav, a.s. company.

REFERENCES

- [1] fib Bulletin 10. *Bond of reinforcement in concrete. State-of-art report*. Lausanne : *fédération internationale du béton*, 2000. 434 p. ISBN 978-2-88394-050-5.
- [2] ASTM A981-97. *Standard Test Method for Evaluating Bond Strength for 15.2 mm diameter prestressing steel strand, grade 270, uncoated, used in prestressed ground anchors*. United States, 2002.
- [3] LÜTHI, T., BREEN, J. E., et al. *Factors affecting bond and friction losses in multi-strand post-tensioning tendons including the effect of emulsifiable oils : technical report*. Centre for Transportation Research at The University of Texas at Austin, TxDOT, 2005, 174 p.
- [4] MARTI, P., ULLNER, M., et al. Temporary corrosion protection and bond of prestressing steel. *ACI journal*. Warsaw, Poland: Versita, 2008, Vol. January-February, pp. 51-59. ISSN 0889-3241.
- [5] TEPFERS, R. 1973. *A theory of bond applied to overlapped tensile reinforcement splices for deformed bars* : dissertation thesis. Chalmers University of Technology at Göteborg, Sweden: CUT, 1973. 328 p.
- [6] SALCEDO-RUEDA, E., SCHOKKER, A.J., et al. *Bond and Corrosion Studies of Emulsifiable Oils Used for Corrosion Protection in Post-Tensioned Tendons* : výskumná správa. Pennsylvania: 2003. 32 p.

Reviewers:

Doc. Ing. Peter Koteš, Ph.D., Department of Structures and Bridges, Faculty of Civil Engineering, University of Zilina.

Ing. Matečková Pavlína, Ph.D., Department of Building Structures, Faculty of Civil Engineering, VŠB-Technical University of Ostrava.

Radim ČAJKA¹, Roman FOJTÍK²

**EXPERIMENTÁLNÍ MĚŘENÍ ZÁKLADOVÉ DESKY
NÁRODNÍHO SUPERPOČÍTAČOVÉHO CENTRA**

**EXPERIMENTAL MEASUREMENT IN THE FOUNDATION SLAB
OF NATIONAL SUPERCOMPUTER CENTRE**

Abstrakt

V příspěvku je popsán způsob experimentálního měření teplot a poměrného přetvoření železobetonové základové desky během výstavby Národního superpočítačového centra v Ostravě. Jedná se o kontinuální měření po dobu výstavby této speciální konstrukce.

Klíčová slova

Experimentální měření, teplota, napjatost, betonové základové konstrukce, kluzné spáry.

Abstract

In the paper is described the method of experimental temperature and strain measurement of reinforced concrete foundation slab during building-up of National Supercomputing Centre in Ostrava. This is a continuous measurement during the construction of this special structure.

Keywords

Experimental measurement, temperature, stress, concrete foundation, sliding joints.

1 ÚVOD

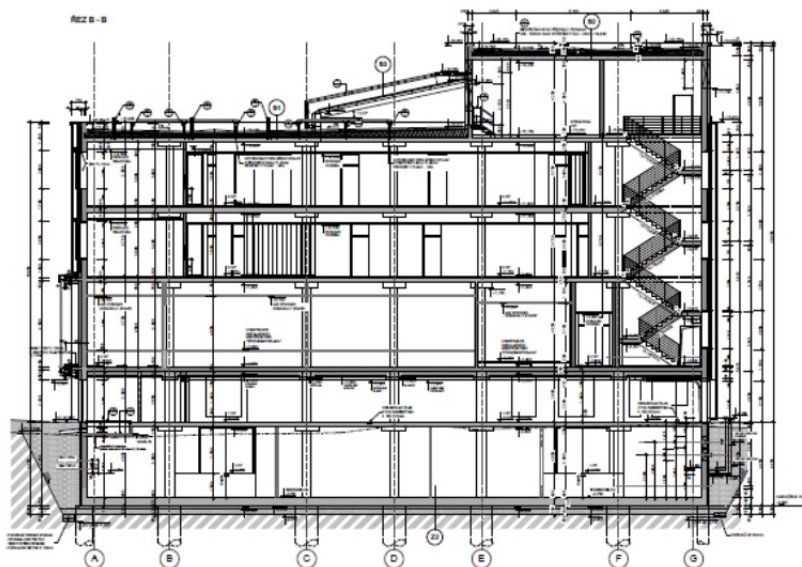
Počátkem roku 2013 byla v rámci „OP VaVPI projektu IT4 Inovations“ zahájena výstavba Centra excellence – Národního superpočítačového centra v areálu VŠB – Technické univerzity Ostrava. S ohledem na náročnost stavby, složité základové poměry a betonáž v zimních podmínkách bylo rozhodnuto ověřit během výstavby průběh teplot a stav napjatosti základové desky.

2 KONSTRUKČNÍ ŘEŠENÍ

Nosnou část objektu superpočítače tvoří prostorová železobetonová konstrukce tvořená základovou deskou se žebry, nosnými stěnami, sloupy a deskami jednotlivých podlaží (viz obr. 1). Půdorysný rozměr stavby je 63 m × 33,5 m. Základová konstrukce sestává ze základové desky tl. 400 mm, která je v podélném i příčném směru zesílena ztužujícími žebry. Umístění žebor směrem nahoru umožňuje na spodním povrchu základové desky vytvořit tzv. kluznou spáru [6], [7] pro eliminaci napětí vlivem objemových změn betonu, viz např. [3], [4] a [5]. Pro kontrolu jakosti stavebních prací jsou průběžně měřeny změny teplot i napjatosti v základové desce.

¹ Prof. Ing. Radim Čajka, CSc., Katedra konstrukcí, Fakulta stavební, VŠB-Technická univerzita Ostrava, Ludvíka Podéště 1875/17, 708 33 Ostrava-Poruba, tel.: (+420) 597 321 344, e-mail: radim.cajka@vsb.cz.

² Ing. Roman Fojtík, Katedra konstrukcí, Fakulta stavební, VŠB-Technická univerzita Ostrava, Ludvíka Podéště 1875/17, 708 33 Ostrava-Poruba, tel.: (+420) 597 321 398, e-mail: roman.fojtik@vsb.cz.



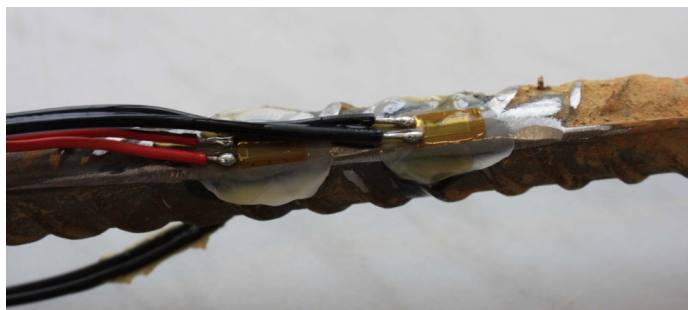
Obr. 1: Schéma příčného řezu objektem

3 MĚŘENÍ TEPLoty A ZMĚNY NAPJATOSTI

Cílem měření bylo zaznamenání změny hydratačního tepla při betonáži základové desky o tloušťce 400 mm a také změna napjatosti v betonu a betonářské výztuži v průběhu tvrdnutí a výstavby navazujících konstrukcí. Na základě těchto požadavků byly zvoleny měřicí postupy a zařízení. Pro získání aktuální teploty v různých výškových úrovních byly zvoleny strunové tenzometry a jako kontrolní měření byla užitá optická vlákna. Pro sledování změny napjatosti ve zvolených úrovních výšky betonové desky byly užitý strunové tenzometry a pro stanovení změny napjatosti výztuže při horním a spodním okraji bylo užitó foliových tenzometrů [1], [11].

3.1 Foliové tenzometry

Jedná se o pasivní elektrotechnické snímače používané k nepřímému měření mechanického napětí. Tato metoda využívá fyzikálních vlastností změny elektrického odporu tenkého vodiče při jeho protažení nebo zkrácení. První tenzometrické měření bylo provedeno v roce 1938 za účelem zkoumání dílů lokomotivy [7]. Pro snímání bylo využito tenkých drátků. V současné době je nejčastěji využíváno foliových tenzometrů, které budou užitý pro uvedené experimentální měření. Každý snímač obsahuje zatavenou vlnovku vodiče, na níž je možné stanovit změnu elektrického odporu $[\Delta R/R]$, která je lineárně závislá na veličině poměrného přetvoření $[\mu\text{m}/\text{m}]$ [8], [9], [10].



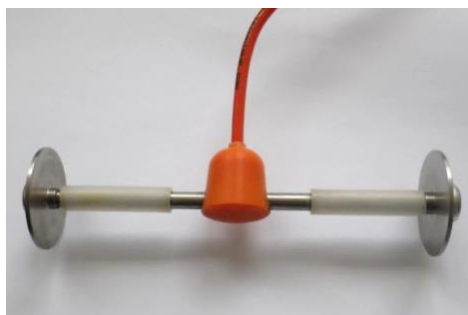
Obr. 2: Osazení foliového ½ mostu na výztuž

Na základě parametrů užitých tenzometrů a způsobu zapojení je možné výsledné poměrné přetvoření přepočítat na změnu napětí [MPa]. Tenzometrické měření může být ovlivněno především změnou teploty, při které dochází k roztažnosti vodiče snímačů bez vlivu změny napětí měřené konstrukce. Tento nepříznivý jev je možné kompenzovat zapojením několika snímačů do tzv. „mostu“, buď jako čtvrt-most, půl-most, nebo plný-most, viz obr. 2. Další veličinou ovlivňující výsledné hodnoty je tzv. tečení (creep), které vzniká konstantním mechanickým namáháním, a snímače po čase ztrácejí citlivost. Je to způsobeno změnami v materiálech tenzometrů a lepidle. Posledním významným vlivem, který může negativně ovlivnit naměřené výsledky je elektromagnetické pole. Jedná se především o silné střídavé magnetické pole a s ním spojenou indukci v přírodních kabelech.

Tento typ tenzometrů není vhodný pro dlouhodobá měření a to především z důvodu nepříznivého působení teplot. Získaná data z těchto snímačů na výztuži mohou být zajímavá ve chvíli, kdy v betonové desce již bude konstantní teplota a bude sledována změna poměrného přetvoření výztuže například při zatížení desky parkujícími auty.

3.2 Strunové tenzometry

Strunové tenzometry se používají pro měření poměrných přetvoření, napětí, teploty, náklonu a jiných odvozených veličin. Základní typy jsou podle umístění dva, jedná se o vnitřní a vnější čidla. Vnitřní čidla umožňují měřit požadované veličiny uvnitř betonových prvků, viz obr. 3, zatímco vnější snímače jsou přišroubovány po obvodu měřeného tělesa. Velkou výhodou těchto snímačů je jejich odolnost proti vlhkosti a mechanickému poškození, tudíž jsou vhodná i pro měření in-situ (na stavbách).



Obr. 3: Strunový tenzometr do betonu

Strunové tenzometry využívají pro měření deformací změnu frekvence kmitání napnuté ocelové struny v závislosti na změně vzdálenosti obou konců napnuté struny. Pro buzení je použit elektromagnetický jednocívkový nebo dvoucívkový systém. Pro zajištění harmonického kmitání struny je využito magnetického pole, které je zajištěno permanentním magnetem, nebo stejnosměrným posuvem budícího proudu cívkou.

3.3 Optická vlákna

Optovláknové DTS (Distributed Temperature System) jsou unikátní systémy, které jsou schopny měřit teplotní i mechanicko-napěťový profil podél optického vlákna.

Optické vlákno si lze tedy představit nejen jako médium určené pro přenos dat, ale i jako senzor pro snímání neelektrických veličin, přičemž je využito veškerých předností, které optické vlákno nabízí. Mezi tyto výhody patří odolnost vůči elektromagnetickému záření, bezpečné použití v nebezpečných prostředích, odolnost vůči agresivnímu prostředí, okamžitá lokalizace změn teploty, tlaku, poruchy a událostí. Délka optického vlákna může být až do 10 km v případě DTS systémů využívajících stimulovaný Ramanův rozptyl.



Obr. 4: Optické vlákno – kontaktní místo

V případě nasazení optovláknového DTS do stavebního průmyslu je nutné mít na paměti 4 hlavní faktory, které ovlivňují měření. Jedná se především o délku trasy, prostorové rozlišení, teplotní rozlišení (mechanicko-napěťové rozlišení) a čas potřebný pro vykonání měření.

Optovláknové DTS jsou primárně určené pro kontinuální měření podél optického vlákna. V praxi existují případy, kdy nás zajímají změny teploty (mechanického napětí) v konkrétních místech, viz obr. 4. Proto je nutné kontrolovat mezní poloměr ohybu optického vlákna DTS, mezní vzdálenost mezi sousedními měřicími body a délku optického vlákna v jednom měřicím bodě.

3.4 Ochrana snímačů při betonáži

Užité snímače jsou běžně používány v laboratorních podmínkách, ale aplikace těchto citlivých snímačů do konstrukce je problematická. Kromě boje s vlhkostí je nutné zajistit dostatečnou mechanickou odolnost čidel při samotné betonáži, kdy jsou náchylné především kabely. Z fotografií na obr. 5 je zřejmé, že zvýšené nároky na ochranu snímačů jsou při betonáži ve venkovním prostředí oprávněné.



Obr. 5: Osazení měřícího pilíře do konstrukce

Strunové tenzometry jsou svou konstrukcí relativně dobře odolné proti vlhkosti a mechanickému poškození. Jednou ze slabín je právě kabel, který je většinou nutné prodloužit a tím vznikne další kritické místo, které je nutné chránit. Odolnost kabelů při betonáži byla zajišťována svázáním všech kabelů dohromady a následným přikotvením k výztuži po cca 50 cm.

Vysoce citlivé foliové tenzometry jsou náchylné na vlhkost a především na mechanické poškození. Jejich úprava před betonáží obsahovala několik vrstev laku (PU 140) a následné překrytí izolační hmotou (I-ABM75), viz obr. 6. Pro zajištění mechanické odolnosti kabelů, byly všechny kabely sepnuty do jednoho svazku.

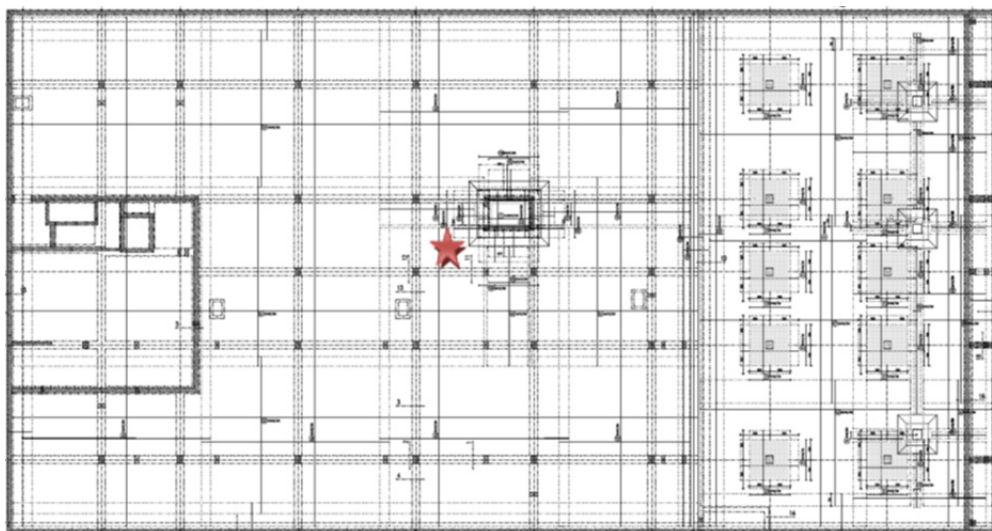


Obr. 6: Tenzometrický snímač s ochrannými prvky

Odolnost optického vlákna byla zajištěna přidáním optického vlákna mezi svazek kabelů ostatních snímačů. U těchto vláken je důležité zajistit dostatečný poloměr vláken při osazení snímacích svazků a také nepoškození bužírky kabelu nebo nadměrnému protažení.

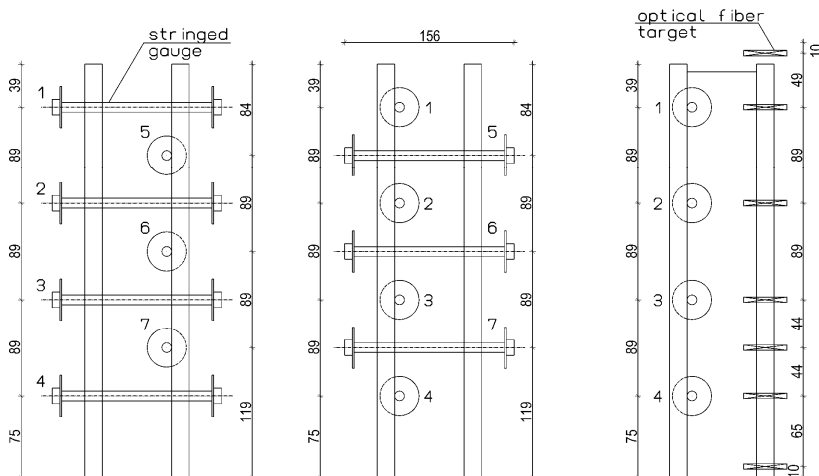
3.5 Postup měření

Získání vhodných dat pro další numerické analýzy je podmíněno výběrem ideálního místa pro osazení snímačů. S ohledem na vývoj napjatosti vlivem objemových změn betonu a tření v základové spáře byl vybrán prostor mezi žebry přibližně uprostřed železobetonové desky, viz obr. 7, tak aby při dotvarování a smršťování byly tyto jevy zachyceny snímači. Dalším kritériem bylo umístění snímačů v blízkosti výtahové šachty, tak aby bylo možné protažení kabelů nad úroveň čisté podlahy a tím bylo umožněno kontinuální měření nejen po celou dobu výstavby, ale také při provozu objektu.



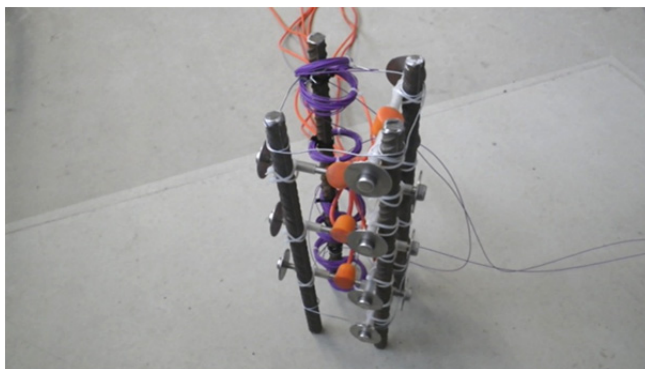
Obr. 7: Schéma základové desky a umístění čidel

Pro osazení plovoucích strunových tenzometrů bylo užito tzv. měřicího pilíře, který zajišťoval osazení snímačů do správné výškové úrovně a směru za současné spolehlivé fixace čidel při betonáži. Pilíř byl osazen celkem sedmi strunovými tenzometry a sedmi svazky optického vlákna, viz obr. 8 a 9.



Obr. 8: Schéma rozložení snímačů na měřícím pilíři

Kromě užitých optických vláken a strunových tenzometrů umístěných na měřícím pilíři byly instalovány také foliové tenzometry. Tyto snímače jsou umístěny na betonářské výztuži tak, aby zachycovaly změny napětí ve výztuži při horním a spodním okraji v obou hlavních směrech. Foliové tenzometry jsou na každém prutu zdvojeny z důvodu vysoké náchylnosti na poškození. Zapojení těchto snímačů je do „halfbridge“, tak aby tepelná kompenzace probíhala na měřeném prvku.

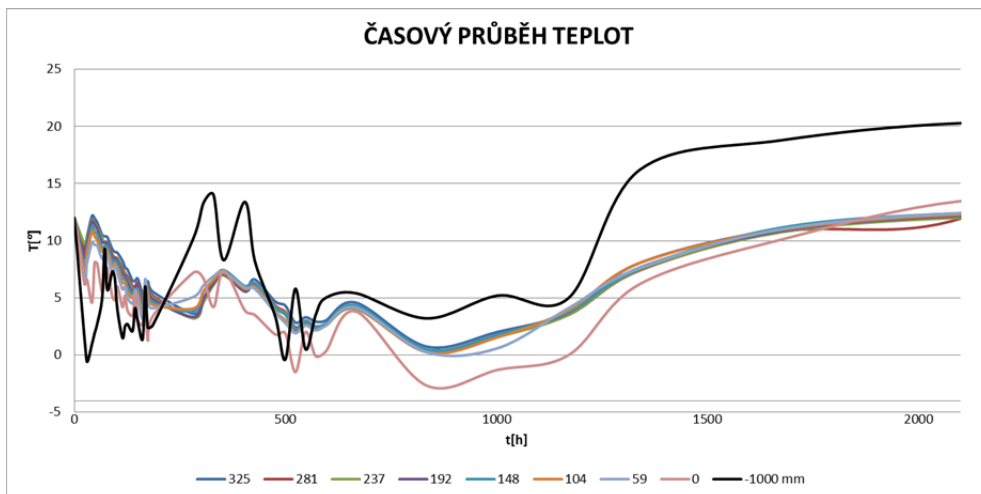


Obr. 9: Sestava měřícího pilíře osazeného do železobetonové desky

Všechny čidla byly osazeny do výztuže železobetonové desky a zajištěny proti mechanickému poškození během betonáže.

3.6 Naměřená data

Sledování teplot strunovými tenzometry bylo zahájeno s ohledem na nepřístupnost měřícího bodu až druhý den po betonáži. Změna teploty v betonové desce měla být od počátku betonáže sledována i optickým vláknem, které bylo vyvedeno mimo prostor betonáže. Při betonáži však vlivem zpracování betonové směsi došlo k mechanickému poškození kabelu o délce cca 60 m, tudíž nebylo možné pomocí optických vláken zaznamenat data popisující teplotu. Po dobu 14 dnů bylo prováděno 3× denně odečítání teplot ze strunových tenzometrů, současně byla měřena také teplota povrchu betonové desky a vnějšího prostředí pomocí bezkontaktního digitálního teploměru. V dalších 12 dnech probíhalo odečítání již jen 1× denně. Poslední intervaly odečítání teplot byly prováděny po 7 dnech.



Obr. 10: Průběh změny teploty v čase

Uvedený obr. č. 10 popisuje záznam jednotlivých čidel, jejichž výškové umístění je uvedeno v legendě a jsou seřazeny sestupně směrem od 0 dolů. Zelená křivka popisuje teplotu prostředí a je zřejmé, že především v první fázi tvrdnutí si beton i přes nízké až záporné teploty udržoval vlastní teplotu vlivem vývoje hydratačního tepla. Po ukončení hydratace docházelo také ke sblížení a ustálení teploty vnějšího prostředí a betonu.

3 ZÁVĚR

Experimentální ověření teoretických předpokladů změn napjatosti základových konstrukcí vlivem kolísání teplot vnějšího prostředí, vývoje hydratačního tepla a objemových změn betonu je nezbytné pro verifikaci navržených výpočetních modelů [2].



Obr. 11: Pohled na rozestavěný železobetonový objekt superpočítače IT4

Výsledky měření potvrdily teoretické výpočty [6] a příznivý vliv hydratace betonové směsi [3], [4], [5] na teplotu kluzných spár i v zimním období [5], [6]. Porovnáním naměřených a vypočtených napětí v betonu a výztuži umožní lépe pochopit chování základů bezprostředně po betonáži. Výsledky experimentu pak umožní snížit počet technologicky náročných smršťovacích

pruhů, které zpomalují postup stavebních prací. V současné době probíhá další vyhodnocování a porovnání experimentálně naměřených dat s numerickými modely nestacionárního teplotního pole včetně vývinu hydratačního tepla, viz [2] až [8]. V omezeném režimu se rovněž předpokládá měření po celou dobu výstavby a při provozu dokončeného objektu.

PODĚKOVÁNÍ

Príspevek byl realizován za finančního přispění MŠMT, podpora specifického vysokoškolského výzkumu Koncepčního rozvoje FAST VŠB-TU Ostrava v roce 2013 a částečného využití výsledků řešení projektu Ministerstva průmyslu a obchodu, program TIP projekt číslo FR-TI2/746 - Reologická kluzná spára s teplotně řízenými viskoelastickými vlastnostmi.

LITERATURA

- [1] CHU, I., LEE, Y., AMIN, M.N., JANG, B.-S., KIM, J.-K. Application of a thermal stress device for the prediction of stresses due to hydration heat in mass concrete structure (2013) *Construction and Building Materials*, 45, pp. 192-198, ISSN: 09500618, DOI: 10.1016/j.conbuildmat.2013.03.056.
- [2] ČAJKA, R. Teplotní účinky velkoplošných základových konstrukcí. *Beton a zdivo* 1-2/1993.
- [3] ČAJKA, R. Vývoj hydratačního tepla při betonáži základu komínu Elektrárny Dětmarovice. *Konference s mezinárodní účastí "Betonářské dny 2001"*, 28.-30. listopadu 2001 v Pardubicích, ISBN 80-238-7595-7.
- [4] ČAJKA, R. Napjatost železobetonových základových desek s ohledem na teplotu prostředí při betonáži. *Sborník XII. mezinárodního sympozia „Sanace 2002“*, 16. - 17. května 2002, Brno, ISSN 1211-3700.
- [5] ČAJKA, R., MATEČKOVÁ, P.: Temperature distribution of slide joint in reinforced concrete foundation structures. *17th International Conference on Engineering Mechanics 2011*, Svratka 9.5.-12.5. 2011. ISBN 978-80-87012-33-8, WOS: 000313492700017.
- [6] JANULÍKOVÁ, M., ČAJKA, R., MATEČKOVÁ, P., STARÁ, M. Modelování základových konstrukcí s kluznou spárou s využitím výsledků laboratorních zkoušek asfaltových pásů. *Sborník vědeckých prací Vysoké školy báňské – Technické univerzity Ostrava, řada stavební*. Ročník XII, 1/2012, ISSN 1213-1962.
- [7] CAJKA, R., Numerical Solution of Transient Temperature Field of Layered Plane Structures. *In Proceedings of the 3rd International Conference on Mathematical Models for Engineering Science (MMES'12)*, WSEAS Press, Paris, France, December 2-4, 2012, pp. 29-34, ISBN 978-1-61804-141-8.
- [8] FOJTÍK, R., NOVOTNÝ, T. Experimentální ověření numerických modelů konstrukce obručového ztužidla. *Modelování v mechanice 2012*. Ostrava 2012, ISBN 978-80-248-2694-3.
- [9] FOJTÍK, R., NOVOTNÝ, T. Nový ztužující systém vertikálních ocelových konstrukcí. *Sborník vědeckých prací Vysoké školy báňské – Technické univerzity Ostrava, řada stavební*. Ročník XII, 1/2012, ISSN 1213-1962.
- [10] HOFFMANN, K. *An Introduction to Measurements using Strain Gages*. Germany: Hottinger Baldwin Messtechnik GmbH, 1989.
- [11] IGNAČÁK, M., ŠOLTÉSZ, J. Vplyv hydratačného tepla na základové dosky v rannom štádiu. *In: Stavebné materiály*, Roč. 9, č. 1 (2013), ISSN 1336-7617.

Oponentní posudek vypracoval:

Doc. Ing. Július Šoltész, CSc., Katedra betónových konštrukcií a mostov, Stavebná fakulta, STU v Bratislave.

Doc. Ing. Miloš Zich, Ph.D., Ústav betonových a zděných konstrukcí, Fakulta stavební, VUT v Brně.

Martina JANULÍKOVÁ¹, Marie STARÁ²

VÍCEVRSTVÉ REOLOGICKÉ KLUZNÉ SPÁRY V ZÁKLADOVÝCH KONSTRUKCÍCH

MULTI-LAYER RHEOLOGICAL SLIDING JOINT IN THE FOUNDATION STRUCTURES

Abstrakt

Kluzné spáry jsou v praxi využívány pro zmírnění účinků smykových napětí v základové spáře. Tato napětí mohou mít svůj původ v podloží (vlivy poddolování) nebo mohou vznikat přímo v konstrukci (smršťování a dotvarování betonu, předpínání), přičemž kluzné spáry lze využít u obou těchto skupin. Pro vytvoření kluzné vrstvy mezi podložím a stavbou jsou ve většině případů využívány asfaltové pásy. Na stavební fakultě na VŠB TUO jsou již řadu let prováděny laboratorní zkoušky pro ověřování jejich chování při smykovém zatížení. Tento příspěvek se zabývá zkoušením vícevrstevných kluzných spár a vlivem zvýšení počtu pásů na snížení smykového odporu v kluzné spáře.

Klíčová slova

Kluzné spáry, asfaltový pás, poddolování.

Abstract

Sliding joints are often used to reduce effects of shear stresses in footing bottom. These stresses can be rooted in subsoil (effect of undermining) or they can arise in structure directly (shrinkage and creep of concrete, pre-stressing) and sliding joint can be used for both of them. The asphalt belts are used to create sliding layer between subsoil and construction in most of cases. The laboratory tests are carried out to verify their behavior by shear loads at the Faculty of Civil Engineering VSB TUO. This paper deals with testing multi-layer sliding joint and how the increasing number of belts influences reducing shear resistance in the sliding joint.

Keywords

Sliding joint, asphalt belt, undermining.

1 ÚVOD

Aby bylo možné v praxi co nejlépe využívat potenciál této metody, je nutné znát smykový odpor asfaltového pásu při známé rychlosti deformace (podloží či samotné konstrukce). Z tohoto důvodu je prováděna řada zkoušek pro ověření vlastností asfaltových pásů při horizontálním zatížení. Zajistit konstantní rychlost deformace asfaltového pásu by bylo problematické, a proto je při měření sledována rychlost deformace pro dané smykové napětí. S využitím naměřených hodnot pak lze u konkrétní konstrukce, kde bude kluzná spára aplikována, určit smykové napětí v kluzné spáře v závislosti na rychlosti deformace. Rychlost deformace stavby lze získat z báňských podmínek či modelů dotvarování a smršťování.

¹ Ing. Martina Janulíková, Katedra konstrukcí, Fakulta stavební, VŠB-Technická univerzita Ostrava, Ludvíka Poděště 1875/17, 708 33 Ostrava-Poruba, tel.: (+420) 597 321 925, e-mail: martina.janulikova@vsb.cz.

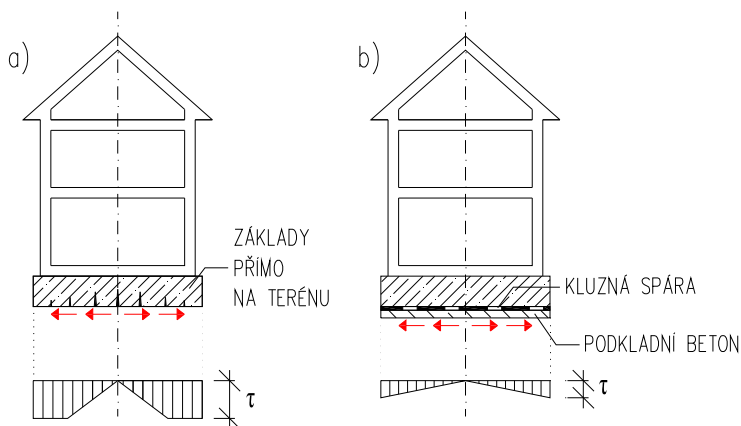
² Ing. Marie Stará, Katedra konstrukcí, Fakulta stavební, VŠB-Technická univerzita Ostrava, Ludvíka Poděště 1875/17, 708 33 Ostrava-Poruba, tel.: (+420) 597 321 394, e-mail: marie.stara@vsb.cz.

Základním předpokladem pro použití vícevrstvé reologické kluzné spáry je to, že kluzná spára pak může přenášet větší deformace v kluzné spáře a tím i větší snížení nepříznivých účinků třecích sil na konstrukci než v případě jednovrstvé kluzné spáry. V následující kapitole je obecně popsán základní princip zkoušek a prezentovány některé konkrétní výsledky z dosavadního měření vícevrstvé kluzné spáry.

2 STRUČNÝ POPIS LABORATORNÍCH ZKOUŠEK

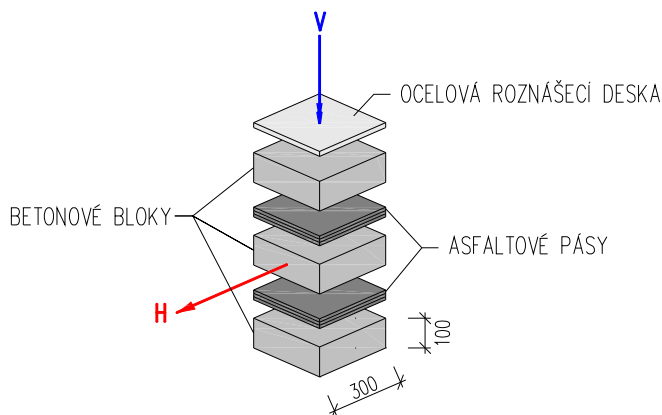
Cílem těchto zkoušek je simulovat chování asfaltových pásů, které tvoří kluznou spáru v základové konstrukci. Princip fungování kluzné spáry v konstrukci je znázorněn na obrázku 1.

Zkušební vzorek se skládá ze tří betonových bloků 300x300x100 mm a dvou kluzných spár mezi nimi (obrázek 2). Tyto kluzné spáry jsou vyplněny zkoušeným materiálem (ve většině případů byl zkoušen jeden volně ložený asfaltový pás; v tomto příspěvku však jsou prezentovány i první výsledky měření vícevrstvé kluzné spáry).



Obr. 1: Princip kluzné spáry v konstrukci

V první fázi je do zkušební vzorku (obrázek 2) vneseno svislé zatížení V představující zatížení horní stavbou a po 24 hodinách je prostřední blok zkušební vzorku zatížen horizontální silou H , jež vyvozuje konstantní smykové napětí v kluzných spárách mezi bloky a způsobuje vodorovnou deformaci prostředního betonového bloku. Právě tato deformace je při zkouškách sledována. Zkouška je většinou ukončena po 6 dnech od okamžiku vnesení horizontálního zatížení, kdy je také zpravidla dosažena konstantní rychlost posuvu.



Obr. 2: Zkušební vzorek

Pro vnášení svislých a vodorovných zatížení do zkušební vzorku byla použita ocelová konstrukce, která je zobrazena na obrázku 3.

Svislé zatížení je vyvozeno pomocí hydraulického lisu přes ocelovou roznášecí desku a vodorovné zatížení se vnáší pomocí koše se závažím, který je upevněn na prostřední betonový blok, přičemž dolní a horní betonový blok jsou pevně fixovány. Z důvodu zavedení vlivu teploty okolního prostředí bylo celé měřicí zařízení umístěno do klimatizační komory. Další informace k průběhu zkoušky a výsledky z dosavadních měření lze nalézt například v [1, 2, 3, 4].

Svislá napětí, která obvykle mohou vzniknout v základové spáře, jsou uvažovány v intervalu 100 až 500 kPa, přičemž s ohledem na časovou náročnost měření jsou zkoušeny mezní hodnoty 100 a 500 kPa. Vodorovná zatížení jsou zpravidla uvažována tak, aby rychlost deformace měřená na prostředním betonovém bloku řádově odpovídala rychlostem deformace na skutečné konstrukci, konkrétně byly zvoleny hodnoty smykových napětí 5,28 kPa a 11,1 kPa.

Každá sada měření se provádí nejméně pro dvě teploty (zpravidla 10°C a 20°C), celkem tedy minimálně 8 měření pro každý druh asfaltového pásu. Výsledky zkoušek lze také využít pro numerické modelování pomocí MKP [5-17]. Konkrétní příklad aplikace kluzné spáry v praxi lze pak nalézt například v [18,19].



Obr. 3: Ocelové zkušební zařízení

3 ZKOUŠENÍ VÍCEVRSTVÝCH KLUZNÝCH SPÁR

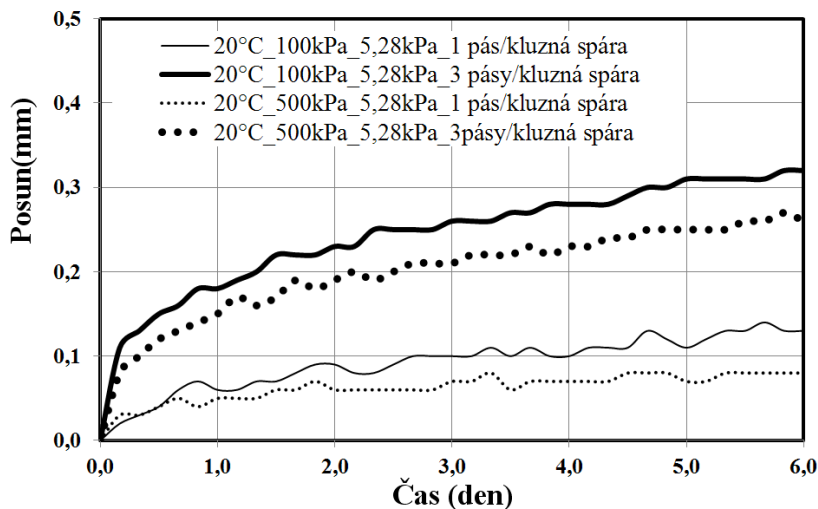
Myšlenka zkoušení vícevrstevných kluzných spár vychází z předpokladu násobně větších deformací v kluzné spáře při stejných hodnotách zkoušeného smykového napětí. To pak znamená i menší výsledné smykové napětí na kontaktních plochách konstrukce, kde bude vícevrstvá kluzná spára aplikována.

Princip samotné zkoušky je téměř totožný s klasicou zkouškou popisovanou v přechozích odstavcích. Betonové bloky mají sníženou výšku (90mm), aby se celý zkušební vzorek vešel do zkušebního zařízení. Další rozdíl je v počtu pásů umístěných mezi betonové bloky.

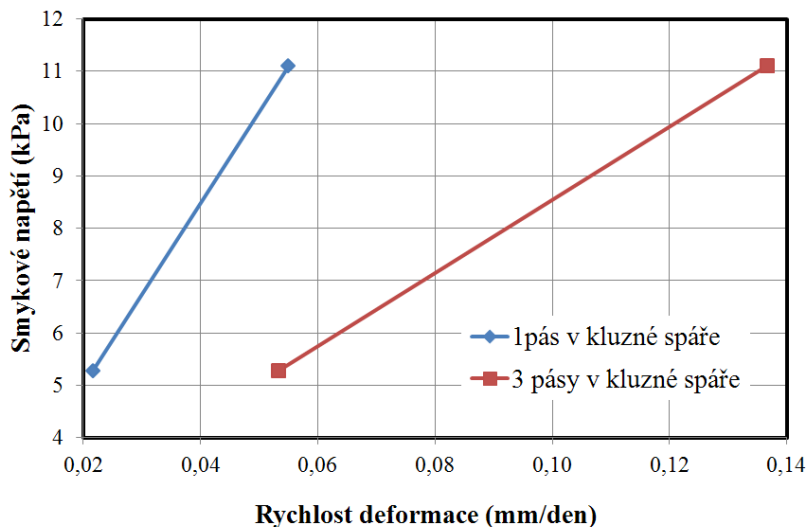
Pro první měření vícevrstvé kluzné spáry byl vybrán elastomerický modifikovaný asfaltový pás bez posypu s tloušťkou 3,4mm a hmotností 4,0kg/m², ke kterému již byla k dispozici základní sada měření s jednovrstvou kluznou spárou. V níže uváděných výsledcích byla každá kluzná spára vytvořena pomocí tří na sebe volně ložených čtverců daného asfaltového pásu o rozměrech 300x300mm.

3.1 Srovnání výsledků jednovrstvých a vícevrstvých kluzných spár

V grafu na obrázku 4 je zachyceno srovnání výsledných deformací v případě použití jednoho a tří stejných asfaltových pásů. V tomto případě se jedná o elastomerický modifikovaný asfaltový pás bez posypu s tloušťkou 3,4 mm a hmotností 4,0 kg/m². Z grafu je patrné, že předpoklad násobně větších deformací při použití více vrstev pásů byl logicky správný a více pásů v kluzné spáře má za následek i větší deformace a tím i menší smykový odpor.



Obr. 4: Srovnání celkových deformací pro jednovrstvou a třívrstvou kluznou spáru.



Obr. 5: Srovnání rychlostí deformace pro jednovrstvou a trojvrstvou kluznou spáru

Skutečný smykový odpor v základové spáře pro daný pás (popř. dané souvrství) lze pak pro konkrétní případy v praxi určit z grafu na obrázku 5 (pro elastomerický modifikovaný asfaltový pás s tloušťkou 3,4 mm a hmotností 4,0 kg/m², teplotu 20 °C a svislý tlak 100 kPa) a to v závislosti na

očekávané rychlosti přetváření terénu či očekávané rychlosti přetváření konstrukce, což jsou veličiny známé z báňských podmínek (v případě poddolování) či z modelových výpočtů smršťování či dotvarování betonu. Z grafu na obrázku 5 je rovněž zřejmé, jak je při stejném rozsahu smykového napětí (5,28 až 11,11 kPa) rozdílný rozsah vzniklých rychlostí deformace.

4 ZÁVĚR

Byly provedeny první měření kluzných spár vytvořených třemi asfaltovými pásy v jedné kluzné spáře. Dosavadní výsledky z měření ukazují, že zvětšením počtu pásů v kluzné spáře lze dosáhnout větších deformací a tím i menšího smykového napětí v kluzné spáře než při použití pouze jedné vrstvy asfaltového pásu. To by mohlo přispět ke snížení nežádoucích napětí mnohem výrazněji a tato metoda by mohla být využita i pro větší vodorovná namáhání než v případě jedné vrstvy. Aby bylo možno učinit další závěry o výhodách či nevýhodách použití vícevrstvých kluzných spár, je nutné provést další měření jak pro další druhy pásů, tak pro různé počty vrstev.

Vytvoření reologické kluzné spáry ve vícevrstvé variantě tak představuje možnost k ještě většímu snížení nepříjemných projevů horizontálních účinků zatížení (poddolování; dotvarování, smršťování betonu) než v případě klasické reologické kluzné spáry vytvořené z jedné vrstvy asfaltového pásu.

PODĚKOVÁNÍ

Tento příspěvek byl realizován za finanční podpory Ministerstva průmyslu a obchodu, program TIP projekt číslo FR-TI2/746 - Reologická kluzná spára s teplotně řízenými viskoelastickými vlastnostmi.

LITERATURA

- [1] ČAJKA, R. & JANULÍKOVÁ, M. & MATEČKOVÁ, P. & STARÁ, M.: Laboratorní testování asfaltových pásů s vlivem teploty. In *Sborník vědeckých prací Vysoké školy báňské – Technické univerzity Ostrava*, rok 2011, ročník XI, číslo 2, řada stavební, s. 15-21, ISSN 1213-1962.
- [2] JANULÍKOVÁ, M. & ČAJKA, R. & MATEČKOVÁ, P. & BUCHTA, V.: Laboratorní měření reologických vlastností asfaltových pásů při smykovém zatížení. In *Sborník vědeckých prací Vysoké školy báňské – Technické univerzity Ostrava*, rok 2012, ročník XII, číslo 2, řada stavební, s. 15-21, ISSN 1213-1962.
- [3] MAŇÁSEK, P.: *Základové konstrukce s kluznou spárou*. Disertační práce na Fakultě stavební VŠB-TU, Ostrava, 2008.
- [4] ČAJKA, R. & MATEČKOVÁ, P. & JANULÍKOVÁ, M. & STARÁ, M. & BURKOVIČ, K.: Time and temperature dependant behaviour of bituminous slide joints. In *Global Thinking in Structural Engineering: Recent Achievements*, Sharm El Sheikh, Egypt: International Assotiation for Bridge and Structural Engineering (IABSE), 2012.
- [5] ČAJKA, R. & JANULÍKOVÁ, M. & MATEČKOVÁ, P. & STARÁ, M.: Modelování základových konstrukcí s kluznou spárou s využitím výsledků laboratorních zkoušek asfaltových pásů. In *Sborník vědeckých prací Vysoké školy báňské – Technické univerzity Ostrava*, rok 2012, ročník XII, číslo 1, řada stavební, s. 1-6, ISSN 1213-1962.
- [6] ČAJKA, R. & MAŇÁSEK, P. Finite Element Analysis of a structure with a sliding joint affected by deformation loading. In *The eleventh International Conference on Civil, Structural and Environmental Engineering Computing*. 18-21.9. 2007, St. Julians, Malta, ISBN 978-1-905088-17-1.
- [7] ČAJKA, R. & MAŇÁSEK, P.: Numerical analysis of the foundation structures with sliding joint. In *Eleventh East Asia-Pacific Conference on Structural Engineering & Construction - Building a Sustainable Environment*, Taipei, Taiwan, 19. - 21.11. 2008. S. 716-717. Sborník příspěvků X. konference a CD, ISBN 978-986-80222-4-9.

- [8] JANULÍKOVÁ, M. & MATEČKOVÁ, P. & STARÁ, M.: Numerical modeling of foundation structures with sliding joints. In *The 9th fib International PhD Symposium in Civil Engineering*. Karlsruhe, Germany: Karlsruhe Institute of Technology (KIT), 2012.
- [9] ČAJKA, R.: Determination of Friction Parameters for Soil – Structure Interaction Tasks. Recent Researches in Environmental & Geological Sciences. Energy, Environmental and Structural Engineering Series No. 4, pp. 435-440. In *7th WSEAS International Conference on Continuum Mechanics (CM '12)*. Kos Island, Greece, July 14-17, 2012, ISSN 2227-4359, ISBN 978-1-61804-110-4.
- [10] ČAJKA, R. & MATEČKOVÁ, P.: Modelling of foundation structure with slide joint depending up the temperature. In *9th International Symposium on High Performance Concrete - Design, Verification & Utilization*. Rotorua, New Zealand, 2011, ISBN 978-0-473-19028-6.
- [11] CAJKA, R.: Accuracy of Stress Analysis Using Numerical Integration of Elastic Half-Space (2013), In *Applied Mechanics and Materials*, 300-301, pp. 1127-1135. Trans Tech Publications, Switzerland, ISSN: 16609336, ISBN: 978-303785651-2, DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMM.300-301.1127.
- [12] CAJKA, R. & FOJTIK, R.: Development of Temperature and Stress during Foundation Slab Concreting of National Supercomputer Centre IT4, In *Procedia Engineering*, Volume 65, 2013, Pages 230-235, ISSN 1877-7058, doi: 10.1016/j.proeng.2013.09.035.
- [13] CAJKA, R.: Horizontal Friction Parameters in Soil – Structure Interaction Tasks. In *Advanced Materials Research*, Vol. 818 (2013), pp 197-205, Trans Tech Publications, Switzerland, doi:10.4028/www.scientific.net/AMR.818.197.
- [14] CAJKA, R.: Analysis of Stress in Half-space using Jacobian of Transformation and Gauss Numerical Integration. In *Advanced Materials Research*, Vol. 818 (2013), pp 178-186, Trans Tech Publications, Switzerland, doi:10.4028/www.scientific.net/AMR.818.178.
- [15] CAJKA, R. & BURKOVIC, K. & BUCHTA, V.: Foundation Slab in Interaction with Subsoil. In *Advanced Materials Research*, Vols. 838-841, (2014), pp 375-380, Trans Tech Publications, Switzerland, doi:10.4028/www.scientific.net/AMR.838-841.375.
- [16] HYZL, P. & STEHLIK, D. & VARAUS, M. & ZDRALEK, P.: Experience with triaxial loading systems for the testing of road construction materials. In *7th International RILEM Symposium on Advanced Testing and Characterisation of Bituminous Materials*, May 27-29, 2009 Rhodes, Greece, WOS:000280392100087.
- [17] HYZL, P. & VARAUS, M. & STEHLIK, D.: The use of bituminous membranes and geosynthetics in the pavement construction (2012) In *RILEM Bookseries*, 4, pp. 1181-1188, ISSN: 22110844 ISBN: 978-940074565-0.
- [18] ČAJKA, R. & BURKOVÍČ, K. & GRUNDĚL, V.: Založení železobetonové konstrukce budovy Ostravské Univerzity ve složitých základových podmínkách. In *Betonářské dni 2012*, Bratislava.
- [19] MATEČKOVÁ, P. & JANULÍKOVÁ, M. & STARÁ, M.: Aplikace reologické kluzné spáry v základové konstrukci na poddolovaném území. In *19. betonářské dny*. Hradec Králové: Česká betonářská společnost (ČBS), 2012. ISBN 978-80-87158-32-6.

Oponentní posudek vypracoval:

Doc. Ing. Václav Cepek, CSc., Ostrava.

Doc. Ing. Petr Bouška, CSc., Oddělení experimentálních a měřících metod, Kloknerův ústav, ČVUT v Praze.

Jozef KŠIŇAN¹, Roman VODIČKA²

AN ENERGETIC APPROACH FOR INTERFACE DELAMINATION PROBLEM IN SLIDING MODE WITH COHESIVE OR ADHESIVE CONTACT

ENERGETICKÝ PRÍSTUP RIEŠENIA PROBLÉMU DELAMINÁCIE V ŠMYKOVOM MÓDE NA ROZHRAŇÍ S KOHÉZNYM A ADHÉZNYM KONTAKTOM

Abstract

A new interface delamination model of a layered structure is discussed. The concept of the solution is developed by the mathematical model of interface contact damage. The proposed numerical solution considers the rate independent evolution at small strain and the concept of the energetic solution. Applied energetic formulation governs the debonding process by means of two interface variables. Presented numerical example demonstrates its theoretical applicability of the whole solution approach in the engineering practise.

Keywords

Interface fracture, energetic formulation, sliding crack mode, alternating quadratic minimization, adhesive contact, cohesive contact, mathematical model, delamination process.

Abstrakt

V príspevku je popísaný nový model porušenia rozhrania viacvrstvovej štruktúry. Koncept riešenia predstavuje navrhnutý matematický model porušenia kontaktu na rozhraní. Navrhnuté numerické riešenie využíva rýchlostne nezávislý vývoj napätí a energetický koncept riešenia. Energetická formulácia riadi proces delaminácie prostredníctvom dvoch parametrov rozhrania. Prezentovaný príklad demonštruje teoretický prínos v oblasti aplikácie v inžinierskej praxi.

Kľúčové slová

Porušenie rozhrania, energetická formulácia, šmykový mód porušenia, algoritmus striedavej minimalizácie, adhézny kontakt, kohézny kontakt, matematický model, proces delaminácie.

1 INTRODUCTION

Recently, the analysis of crack propagation process has considerably influenced design and development of engineering constructions and materials. Therefore, considering the numerical approaches and developing of the mathematical models for solving the fracture problems enable its efficient applicability in engineering practice. The general objective of this study is the mutual comparison of the adhesive and cohesive contact model behaviour at the delamination process. Thus, the main motivation was to develop a useful numerical tool based on energetic principle and variational formulations. The interface as a zone of interest of this study is commonly represented by

¹ Ing. Jozef Kšiňan, Department of Structural Mechanics, Faculty of Civil Engineering, Technical University of Košice, Vysokoškolská 4, 042 00 Košice, Slovak Republic, phone: (+421) 55 602 4245, e-mail: jozef.ksinan@tuke.sk.

² Doc. Ing. Roman Vodička, PhD., Department of Applied Mathematics, Faculty of Civil Engineering, Technical University of Košice, Vysokoškolská 4, 042 00 Košice, Slovak Republic, phone: (+421) 55 602 4388, e-mail: roman.vodicka@tuke.sk.

a thin layer which can be partially or fully damaged. Such a process is frequently referred to as *delamination* [2]. The aforementioned failure mechanism is given by the crack initiation and propagation which occurs in an interface and depends on the applied load. The process of quasistatic evolution is motivated by *Griffith criterion*, see Section 4.1 [1], [5].

In this study, the numerical approach for investigation of the interface failure mechanism based on microscopic analysis and plasticity is discussed, see [8],[14]. The presented model of interface damage determines two active interface variables which conveniently describe a plasticity of the interface and its failure. First, a *damage parameter* ζ defines the level of rupture of the interface due to delamination. Second, a *plastic slip* π describes a plastic deformation that may appear in the interface tangent direction before the rupture of adjacent bulks as it is discussed in [4], [7], [10]. The presented contribution discusses the effect of crack propagation by means of comparison of analysed models with either type of contact, respectively in the sliding crack mode (Mode II).

The comprehensive mathematical solution was acquired by assuming the *variational methods* which suppose the equilibrium between energy stored in structure and energy which is dissipated from the system in consequence of delamination process [13], [15], [16]. The essential idea of this study is based on the hypothesis that the failure mechanism is governed by a time dependent Gibbs's *stored energy functional* E_S (involving the external loading) and *dissipation potential* R , which reflects the *rate-independence* of the process. Both of mentioned functionals are defined on suitable state space. We consider that R involves only ζ and π components of a state $q = (u, \zeta, \pi)$. Where u represents the *displacement* field, ζ expresses the *internal variable* of the damage process and π describes the influence of plastic slip, see [5], [15]. The frequent effect of numerical algorithms is the *non-convex character* of the total *energy functional* [5], [13], [15], [16]. Additionally, the functional has to be considered with constraints given by the character of the aforementioned variables π and ζ . Therefore, applying the special numerical treatment (*alternative minimization algorithm*), the expected quadratic character of the energy functional was obtained and it refers to *minimum dissipation-potential principle*. The obtained solution exploits the advantageous properties of *conjugate gradient algorithms* for minimizing procedure of non-convex total energy functional H [6]. The suggested approach has been applied and tested in MATLAB [11], see Section 6.

2 A CONCEPTUAL MODEL OF INTERFACE DAMAGE AND PLASTICITY

An essential concept of investigated layered structure has been defined by a planar domain $\Omega \subset R^2$ with a bounded *Lipschitz boundary* $\partial\Omega = \Gamma$. Considering its decomposition, we acquire two non-overlapping subdomains Ω^A and Ω^B with respective boundaries Γ^A and Γ^B , for simplification can be expressed in the form $\Gamma^\eta \eta = A, B$, see Fig. 1 [2], [3].

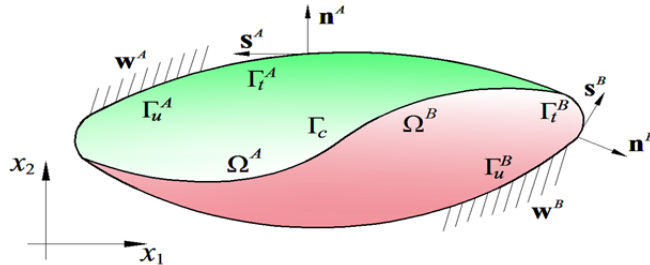


Fig. 1: Layered structure model for interface failure.

Consequently, let us denote the common part of subdomain boundaries Γ^η as an *interface* Γ_C hence $\Gamma_C = \partial\Omega^A \cap \partial\Omega^B$ which is usually represented by continuous spring distribution with *tangential* and *normal* elastic stiffnesses k_t and k_n [3]. The interface Γ_C represents a prescribed curve, which is the analysed area. On the smooth part of Γ , we can define the outward normal and

tangential vectors n^n and t^n [2]. On Γ_u^n we imposed time-dependent boundary displacements $w^n(\tau)$, while the remaining parts Γ_t^n are assumed to be traction free $t^n = 0$. On the Dirichlet part of the boundary Γ_u we apply a time-dependent boundary displacement $u^n(\tau)$ therefore, any admissible displacements u^n are equal to a prescribed *hard-device* $u^n(\tau)$ on Γ_u^n and they represent *the boundary conditions* [2], [5]. It is considered that the crack can be initiated and propagated along the interface Γ_C , this delamination process is assumed as rate-independent evolution, i.e. *no inertial time scale is considered*. Due to the delamination process, the material of the bonding layer is damaged and the interface is ruptured.

This failure mechanism is modelled by two interface parameters:

- *The scalar damage variable* $\zeta : \Gamma_C \rightarrow [1,0]$

This parameter has the meaning of the level of rupture interface: $\zeta(x) = 0$ has a meaning of a complete delamination at particular point and $\zeta(x) = 1$ corresponding to undamaged interface means 100 % perfect bonding [5].

- *The tangential plastic slip variable* π :

Considered at the interface and allows for a difference between crack *opening* and *sliding modes* in view of experimental observations of interface crack growth. The investigations confirm experimental observations that the *energy dissipated* from the system in sliding crack mode is significantly greater than in the opening mode. And moreover, corresponding plastic deformations of the structure are larger in sliding mode than in opening mode, see [8], [14].

3 ANALYSIS OF INTERFACE CONTACT MODEL

The study discusses a mathematical modelling of crack propagation along the interface in order to compare the failure process for adhesive and cohesive contacts, respectively. Both contacts were modelled numerically and consequently analysed and tested in MATLAB.

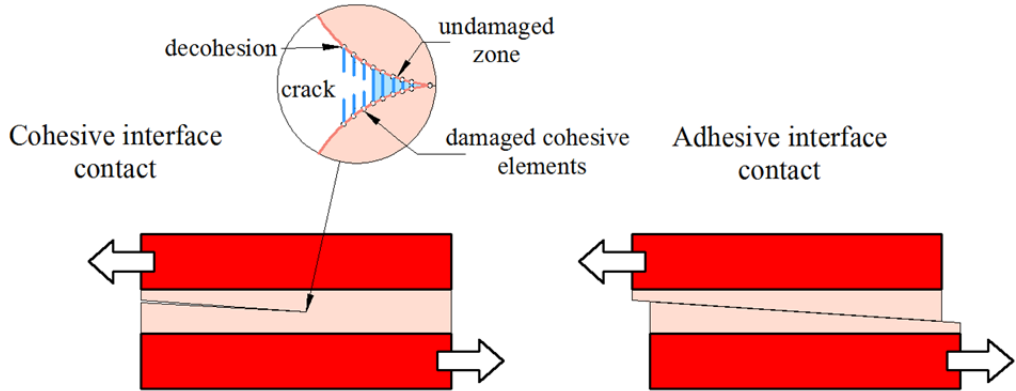


Fig. 2: Depiction of interface damage with cohesive and adhesive contact at the same loadstep λ_τ .

3.1 Adhesive-type contact interface model

The *adhesive-type contact*, see Fig. 3, yields a basic scenario which provides a discontinuous response of the *damage parameter* ζ and the *mechanical stress* σ in the form:

$$\sigma = \zeta k u, \quad (1)$$

with the stiffness parameter k and displacement u . The process starts from unstressed state. Applying the load, the stress linearly increases with u until the crack driving force $\sigma_d = \frac{1}{2} k u^2$ reaches the activation threshold G_d . Consequently the damage parameter ζ and also the mechanical stress σ change its values abruptly. In many practical aspects, the behaviour of adhesive contact can be modelled by a thin adhesive layer as a continuous elastic spring distribution with normal and tangential stiffness parameters. This layer is usually called *weak interface* [3], [5].

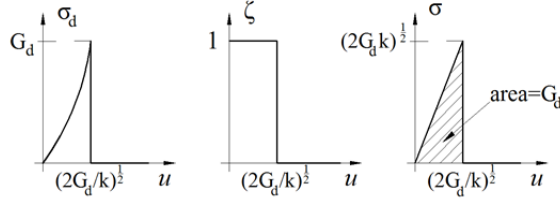


Fig. 3: Adhesive contact response of the crack driving force σ_d , the damage ζ and the stress σ .

σ_d - is a crack driving driving force [J/mm^2], ζ - is a interface damage parameter [-] and

σ - is a mechanical stress [MPa].

The linear response of the adhesive refers to the conception of the so-called *weak solution* given by the *energetic formulation*. These formulations are controlled by *stored energy* functional E_S and also *dissipation potential* R . The mathematical formulation of the energy approach of delamination with adhesive type contact is inducted in Section 4.

3.1 Cohesive-type contact interface model

Another possibility is to consider an engineering approach which supposes the continuous response of the mechanical stress σ . It is referred to as a **cohesive-type model**, see [5], [9], [12]. Assuming the cohesive-type contact requires some modifications in energy approach formulation of the aforementioned adhesive model. One effective option how to achieve the cohesive effect is to modify the *energy stored functional* E_S from the adhesive model, for more details, see Section 4.2 and also [2], [5]. The failure mechanism starts, when the mechanical stress σ , linearly increasing with u until the crack driving force σ_d , reaches activation threshold *fracture energy* G_d . Then ζ starts to evolve from one non-linearly until it arrives at zero [3], [5].

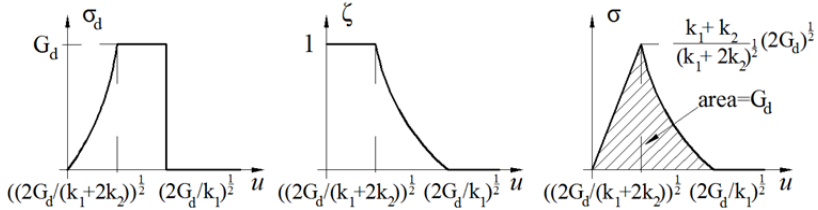


Fig. 4: Adhesive contact response of the crack driving force σ_d , the damage ζ and the stress σ , with denoted adhesive k_1 and cohesive k_2 stiffness parameters, respectively.

In consequence of modification in energy formulation, i.e. addition of the delamination term ζ^2 and cohesive stiffness parameter k_2 the mechanical stress decays as

$$\sigma = (k_1 \zeta + k_2 \zeta^2) u. \quad (2)$$

Discussed cohesive contact theory in Fig. 4 does not reflect the influence of the interface *plastic slip* π . This additional effect is included in energy formulation in sense of assuming Mode II [3]. The main feature of cohesive contact theory is that it is separately quadratic both in the u and ζ

variable. So we can conveniently apply *quadratic programming algorithms* for solving *global minimization problem*, see Section 4.2 and [2], [5].

4 MATHEMATICAL CONCEPT OF THE DELAMINATION PROCESS

This section reviews the mathematic formulations of the energetic conception of failure mechanism with both aforementioned defined contacts. The energetic solution is acquired by variational formulation (*Ritz method*), which exploit developed numerical treatment of inelastic process. This treatment has been evolved in accordance with energetic approaches.

4.1 Energetic formulation of interface contact model, Griffith concept

To define the energetic conception of the delamination contact problem, let us consider the *energy stored* (involving external loading) of the system at time τ , obeying the interface damage (Mode II) and a *kinematic-hardening-plasticity model*, with defined the *plastic slope* k_h [2]. The numerical analysis defines two following mathematical forms of stored energy functional E_S :

- **The adhesive contact formulation**

$$E_S(\tau, u, \zeta, \pi) = \sum_{\eta=A,B} \left[\int_{\Omega^\eta} \frac{1}{2} C_{ijkl}^\eta \varepsilon_{ij}(u^\eta) \varepsilon_{kl}(u^\eta) d\Omega + \int_{\Gamma_c} \left(\frac{1}{2} \zeta k_n [u]_n^2 + \frac{1}{2} \zeta k_t ([u]_t - \pi)^2 + \frac{1}{2} k_H \pi^2 \right) d\Gamma \right]. \quad (3)$$

- **The cohesive contact formulation**

In accordance with conception introduced in Section 3.2, we can adduce the modified formulation of the stored energy functional of adhesive model. In consequence of adding the cohesive contact parameters (see Section 3.1), acquiring required *non-linear dependence* of the investigated parameters [3], [5]. The following stored energy functional is obtained:

$$E_S(\tau, u, \zeta, \pi) = \sum_{\eta=A,B} \left[\int_{\Omega^\eta} \frac{1}{2} C_{ijkl}^\eta \varepsilon_{ij}(u^\eta) \varepsilon_{kl}(u^\eta) d\Omega + \int_{\Gamma_c} \left(\frac{1}{2} \zeta k_n [u]_n^2 + \frac{1}{2} (\zeta k_{h_1} + \zeta^2 k_{t_2}) ([u]_t - \pi)^2 + \frac{1}{2} k_H \pi^2 \right) d\Gamma \right]. \quad (4)$$

k_H – is the hardening stiffness [MPa/mm], u – are the displacements [mm],

π – is the plastic tangential deformation [mm], E_S – is a stored energy of the system [J].

The induced energetic formulation is assumed in the sense of *adhesive and cohesive contact theory* presented in [5], and it is valid for the state variables u , ζ satisfying:

- **The initial conditions**

$$u(0) = u_0, \quad \zeta(0) = \zeta_0, \quad \pi(0) = \pi_0. \quad (5)$$

- The condition of *Signorini unilateral contact* $[u]_n \geq 0$, where the *relative normal displacement* $[u]_n = (u^A - u^B) \cdot n^A$ is introduced.

- **The prescribed boundary conditions for displacements and tractions**

$$u^\eta = w^\eta(t) \text{ on } \Gamma_u^\eta, \quad t^\eta = 0. \quad (6)$$

The interface scalar *damage variable* ζ satisfies the constraints $0 \leq \zeta \leq 1$. The C_{ijkl}^η expresses the fourth-order tensor of elastic stiffness and ε_{ij} is a small tensor related to bulk displacements \mathbf{u} [2]. For activation of delamination the process requires a specific energy G_d [J/mm²]. The Dissipated energy (well known as a dissipation distance) is then

$$R(A_1, A_2) := \int_{A_2 \setminus A_1} G_d(x) dS \quad \text{if } A_1 \subset A_2 \subset \Gamma_C \quad (7)$$

In particular, the dissipated energy does not depend on particular modes. The philosophy of such quasistatic evolution is related with the Griffith criterion [1], [5], implying that the crack grows as soon as the energy release is bigger than the toughness, determined by G_d in (7) [1], [5]. The *dissipation potential* R can be defined by degree 1 positively homogeneous functional and reflects the rate-independence of the pertinent delamination variables [3].

$$R(\dot{\zeta}, \dot{\pi}) = \int_{\Gamma_C} \left(G_d |\dot{\zeta}| + \sigma_{yield} |\dot{\pi}| \right) d\Gamma \quad (8)$$

$\dot{\zeta}$ – is a partial derivative of the damage parameter according to time τ ,

$\dot{\pi}$ – is a partial derivative of the plasticity according to time τ ,

G_d – is a minimum interface fracture energy required to initiate a unit interface crack [J/mm^2],

σ_{yield} – is a yield shear stress [MPa], R – is a dissipated energy of the system [J].

We consider the evolution process in the fixed finite time interval $[0, T]$ [2]. The required energetic solution is a type of a *weak solution* and can be obtained by an implicit time discretization of (3), (4) and commonly acquired by solving the following *global-minimization problem*:

$$\text{minimize } (u, \zeta, \pi) \rightarrow E(\lambda \tau, u, \zeta, \pi) + R(\zeta - \zeta_\tau^{\lambda-1}, \pi - \pi_\tau^{\lambda-1}), \quad (9)$$

with respect to (u, ζ, π) and subjected to aforementioned conditions. The symbol λ defines the appropriate loadstep.

4.2 Mathematical model implementation for the interface failure by sliding slip

Essentially, the function v depends on time step τ such $v(\tau)$ is the function of x_1 . Anyhow, it can be prescribed by a gently changing function in order to consider the imperfections and to take it into account (changing of the thickness or of the bulk shapes) [2].

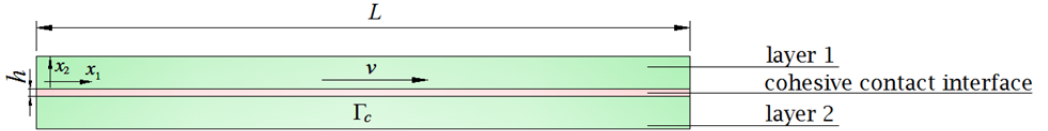


Fig. 5: Contact model for tangential loading by sliding slip.

In agreement with the conception initiated in [5], we can adduce the formulation of the stored energy as (3) or (4). Assuming the loading by sliding mode and considering both bulk layers rigid E_S , removes the dependence of the crack evolution on the bulk material properties [2]. Thus, we can suggest the reduced forms of the *stored energy functional* E_S from (3), (4), respectively as:

The adhesive type contact

$$E_S(\tau, u, \zeta, \pi) = \int_{\Gamma_C} \left(\frac{1}{2} \zeta k_t (v(\tau) - \pi)^2 + \frac{1}{2} k_H \pi^2 \right) d\Gamma. \quad (10)$$

The cohesive type contact

$$E_S(\tau, u, \zeta, \pi) = \int_{\Gamma_C} \left(\frac{1}{2} (\zeta k_{t_1} + \zeta^2 k_{t_2}) (v(\tau) - \pi)^2 + \frac{1}{2} k_H \pi^2 \right) d\Gamma. \quad (11)$$

5 COMPUTER IMPLEMENTATION OF THE CONTACT MODEL

To achieve the energetic solution, the numerical implementation commonly requires *time* and *spatial discretization*, separately in consecutive form.

- **The time discretization** considers the equidistant partition of $[0, T]$ and provides the solution at time steps defined by an increment δ , $\delta > 0$ thus $\tau_\lambda = \lambda\delta$ for $\lambda = 1, 2, \dots, T/\delta$, starting from the initial conditions (5).
- **The spatial discretization**, also needed for the computer implementation, exploits the choice of *finite elements* for u and ζ on the boundary Γ_C .

For the explanation of discretization process in both models, see [2],[3]. The minimization problem (8) then provides the solution at the successive time steps defined by the parameter λ as

$$\text{minimize } H^\lambda(\zeta, \pi) = E_s(\lambda\delta, u, \zeta, \pi) + R(\zeta - \zeta^{\lambda-1}, \pi - \pi^{\lambda-1}). \quad (12)$$

Indeed, the functional H^λ is non-convex, so it requires applying a special numerical treatment in the minimization process. By *Alternative Minimization Algorithm* (AMA), we achieved to split the minimization to alternation between minimization with respect to both interface variables. Each of these being a minimization of a convex quadratic functional, so the *quadratic programming methods* can be applicable properly [3], [6]. For more detail see [2], [16]. The code of the applied algorithm (AMA) was implemented in MATLAB [11]. The convexity of both acquired quadratic functionals effectively enables to exploit bound constrained minimization methods (conjugate gradient method (CGM) with constraints) for reaching the global minimum. The *Polyak's algorithm* was used as an appropriate CGM for minimization procedure [2].

6 NUMERICAL EXAMPLE OF THE INTERFACE CONTACT MODEL

6.1 Description of assumed contact model properties

The aforementioned simplified case of the interface contact model (see Section 4.2) with defined both types of contact have been subjected to numerical analysis in MATLAB. The investigated unknown interface variables (damage ζ^λ , plastic slip π^λ) remain along the interface for each load step λ [2]. The loading of the layered structure is considered along the interface in the sense of Section 4.2, and it is prescribed by slightly changing tangential displacements $v(\lambda\delta) = v_\lambda$ as

$$v_\lambda(x_1) = \sin \lambda\pi / 50 (1 + 5 \sin(\pi x_1)) v_0, \quad (13)$$

with $v_0 = 0.002\text{mm}$ and *Ludolf's constant* π . The prescribed tangential displacements $v_\lambda = (x_1)$ govern the whole loading process for each of loadsteps $\zeta = 100$ by prescribed *sin-function* v for a period, see [2]. The material of the interface is epoxy resin, with following elastic properties: Young's modulus $E = 2.4 \times 10^3 \text{MPa}$, Poisson's ratio $\nu = 0.33$. The length of interface layer is $l = 1000 \text{mm}$ and we consider layer thickness $h = 0.2 \text{mm}$. The corresponding stiffness parameters were suggested according to the assumed model:

- For the *adhesive contact model* was considered $k_a = 4.5 \times 10^3 \text{MPamm}^{-1}$.
- For the *cohesive contact model* we split the stiffness into two parts: $k_c = k_{t_1} + k_{t_2}$, $k_{t_1} = 0.45 \times 10^3 \text{MPamm}^{-1}$, $k_{t_2} = 4.05 \times 10^3 \text{MPamm}^{-1}$. For more parameter detail see [10].

The essential parameters that govern the crack propagation in the interface are: *the elastic brittle fracture energy* $G_d = 10^{-2} \text{mJmm}^{-2}$, *plastic yield stress* $\sigma_{yield} = 5.3 \text{MPa}$, *hardening slope for plastic slip* is $k_H = 5 \times 10^2 \text{MPamm}^{-1}$ [2],[10].

6.2 Results of the analysis of the interface rupture by sliding slip

The energy evolution process

The energy evolution of the delamination process for both analysed models is shown in Fig. 6 and Fig. 7. The presented three curves depict: the *energy stored* in the interface, *dissipated energy* due to plastic deformation and rupture of the interface and the *total energy* which is the sum of

previous components [3]. The non-monotone behaviour of the total energy was acquired in consequence of loading and unloading process by λ -dependent *sin function* of (12), see also [2], [3].

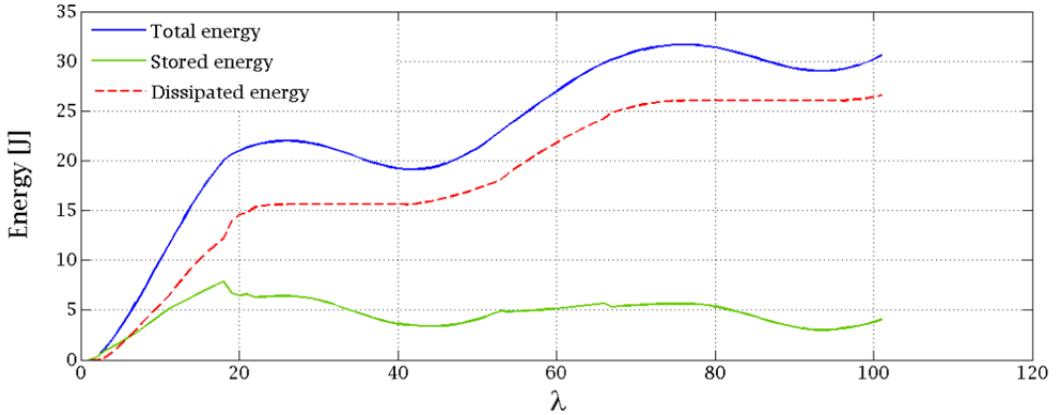


Fig. 6: Energy evolution of crack propagation at the adhesive contact model.

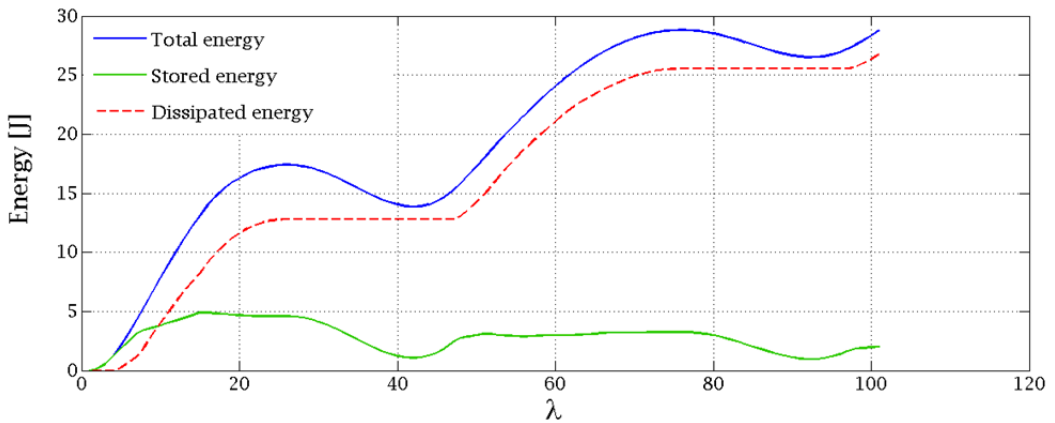


Fig. 7: Energy evolution of crack propagation at the cohesive contact model.

The evolution of the interface variables

The achieved solution of model behaviour is depicted in following figures. The initiation and propagation of the interface crack can be conspicuous in all the graphs. The main feature occurred in the graphs pertinent to the cohesive model is the continuous non-linear. It can be obviously observed the difference between coherency response of the interface variables in adhesive and cohesive model [2], [3]. So in agreement with consequent graphs let us observe that the damage parameter ζ changes from one to zero abruptly for adhesive model, while for the cohesive more or less continuously, see Fig. 8. The plastic deformation remains constant after the initiation of the crack, Fig. 10. The parts of the undamaged interface layer still hold two rigid bulks together, as it can be evidently observed in Fig. 9 and Fig. 10.

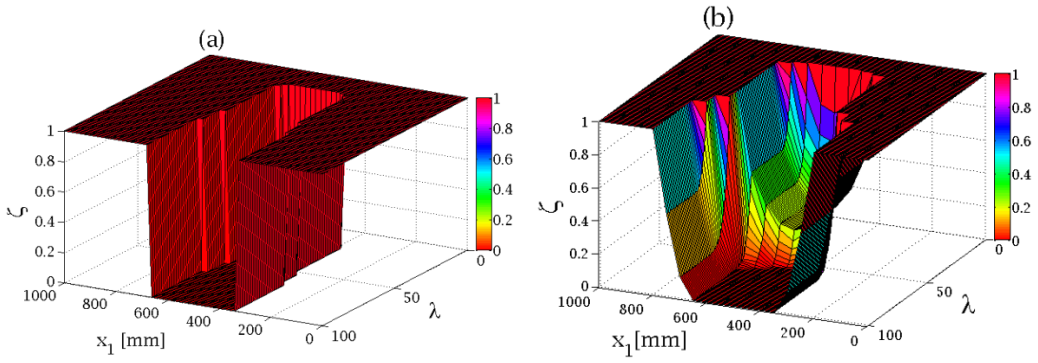


Fig. 8: The damage parameter ζ (a) adhesive model, (b) cohesive model.

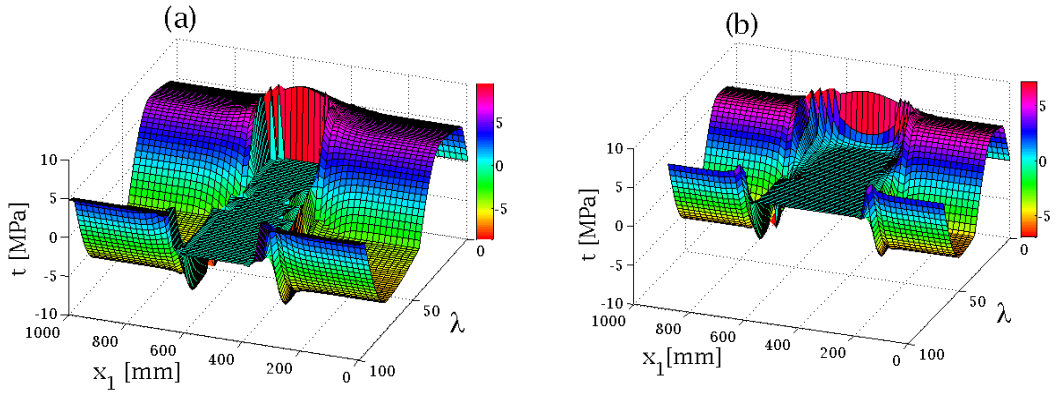


Fig. 9: The mechanical stress (a) adhesive model, (b) cohesive model.

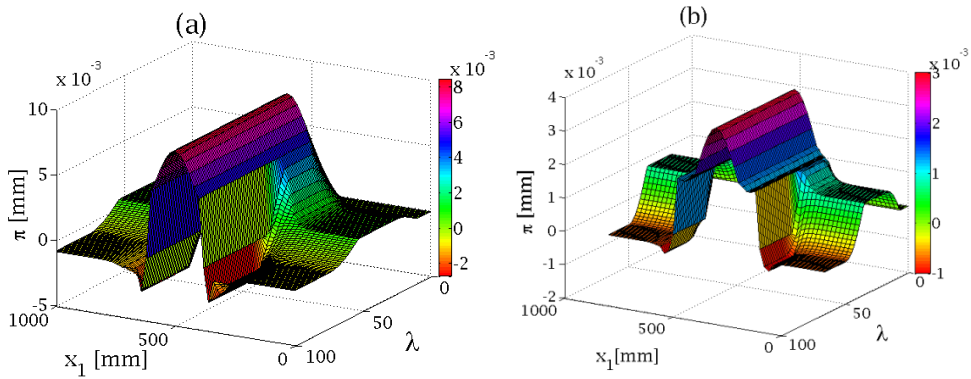


Fig. 10: The plastic slip π (a) adhesive model, (b) cohesive model.

7 CONCLUSIONS

The published study presents the comparison of the model response with adhesive and cohesive type contact. The investigated models yield a sensitive approach to the crack mode which has been reached by considering the interface contact by two interface variables. The proposed cohesive-type contact provides in many situations a more realistic behaviour than the adhesive and was acquired by mere adding of a new delamination term. The proposed numerical models confirm the expected response in accordance with the applied theory and enable its applicability in many aspects of engineering practise.

ACKNOWLEDGMENT

The authors acknowledge the financial support from the Grant Agency of Slovak Republic. The project registration number is VEGA 1/0201/11.

REFERENCES

- [1] A.A. GRIFFITH, The phenomena of rupture and flow in solids. 221. *Philos. Trans. Royal Soc. London Ser. A. Math. Phys. Eng. Sci.*, 1921, pp. 163-198.
- [2] R. VODIČKA, An energetic Approach for Numerical Analysis of an Interface crack in Shearing Mode. SSP-Journal of civil engineering. Košice, Slovakia: Versita, Technical University of Košice, 2012, Vol.7, Issue.2, pp. 87-98. ISSN 1338-7278.
- [3] J. KŠIŇAN, R. VODIČKA, An energetic approach for numerical analysis of an interface crack with cohesive contact. *Young Scientist 2013*, Herľany: Technical University of Košice, 2013. ISBN 978-80-553-1305-4.
- [4] J. BESSON, G. CAILLETAUD, J.L. CHABOCHE, S. FOREST, *Non-linear Mechanics of Materials*. 167. Dordrecht: Springer, 2010. ISBN 978-90-481-3355-0.
- [5] T. ROUBÍČEK, M. KRUŽÍK, J. ZEMAN, Delamination and adhesive contact models and their mathematical analysis and numerical treatment. In V. Mantič, editor *Mathematical Methods and Models in Composites*. Imperial College Press, 2013, pp. 349-400. ISBN 978-1-84816-784-1.
- [6] Z. DOSTÁL, *Optimal Quadratic Programming Algorithms*. 23. Optimization and Its Applications, Berlin: Springer, 2009. ISBN 978-0-387-84805-1.
- [7] R. VODIČKA, V. MANTIČ, An SGBEM implementation of an energetic approach for mixed mode delamination. In: *Advances in Boundary Element & Meshless Techniques XIII*, Eastleigh, England: EC, Ltd. XIII, 2012, pp. 319-324.
- [8] K. LIECHTI, Y. CHAI, Asymmetric shielding in interfacial fracture under in-plane shear. *J. Appl. Mech.*, 1992, Vol. 59, pp. 295-304.
- [9] L. TÁVARA, Damage initiation and propagation in composite materials. Boundary element analysis using weak interface and cohesive zone models. *PhD. Thesis, Universidad de Sevilla, Escuela Superior de Ingenieros*, Seville, 2010.
- [10] L. TÁVARA, V. MANTIČ, E. GRACIANI, F. PARÍS, BEM analysis of crack onset and propagation along fibre-matrix interface under transverse tension using a linear elastic-brittle interface model. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2011, Vol.35, pp. 207-222.
- [11] MATLAB V 7.13.0.564. The MathWorks, Inc.
- [12] F. CHENGYE, P.Y. BEN JAR, J.J. ROGER CHENG, Cohesive zone with continuum damage properties for simulation of delamination development in fibre composites and failure of adhesive joints. *Eng. Frac. Mech.*, Elsevier Ltd., 2008, Vol. 75, Issue.13, pp. 3866-3880.
- [13] T. ROUBÍČEK, *Nonlinear Partial Differential Equations with applications*. 153. Basel: Birkhäuser, 2004. ISBN 3-7643-7293-1.
- [14] W. TVEEGARD, J. HUTCHINSON, The influence of plasticity on mixed mode interface toughness. *Int. J. Physics of Solids*, 1993, Vol. 41, pp. 1119-1135.
- [15] A. MIELKE, F. THEIL, Mathematical model for rate-independent phase transformations with hysteresis. *Nonl. Diff. Eqns. Appl.*, 2004, Vol. 11, pp. 151-189.
- [16] B. BOURDIN, A. FRANCFORT, J.J. MARIGO, *The Variational Approach to Fracture*. Berlin: Springer, 2008. ISBN 978-1-4020-6394-7.

Reviewers:

Ing. Stanislav Seitl, Ph.D., Institute of Physics of Materials ASCR, v.v.i. Brno.

Ing. Veselý Václav, Ph.D., Faculty of Civil Engineering, VŠB-Technical University of Ostrava.

Jana LABUDKOVÁ¹, Pavlína MATEČKOVÁ²

VÝPOČETNÍ PROGRAM PRO ANALÝZU KRUHOVÝCH A MEZIKRUHOVÝCH ROTAČNĚ SYMETRICKY ZATÍŽENÝCH ŽELEZOBETONOVÝCH DESEK

SOFTWARE FOR ANALYSIS OF ROTATIONALLY SYMMETRICALLY ANNULAR AND CIRCULAR REINFORCED CONCRETE SLABS

Abstrakt

Cílem práce bylo vytvořit univerzální program pro vyztužování železobetonových mezikruhových a kruhových desek v radiálním a tangenciálním směru. Program slouží k navrhování a posuzování libovolně uložených rotačně symetrických železobetonových mezikruhových a kruhových desek jakéhokoli rozpětí. Na základě volby uživatele, program navrhne řešení tak, aby vyhovělo nejen všem konstrukčním zásadám, ale především meznímu stavu únosnosti a meznímu stavu použitelnosti.

Klíčová slova

Mezikruhová deska, kruhová deska, radiální výztuž, tangenciální výztuž, mezní stav únosnosti, mezní stav použitelnosti.

Abstract

The aim of this work was to create a complex computer program for reinforced concrete annular and circular slabs reinforced in the radial and tangential direction. The program can be used for design and assessment of annular and circular reinforced concrete slabs with various supports and span. Based on user's choice, the program proposes solutions to not only meet all the detailing rules keeping, but especially ultimate limit state and serviceability limit state.

Keywords

Annular slab, circular slab, radial reinforcement, tangential reinforcement, ultimate limit state, serviceability limit state.

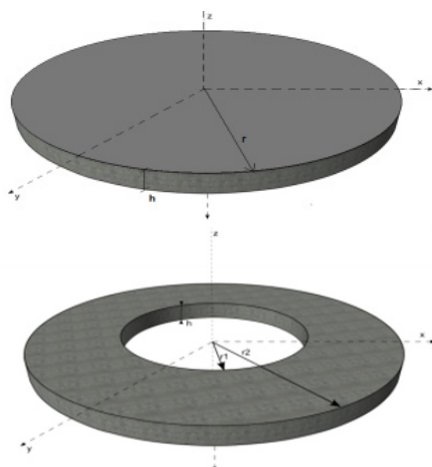
1 ÚVOD

V dnešní době se ve stavební praxi setkáváme i s objekty kruhového půdorysného tvaru. Jejich střešní či stropní konstrukce pak mohou tvořit kruhové a mezikruhové desky (obr. 1). Takové železobetonové kruhové a mezikruhové desky jsou horizontálně nosné a zatížené i podepřené kolmo na svou střednicovou rovinu. Jedná se o plošné konstrukce válcového typu, jejichž tloušťka je řádově menší než jejich průměr, popřípadě šířka mezikruží. Výsledný uživatelský program byl vytvořen v MS Excel 2007, který je běžně přístupný. Vytvořený program slouží k navrhování a následnému posuzování výztuže v železobetonových deskách mezikruhového i kruhového tvaru.

¹ Bc. Jana Labudková, Katedra konstrukcí, Fakulta stavební, VŠB-Technická univerzita Ostrava, Ludvíka Podéště 1875/17, 708 33 Ostrava-Poruba, e-mail: jana.labudkova@vsb.cz.

² Ing. Pavlína Matečková, Ph.D., Katedra konstrukcí, Fakulta stavební, VŠB-Technická univerzita Ostrava, Ludvíka Podéště 1875/17, 708 33 Ostrava-Poruba, tel.: (+420) 597 321 394, e-mail: pavlina.mateckova@vsb.cz.

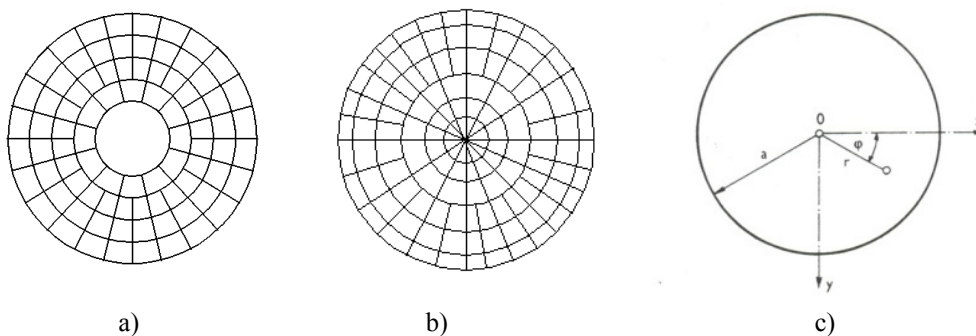
Navržená konstrukce je v programu posuzována dle mezního stavu únosnosti i použitelnosti a zároveň je programem automaticky zkontrolováno dodržení všech konstrukčních zásad.



Obr. 1: Model konstrukce mezikruhového a kruhového tvaru

2 ZÁKLADNÍ PŘEDPOKLADY STATICKÉ ANALÝZY

Pokud se jedná o zatížení, je uvažováno s působením plošného statického silového rovnoměrného zatížení, které je rotačně symetrické a působí kolmo na rovinnou střednicovou plochu desky. Po zadání rozměrů konstrukce je ověřeno, zda jsou splněny podmínky Kirchhoffovy teorie tenkých desek, na jejímž základě je program vytvořen. Nezbytným předpokladem pro správné fungování programu je, že výztuž bude kladena v radiálním a tangenciálním směru. (viz obr. 2a, 2b).



Obr. 2: Způsob vyztužení konstrukce a souřadnicový systém

Při řešení je využito válcových souřadnic. V půdorysu je poloha určena polárními souřadnicemi r a φ , ve válcových souřadnicích přibývá ještě souřadnice z . (viz obr. 2c).

3 VYTVOŘENÝ PROGRAM

Program je vytvořen pro osm různých způsobů rotačně symetrického podepření mezikruhových desek a čtyři různé způsoby rotačně symetrického podepření kruhových desek. Součástí programu jsou i kruhové desky, podepřené na svém okraji a navíc sloupelem v ose rotace. (viz níže - obr. 4,5).

Uživatelské prostředí programu je rozděleno na dvě části. V první části program provede statickou analýzu kruhových i mezikruhových desek a následně řeší rovnice desky v polárních souřadnicích pro všechny typy podepření takových konstrukcí. Obecný tvar deskové rovnice mezikruhových a kruhových desek je:

$$w(r) = w_0(r) + C_1 + C_2 r^2 + C_3 \ln r + C_4 r^2 \ln r \quad (1)$$

kde:

$w_0(r)$ – je partikulární integrál základní rovnice, který závisí na zatížení. Pro rovnoměrné spojitě zatížení platí:

$$w_0(r) = \frac{pr^4}{64D} \quad (2)$$

kde :

r – poloměr desky

p – rovnoměrné spojitě zatížení

D – desková tuhost

C_1, C_2, C_3, C_4 – integrační konstanty, které se určí z okrajových podmínek uložení desky

V případě, kdy se jedná o plnou kruhovou desku, musí z fyzikálního hlediska platit C_3 i $C_4 = 0$ a desková rovnice kruhových desek má tedy tvar:

$$w(r) = w_0(r) + C_1 + C_2 r^2 \quad (3)$$

Důvodem je, že plná kruhová deska nemá žádný vnitřní okraj, který je nahrazen středem desky. Nemá-li být průhyb uprostřed desky neomezeně velký, musí být $C_3 = 0$. Není-li střed zatížen osamělým břemenem (popřípadě bodově podepřen sloupem), musí platit také $C_4 = 0$, aby nerostla neomezeně posouvající síla q_r . [2]

Program řeší také plné kruhové desky ve středu podepřené sloupem, které jsou řešeny rozdělením na dva zatěžovací stavy. Pro toto statické schéma, kdy je deska podepřena kromě svého okraje také ve středu rotace, se tedy pracuje s následujícími tvary deskové rovnice kruhové desky:

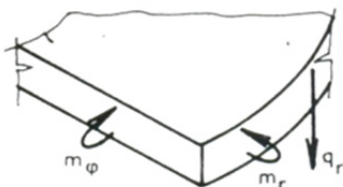
Pro 1. zatěžovací stav:

$$w_1(r) = w_0(r) + C_{11} + C_{21} r^2 \quad (4)$$

Pro 2. zatěžovací stav:

$$w_2(r) = C_{12} + C_{22} r^2 + C_{42} r^2 \ln r \quad (5)$$


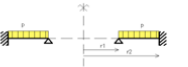




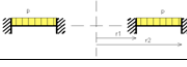

Postupnými matematickými úpravami deskové rovnice mezikruhových a kruhových desek byly získány a následně využity rovnice průhybů, průběhů napětí a vnitřních sil pro všechny typy uložení desek. Vnitřními silami jsou měrné ohybové momenty radiální i tangenciální a měrná posouvající síla (viz obr. 3).



Obr. 3: Nenulové měrné vnitřní síly [8]


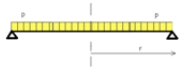
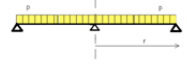
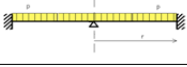
Vzhledem k tomu, že rovnice mezikruhové desky obsahuje čtyři integrační konstanty, je při řešení konkrétní úlohy potřebné sestavit rovnice pro dvě okrajové podmínky na obou okrajích desky

(vnějším i vnitřním). Okrajové podmínky pro jednotlivé typy uložení mezikruhových desek jsou vypsány v tabulce (viz obr. 4).

Číslo varianty a typ uložení	Okrajové podmínky		Číslo varianty a typ uložení	Okrajové podmínky	
	Vnitřní okraj	Vnější okraj		Vnitřní okraj	Vnější okraj
5 	$m_r=0$ $q_r=0$	$w=0$ $w'=0$	1 	$w=0$ $m_r=0$	$w=0$ $w'=0$
6 	$w=0$ $w'=0$	$m_r=0$ $q_r=0$	2 	$m_r=0$ $q_r=0$	$w=0$ $m_r=0$
7 	$w=0$ $m_r=0$	$w=0$ $m_r=0$	3 	$w=0$ $w'=0$	$w=0$ $m_r=0$
8 	$w=0$ $w'=0$	$w=0$ $w'=0$	4 	$w=0$ $m_r=0$	$m_r=0$ $q_r=0$

Obr. 4: Způsob uložení mezikruhové desky a okrajové podmínky

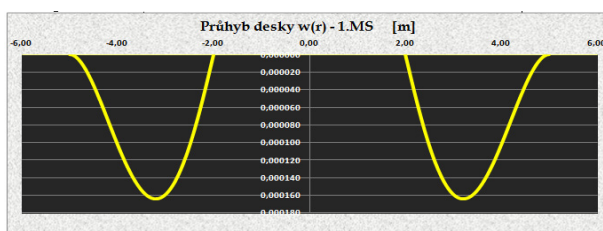
Rovnice kruhové desky obsahuje dvě integrační konstanty. Pro její řešení je potřebné sestavit rovnice pro dvě okrajové podmínky na okraji desky. Okrajové podmínky pro jednotlivé typy uložení kruhových desek jsou vypsány v tabulce (viz obr. 5).

Číslo varianty a typ uložení	Okrajové podmínky
9 	$w=0$ $w'=0$
10 	$w=0$ $m_r=0$
11 	$w_1=0$ $w_2=0$ $m_{r1}=0$ $m_{r2}=0$
12 	$w_1=0$ $w_2=0$ $m_{r1}=0$ $w'_2=0$

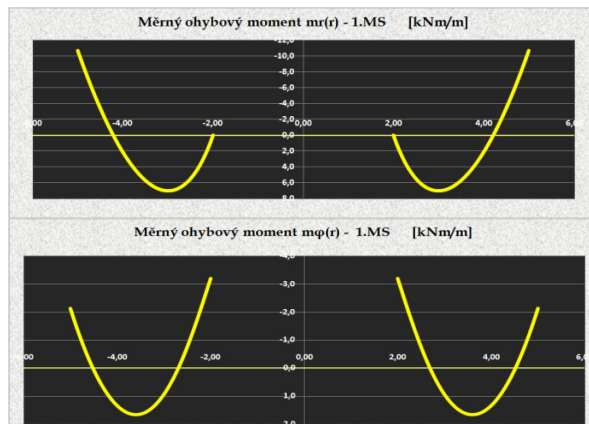
Obr. 5: Způsob uložení kruhové desky a okrajové podmínky

Ve druhé části je na problematiku nahlíženo v souvislosti s principy používanými při navrhování a posuzování betonových konstrukcí včetně dodržení konstrukčních zásad.

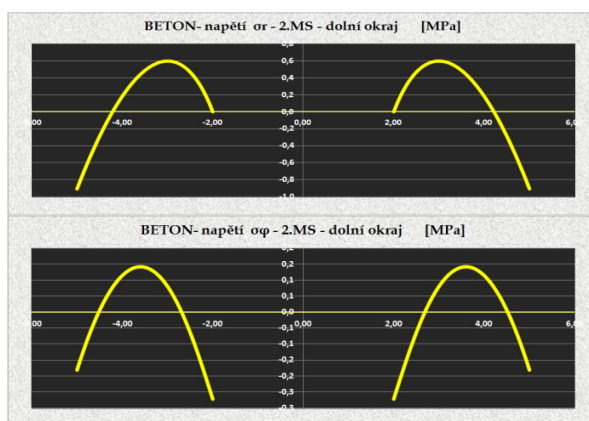
Při vzájemném propojení obou hlavních částí byl vytvořen program v MS Excel, jehož výstupem jsou graficky znázorněné průhyby (viz obr. 6) a průběhy vnitřních sil (viz obr. 7) potřebné k návrhu železobetonové konstrukce. Součástí výstupu je také grafické znázornění průběhů napětí v betonovém průřezu (viz obr. 8).



Obr. 6: Ukázkové vykreslení průhybu mezikruhové desky



Obr. 7: Ukázkové vykreslení měrných ohybových momentů mezikruhové desky



Obr. 8: Ukázkové vykreslení napětí mezikruhové desky

Dále může uživatel přistoupit k fázi navrhování železobetonové mezikruhové nebo kruhové desky. Pro navržení radiální a tangenciální betonářské výztuže jsou zapotřebí extrémní hodnoty příslušných momentů, které se v programu pro přehlednost vypíší do tabulky. K těmto extrémům se přiřadí hodnota poloměru v místě, kde se daný extrém nachází. V tabulce lze také nalézt maximální napětí v krajních vláknech betonu. (viz obr. 9).

MAXIMÁLNÍ MOMENTY - (PRO NÁVRHOVÉ HODNOTY ZATÍŽENÍ)			
1) RADIÁLNÍ		2) TANGENCIÁLNÍ	
hodnota poloměru	MAX $m_r(r)$	hodnota poloměru	MAX $m_\phi(r)$
pro maximální $m_r(r)$ [m]	[kNm/m]	pro maximální $m_\phi(r)$ [m]	[kNm/m]
5,00	-10,630	2,00	-3,191
2,99	6,995	3,60	1,660
MAXIMÁLNÍ NAPĚTÍ V BETONU - (PRO CHARAKTERISTICKÉ HODNOTY ZATÍŽENÍ)			
hodnota poloměru	MAX $\sigma_r(r)$	hodnota poloměru	MAX $\sigma_\phi(r)$
pro maximální $\sigma_r(r)$ [m]	[MPa]	pro maximální $\sigma_\phi(r)$ [m]	[MPa]
2,99	0,596	3,60	0,141
5,00	-0,906	2,00	-0,272

Obr. 9: Extrémní hodnoty momentů a napětí

Výztuž se navrhuje k hornímu i dolnímu povrchu desky, pro záporné i kladné momenty, přičemž program sám zohledňuje již dříve navrženou výztuž i její krytí a nedopustí, aby docházelo ke kolizi prutů. U desek podepřených sloupem je řešeno navíc protlačení desky sloupem.

Po dobu celého výpočtu a navrhování betonářské výztuže je uživatel průběžně informován, zda jeho návrh vyhovuje z hlediska obou mezních stavů i všem předepsaným předpisům

a konstrukčním zásadám. Pokud kdykoli v průběhu procesu navrhování řešení nevyhoví, je uživateli poskytnuta rada s dalším možným postupem či vhodnými změnami.

Při ověřování navrženého řešení z hlediska mezního stavu použitelnosti je uživatel informován, zda vzniknou či nevzniknou trhliny. Program vyhodnotí, že vzniknou trhliny, pokud platí podmínka $\sigma_c > f_{ctm}$. V případech, kdy trhliny vzniknou, program spočítá část průřezu, která zůstala neporušena trhlinami a následně je spočtena nová desková tuhost pro průřez s trhlinami.

Program přistoupí na výpočet omezení napětí v tlačené části betonu a v tažené betonářské výztuži a vyhledá extrémní hodnotu, kterou použije při vyhodnocování, zda návrh z hlediska omezení napětí vyhoví či nevyhoví. Z výsledného průběhu napětí vykresleného pro potřebu omezení napětí v betonu, je vyhledána extrémní hodnota reprezentující napětí v tlačené části betonu v dolních, resp. horních vláknech betonu. Charakteristická hodnota napětí má vyhovět podmínce (6):

$$\sigma_{c,ek} \leq k_1 f_{ck} \quad (6)$$

kde podle národní přílohy je $k_1 = 0,6$.

Omezením tahového napětí v betonářské výztuži je zabráněno vzniku nepřijatelných deformací a trhlin. Maximální napětí výztuže, které může v konstrukci vzniknout, se vypočítá dle (7):

$$\sigma_{s1,ek} = \alpha_e \sigma_s \quad (7)$$

$$\sigma_{s1,ek} \leq k_{3,yk} f_{yk} \quad (8)$$

Dále je posouzen průřez na omezení šířky trhlin, během kterého se vypočítá a ověří minimální průřezová plocha výztuže. Proveďte se posouzení porovnáním výsledků s tabulkovými hodnotami, zda vyhoví či nevyhoví.

Omezení průhybu je v programu řešeno dvěma metodami. První metodou stanovenou v EC 2 je posouzení průhybu přímým výpočtem. Program vypočítá měrný ohybový moment na mezi vzniku trhlin. Podle postupu z EC 2 jsou programem vypočítány hodnoty deformace pro stav bez trhlin α_I a stav s plně rozvinutými trhlinami α_{II} . Na základě tzv. rozdělovacího součinitele ζ je pak vypočítán celkový průhyb od kvazistálé kombinace zatížení. Výsledný průhyb $\alpha = w_{kvazi}$ se porovná s dovolenou hodnotou průhybu w_{lim} a stanoví se, zda vyhoví či nevyhoví.

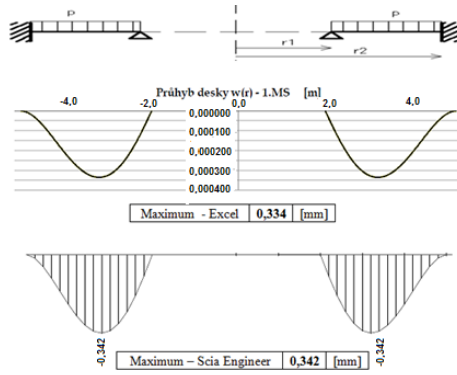
$$\alpha = \zeta \alpha_{II} + (1 - \zeta) \alpha_I \quad (9)$$

U druhé metody lze při posouzení průhybu od přímého výpočtu upustit. Metoda je založena na porovnání poměru rozpětí k účinné výšce (l/d) s mezním poměrem (l/d)_{mezní}. Na základě porovnání program vyhodnotí, zda poměr vyhoví či nevyhoví.

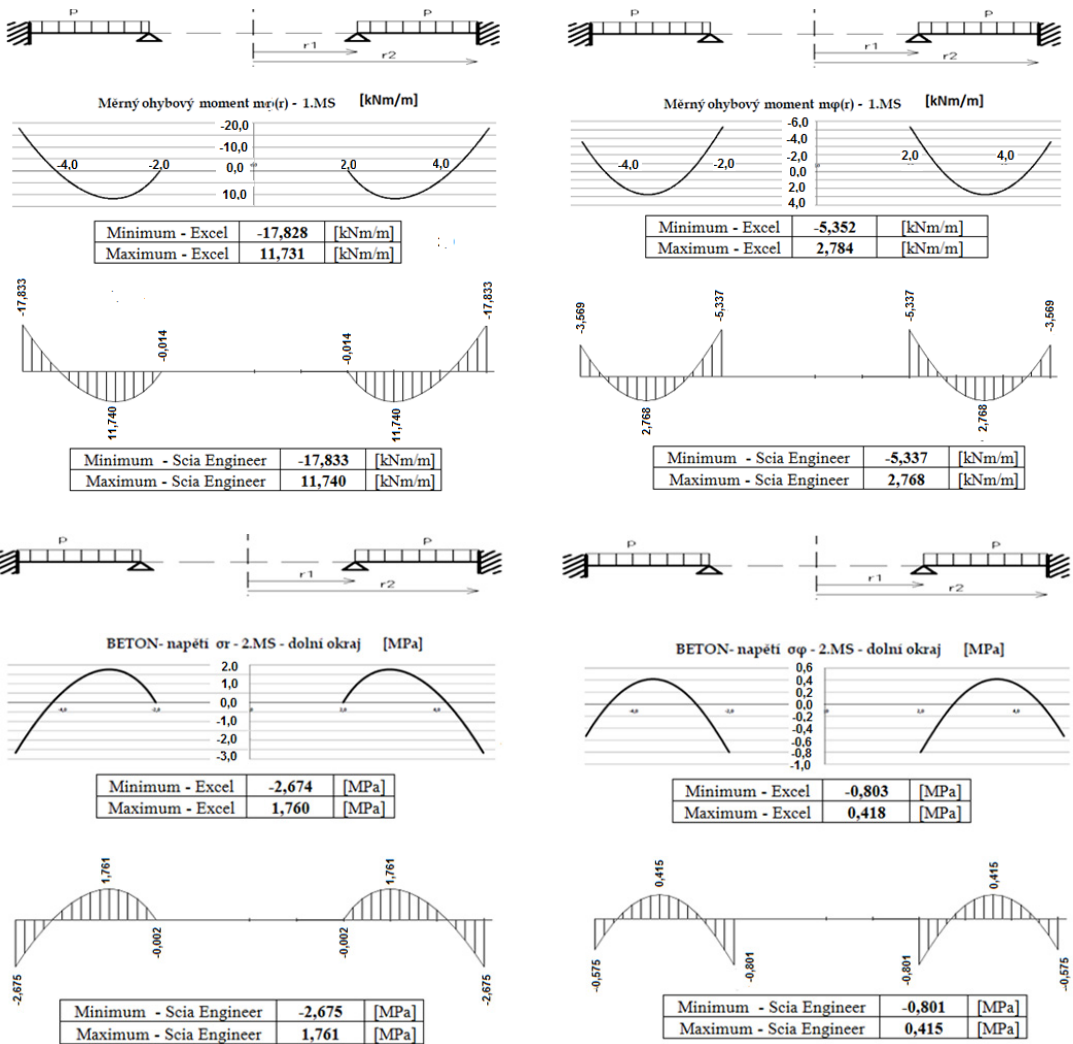
Při vytváření programu byl kladen důraz na to, aby práce s ním byla jednoduchá a pro uživatele přehledná. Jednoznačně jsou označena místa, kam uživatel zadává hodnoty, které blíže specifikují danou konstrukci. S těmito hodnotami program automaticky pracuje. Uživatel je po celou dobu výpočetního postupu naváděn k dalším krokům souvisejících s mezním stavem únosnosti a mezním stavem použitelnosti pro radiální i tangenciální směr.

Součástí programu je uživatelský manuál, který přispívá k lepší orientaci při práci v programu a umožňuje tak uživateli rychlé a efektivní využití. Jedná se o univerzální program, který uživateli umožní si zvolit libovolný typ uložení, rozměry konstrukce, třídu betonu i oceli a na základě programem provedené statické analýzy konstrukci navrhnout a posoudit. Celý postup návrhu i posudku konstrukce je v závěru programu přehledně zobrazen a shrnut v tzv. „Verzi pro tisk“, což uživateli ušetří práci s dalším formátováním a pohodlně si může početní výstup vytisknout ve formátu A4. Součástí výstupu jsou i všechny navržené dimenze konstrukce a její celkové posouzení z hlediska mezního stavu únosnosti a mezního stavu použitelnosti.

Správnost výsledných průhybů, vnitřních sil a napětí byla ověřena srovnáním s výstupy namodelovaných konstrukcí v programech, které pracují na jiném principu. Dalším způsobem kontroly bylo srovnání výsledků řešených příkladů z odborné literatury, jejichž zadání bylo vloženo do vytvořeného programu. Výsledky se téměř shodovaly u všech způsobů ověřování (viz obr. 10, 11).



Obr. 10: Srovnání výstupu z programu v Excelu a Scia Engineer pro mezikruhovou desku – průhyb



Obr. 11: Srovnání výstupu z programu v Excelu a Scia Engineer pro mezikruhovou desku – měrné ohybové momenty a napětí

3.1 Odvození měrného deskového momentu setrvačnosti I^D

V souvislosti s mezním stavem použitelnosti bylo nutné přizpůsobit metodiku výpočtů dle Eurokódu tak, aby ji bylo možné aplikovat v práci s deskovými rovnicemi pro mezikruhové a kruhové desky. To je řešeno prostřednictvím tzv. měrného deskového momentu setrvačnosti, který je podrobně odvozen v lit. [4].

Při navrhování betonových konstrukcí, je v obecných vztazích pro výpočty související s mezním stavem použitelnosti využíván moment setrvačnosti I' – průřezu neporušeného trhlinami a I'' – průřezu porušeného trhlinami. Oba momenty setrvačnosti slouží k výpočtům napětí, se kterým se pracuje během celého výpočtu mezního stavu použitelnosti.

Při úpravě obecných vztahů bylo důležité vystihnout podstatu výpočtů mezního stavu použitelnosti a správně je zakomponovat do teorie mezikruhových a kruhových desek a jejich základní rovnice vyjadřující průhyb (1).

Při analýze desek se používá pro výpočet průhybu desková rovnice (1), která je závislá na deskové tuhosti D (vyskytující se v konstantách C_1 až C_4). Ze vztahu pro výpočet deskové tuhosti D byl odvozen měrný deskový moment setrvačnosti I_c^D pro betonový průřez:

$$I_c^D = \frac{h^3}{12(1-\mu^2)} \quad (10)$$

V deskové tuhosti je nutné pro mezní stav použitelnosti zohlednit i horní a dolní výztuž a jejich polohu v průřezu. Měrný deskový moment setrvačnosti celého průřezu i s výztužemi je znázorněn ve vztahu (11).

$$I_i^D = I_c^D + A_c^I (a_{gi} - a_c)^2 + \alpha_e \cdot A_{s1} \cdot (a_{gi} - d)^2 + \alpha_e A_{s2} \cdot (a_{gi} - d_2)^2 \quad (11)$$

Dále je v programu získána nová desková tuhost $D = EI_i^D$, použitelná pro MS použitelnosti. Měrný deskový moment setrvačnosti je takto možné spočítat pro průřez bez trhlin i s trhlinami.

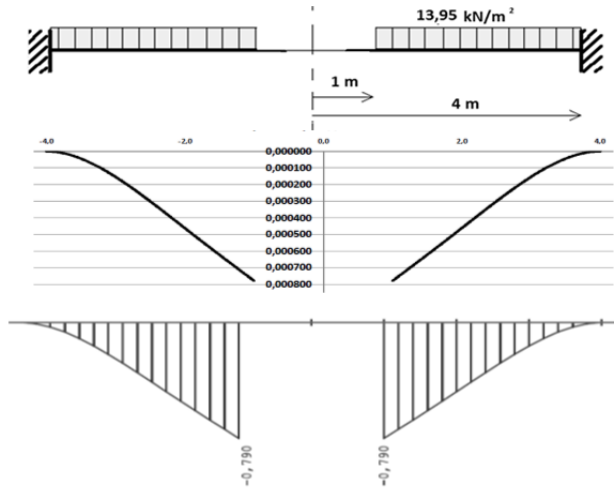
Odvozený měrný deskový moment setrvačnosti, který ovlivňuje deskovou tuhost a její průhyb, lze uplatnit i pro výpočet napětí. Napětí je totiž pro desky závislé na deskové tuhosti prostřednictvím rovnice průhybu (resp. jejich derivací) a je stanoveno dle vztahů (12) a (13):

$$\sigma_r = \pm \frac{E}{1-\mu^2} \left(zw' + \frac{z}{r} \mu w' \right) \quad (12)$$

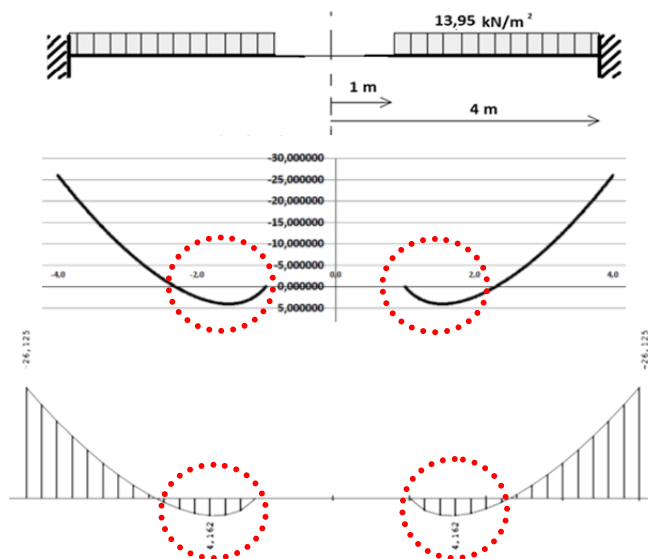
$$\sigma_\varphi = \pm \frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{z}{r} w' + z \mu w'' \right). \quad (13)$$

3.2 Anomálie průběhů vnitřních sil

U některých typů statického schématu a různých rozměrů desky dochází u mezikruhových desek při vykreslování vnitřních sil k neočekávaným průběhům. Jedním z příkladů je mezikruhová deska, která je vetknutá po svém vnějším obvodu. Zatímco průhyb (viz obr. 12) i měrný ohybový moment tangenciální měl ve vytvořeném programu v MS Excel i ve Scia Engineer očekávaný průběh, radiální měrný ohybový moment nabývá i kladných hodnot (viz obr. 13), což je u konzolového typu uložení neobvyklé.



Obr. 12: Výsledný průhyb z Excelu a Scia Engineer



Obr. 13: Neobvyklý průběh měrných radiálních ohybových momentů z Excelu a Scia Engineer

4 ZÁVĚR

Ve srovnání s jinými programy, které pracují například na principu metody konečných prvků, je výsledný program vytvořen na základě analytického řešení, které umožňuje dosažení přesnějších výsledků. V porovnání s jinými programy se vyskytuje určité omezení v souvislosti se zatížením. Pro práci ve výsledném programu je nutné rovnoměrné plošné rotačně symetrické zatížení působící kolmo na rovinnou střednicovou plochu desky. Výhodou vytvořeného programu je řešení zvolené konstrukce od statické analýzy, získání průběhů deformací a vnitřních sil, přes návrh až k posouzení dle mezního stavu únosnosti a použitelnosti, přičemž je program schopný pracovat i s průřezem porušeným trhlinami. Vytvořený program nabízí návrh a posouzení konstrukce z hlediska prvního i druhého mezního stavu ve větším rozsahu než ostatní programy. Navržené řešení je také ověřeno z hlediska všech konstrukčních zásad.

PODĚKOVÁNÍ

Tento příspěvek byl zpracován v rámci projektu CZ.1.07/2.3.00 /20.0013 – „Tvorba a internacionalizace špičkových vědeckých týmů a zvyšování jejich excelence na Fakultě stavební VŠB-TUO“.

LITERATURA

- [1] DICKÝ, J. & MISTRÍKOVÁ, Z. & SUMEC, J. *Pružnost' a plasticita v stavebnictve 2*, STU v Bratislavě, 2006, ISBN 80-227-2515-3, 320 s.
- [2] DOBIÁŠOVÁ, V. & VARAĐOVÁ, V. *Pružnost a plasticita II*, VUT v Brně, 1996, ISBN 80-214-0630-5, 31 s.
- [3] HARVANČÍK, J. & DRAHOŇOVSKÝ, Z. *Výpočty prútových a plošných konštrukcí*, Bratislava, 1970, 293 s.
- [4] LABUDKOVÁ, J. *Tvorba výpočetního programu pro analýzu kruhových a mezikruhových železobetonových desek*, Bakalářská práce, Ostrava, 2012, 95 s.
- [5] LABUDKOVÁ, J. *Program pro výpočet a navrhování mezikruhových železobetonových desek*, SVOČ, Ostrava, 2011, 20 s.
- [6] LABUDKOVÁ, J. *Výpočetní program pro návrh a posudek kruhových i mezikruhových železobetonových desek*, SVOČ, Ostrava, 2012, 20 s.
- [7] PROCHÁZKA, J. & ŠTĚPÁNEK, P. & KRÁTKÝ, J. & KOHOUTKOVÁ, A. & VAŠKOVÁ, J. *Navrhování betonových konstrukcí*, ČBS, 2007, Praha, ISBN 978-80-903807-5-2, 316 s.
- [8] JANAS, P.: Přednášky k předmětu Pružnost a plasticita II (katedra stavební mechaniky FAST, VŠB – TUO).
- [9] TEPLÝ, B. & ŠMIRÁK, S. *Pružnost a plasticita II*, VUT Brno, 1993, ISBN 80-214-0498-1, 199 s.

Oponentní posudek vypracoval:

Prof. Ing. Ludovít Fillo, PhD., Katedra betónových konstrukcí a mostov, Stavebná fakulta, STU v Bratislave.

Doc. Ing. Martin Moravčík, Ph.D., Katedra stavebných konstrukcí a mostov, Stavebná fakulta, ŽU v Žiline.

Martin MAGURA¹

**ANALÝZA VÝFUKOVÉHO TRAKTU TURBOKOMPRESORA
ZAŤAŽENÉHO VYSOKÝMI TEPLOTAMI**

**ANALYSIS OF THE EXHAUST TRACT OF THE TURBOCOMPRESSOR
LOADED BY HIGH TEMPERATURE**

Abstrakt

Pri návrhu technologických konštrukcií, ktoré sú zaťažené teplotou sa často zabúda na stav keď sa konštrukcia dostáva do prevádzkovej teploty, napríklad pri nábehu strojov. Vtedy býva konštrukcia nerovnomerne zaťažená teplotnými účinkami a teda vplyvom rôznych objemových zmien od teploty vznikajú značné prídavné napätia. Rozkmit týchto napätí môže spôsobiť až nízkocyklovú únavu. Tento príspevok popisuje takýto typ konštrukcie, jej poruchy, analýzu a následnú sanáciu.

Klíčová slova

Nízkocyklová únava, zaťaženie teplotou, komín.

Abstract

By designing technological structures which are loaded with temperatures often oblivious to the situation when the structure gets to operating temperature, such as the start-up of the machines. Then structures are loaded by uneven temperature effects and thus the effect of different thermal movement generates considerable additional stress. The amplitude of these tensions may cause to low cycle fatigue. This paper describes this type of structure, its failure, analysis and refurbishment.

Keywords

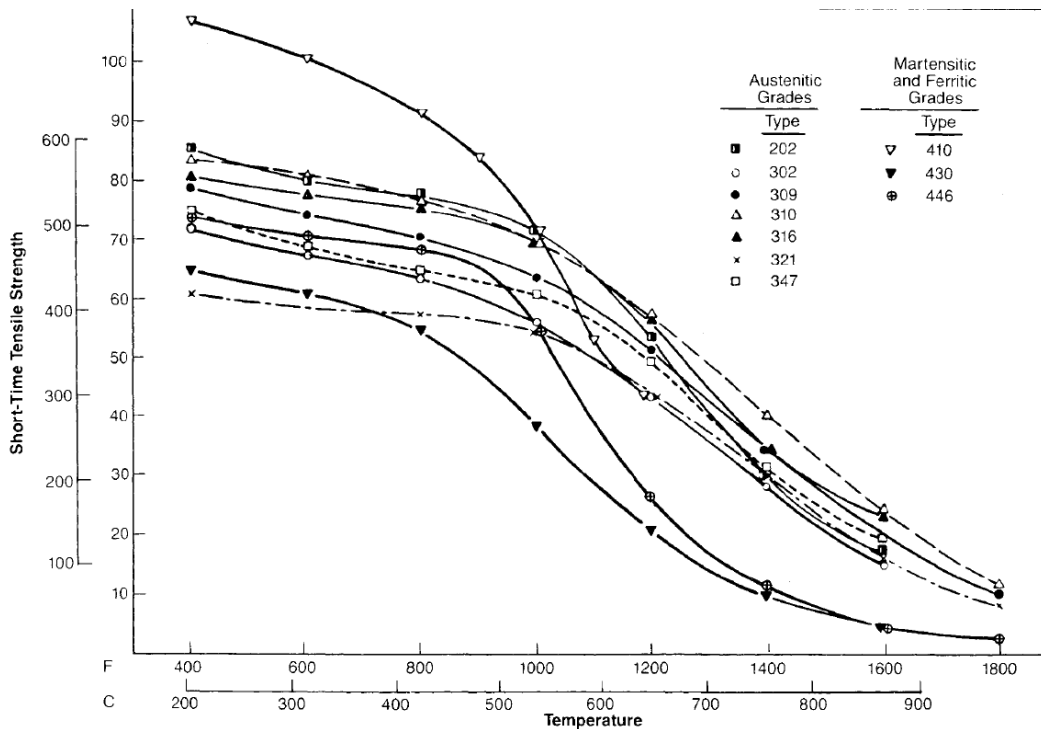
Thermal stress, low-cycle fatigue, uneven temperature, gas-turbine chimney.

1 ÚVOD

Nízkocyklová únava materiálu spôsobená nerovnomerným ohriatím konštrukcie je jednou z hlavných príčin porúch konštrukcií v energetickom priemysle.

Mnohé konštrukcie zaťažené teplotou majú nesprávne riešené konštrukčné detaily či nezohľadnené zmeny pevnostných charakteristík pri zvýšených teplotách (obr.1) , čo vedie k ich poruchám. Pri diagnostických prehliadkach konštrukcií komínov turbokompresorov boli nájdené závažné poruchy stien, výstuh a prírub vo forme trhlin značnej dĺžky. V príspevku je uvedený popis porúch, príčin ich vzniku, analýza napätosti v konštrukcii a návrh úprav. Analyzovaný je výfukový trakt turbokompresora, ktorý tlačí plyn do potrubia. Posudzované boli časti tlmiča hluku kolena a komína (obr.2) a samotného komína.

¹ Ing. Martin Magura, Katedra kovových a drevených konštrukcií, Stavebná fakulta, STU v Bratislave, Radlinského 11, 813 68 Bratislava, tel.: +421 (2) 59 274 378, e-mail: martin.magura@stuba.sk.



Obr. 1: Pracovný diagram austenitických ocelí pri rôznych teplotách [1]

2 POSÚDENE A SANÁCIA TLMIČA HLUKU A KOLENA

Výfukový trakt z nerezovej (austenitickej) ocele sa skladá z vodorovnej - prechodovej a zvislej časti, pričom jednotlivé časti sa skladajú z oddelených, cca 5 – 6 metrov dlhých, segmentov s obdĺžnikovým, prípadne kruhovým vnútorným prierezom (obr.2). Sú oddelené kompenzátormi, ktoré zabezpečujú to, že jednotlivé segmenty sa neovplyvňujú zmenami dĺžok od teploty. Výfukový trakt pracuje pri prevádzkovej teplote spalín približne 500°C, pričom podľa prevádzkovateľa absolvuje ročne niekoľko desiatok nábehov a odstávok turbokompresora.

Pri analýze bola konštrukcia komínu rozdelená na dve samostatné časti – koleno a tlmíč s prívodným potrubím. Každý zo segmentov bol analyzovaný v programe Nexis 32 samostatne, pomocou metódy konečných prvkov.

Na konštrukciu pôsobili štyri zaťažovacie stavy:

ZS1 – vlastná tiaž ocelevej konštrukcie (parciálny súčiniteľ spoľahlivosti $\gamma = 1,35$)

ZS2 – vlastná tiaž opláštenia konštrukcie (odhad 50% ZS1)

ZS3 – zaťaženie vetrom (parciálny súčiniteľ spoľahlivosti $\gamma = 1,5$)

ZS4 – nerovnomerné ohriatie stien oproti výstuhám o 50 °C

Konštrukcia bola posudzovaná na dve kombinácie zaťaženií

Kombi FEM 1 = ZS1 x γ + ZS2 + ZS3 x γ

Kombi FEM 2 = ZS1 x γ + ZS2 + ZS4 x γ



Obr. 2: Posudzovaná koštrukcia

2.1 Tlmič hluku

Posudzovaný segment koštrukcie je potrubie obdĺžnikového prierezu, výšky 4000 mm, šírky 4500 mm, dĺžkou 2900 mm a s hrúbkou steny 6 mm. Steny sú vystužené rastrom pozdĺžnych a priečných výstuh s prierezom tvaru U, vyrobených z ohnutého plechu hrúbky 6 mm do výsledného rozmeru 80 (70) x 160 mm. Sú privarené prerušovanými zvarmi (vytvára so stenou uzatvorený profil) k stene. Na všetkých stenách prierezu (po celom obvode) sú dve zvislé – priečne výstuhy (cca 900 mm od koncov segmentu) výšky 70 mm, tvoriace uzavretý rám. Na bočných zvislých stenách sú 3 vodorovné – pozdĺžne výstuhy (prvé cca 800 mm od kraja steny, tretia v strede) výšky 80 mm a na bočných zvislých stenách 4 vodorovné – pozdĺžne výstuhy (prvé cca 600 mm od kraja steny, ďalšie v osovej vzdialenosti cca 1100 mm). Všetky pozdĺžne výstuhy začínajú a končia na pásniciach prírubového spoja. Spoj zvislých výstuh v rohu stien segmentu je vyriešený ich zrezaním pod uhlom 45° a zavarením na tupo. Spoj pri krížení výstuh je riešený tak, že na vodorovné – pozdĺžne výstuhy, ktoré sú nedelené (výška 80 mm), sú privarené zvislé výstuhy (výška 70 mm). Vo vnútri segmentu sa nachádzajú lamely tlmiča hluku neznámej koštrukcie. Lamely sú vždy na jednom konci oddilatované, aby nebránili tepelnej rozťažnosti segmentu. Segment je ako celok uložený priamo cez všetky štyri vodorovné – pozdĺžne výstuhy v spodnej časti na dva oceľové nosníky uzatvoreného prierezu (2xU200) umiestnené 200 mm od koncov segmentu. Uloženie je riešené cez vodorovné úložné platne s oválnymi otvormi pre umožnenie priečnej tepelnej rozťažnosti segmentu.

Na koštrukcii najmä v rohoch a v krížení výstuh na tlmiči hluku aj kolene sa objavili trhliny. Na obrázku 3 vidieť trhlinu v rohu výstuh a na obrázku 4 v mieste kríženia výstuh. Pri okrajoch je popraskaná väčšina prípojných prerušovaných zvarov výstuhy k stene.

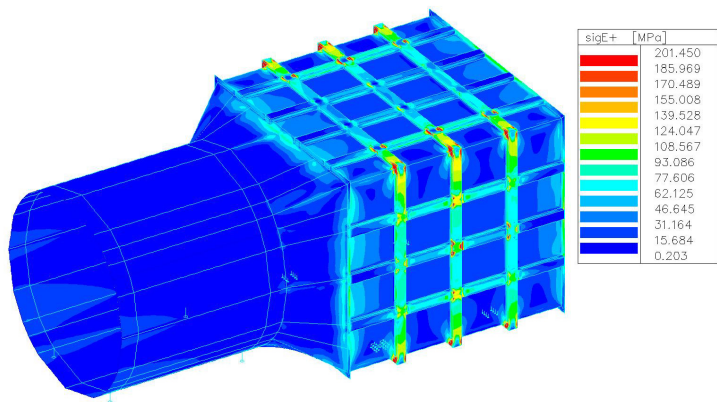


Obr. 3: Detail poruchy rohu výstuh

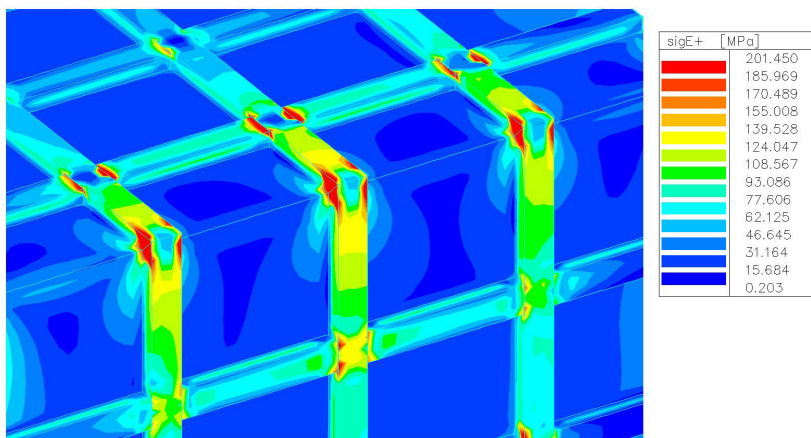


Obr. 4: Detail poruchy výstuh

Statická analýza modelu mala overiť, či miesta porúch korešpondujú s kumuláciou napätí a zistiť čo je príčinou vzniku týchto porúch. Výsledné Von Mises napätia od kombinácie FEM2 (nerovnomerné ohriatie) sú na obrázkoch 5 a 6.



Obr. 5: Model tlmiča hluku s výslednými von Mises napätiami [3]



Obr. 6: Detail v miestach rohov a križovania výstuh [3]

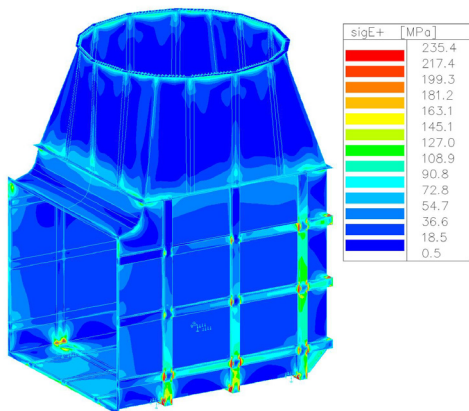
Z výsledných obrázkov Von Mises napätí *Sig E-* (vonkajší povrch konštrukcie) vidieť že, pri kombinácii zaťaženi FEM2 (zaťaženie vlastnou váhou a nerovnomernou teplotou 50 stupňov) sa kumulácia napätí objavuje vo výstuhách pri rohoch a v križení výstuh. Maximálna hodnota napätia dosiahla 200MPa. Miesta maximálnych napätí zodpovedajú miestam prasklín na konštrukcii.

2.2 Koleno

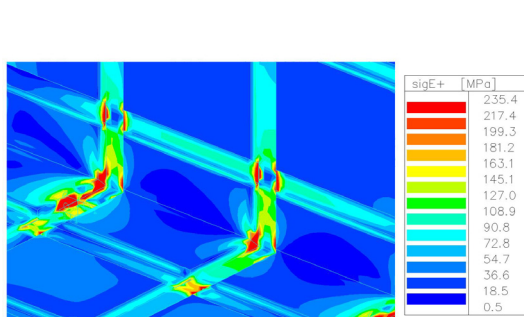
Koleno je potrubie obdĺžnikového prierezu zabezpečujúce vedenie výfukových plynov z vodorovného smeru do zvislého. Vstupný (zvislý) priečný rez má rozmer výška x šírka cca 3800 mm, výstupný (vodorovný) rozmer 3800x3200 mm. Hrúbka stien 4mm, dĺžka segmentu cca 3800 mm. Steny potrubia sú vystužené rastrom pozdĺžnych a priečných výstuh s prierezom U, vyrobených ohýbaním z plechu hrúbky 4 mm, obrysový rozmer cca 80 (70)x160 mm. Príruby sú privarené (vytvára so stenou uzatvorený profil) k stene. Na všetkých stenách prierezu (po celom obvode) sú tri zvislé – priečne výstuhy (cca 1000 mm od vstupu segmentu + 2x1200 mm rozostup) výšky 70mm, a 3 vodorovné – pozdĺžne výstuhy (prvé cca 500 mm od kraja steny + 2x1400 mm rozostup) výšky 80 mm. Spoj zvislých a vodorovných výstuh v rohu stien segmentu je len ich zrezaním pod uhlom 45° a zavarením. Spoj pri križení výstuh je riešený tak, že na vodorovné –

pozdĺžne výstuhy, ktoré sú nedelené (výška 80 mm), sú privarené zvislé výstuhy (výška 70 mm). Vo vnútri segmentu sa nachádza 10 plechových lamiel tvaru štvrtkruhu, usmerňujúcich prúd vyfukovaného vzduchu z vodorovného do zvislého smeru. Segment je ako celok uložený priamo cez dvojicu krajných polrámov zvislých výstuh v štyroch bodoch. Uloženie je riešené cez výstuhy a krátke stĺpiky uzatvoreného obdĺžnikového krabicového prierezu na klznú gumenú vložku. Všetky štyri podpory majú smerové vedenie orientované do stredu segmentu (cca 45° na osi segmentu), čo umožňuje voľnú tepelnú rozťažnosť segmentu.

Druhý segment je prechodový kus z obdĺžnikového prierezu kolena 3800x3200 mm na kruhový prierez komína $D = 3200$ mm. Je posadený na prvý segment cez skrutkový prírubový spoj. Na opačnom konci je pripojený na kompenzátor. Segment je z plechu hrúbky 6 mm, jednoducho vystužený na zvislých stenách výstuhami prierezu ako v prvom segmente.



Obr. 7: Model kolena komína [3]



Obr. 8: Detail v rohu výstuh kolena komína [3]

Pri kombinácii zaťaženia FEM2 – zaťaženie vlastnou váhou a teplotou sa kumulácia napätí objavuje vo výstuhách pri rohoch a pri križení výstuh. Maximálna hodnota špičky napätia dosiahla úroveň 200MPa už pri teplotnom rozdiel 50 stupňov. Na reálnej konštrukcii bol nameraný rozdiel teplôt steny a výstuhy na úrovni 294 stupňov a je predpoklad, že materiál už dosiahol medzi pevnosti ocele, teda 360 MPa na viacerých miestach. Miesta maximálnych napätí zodpovedajú miestam prasklín na konštrukcii.

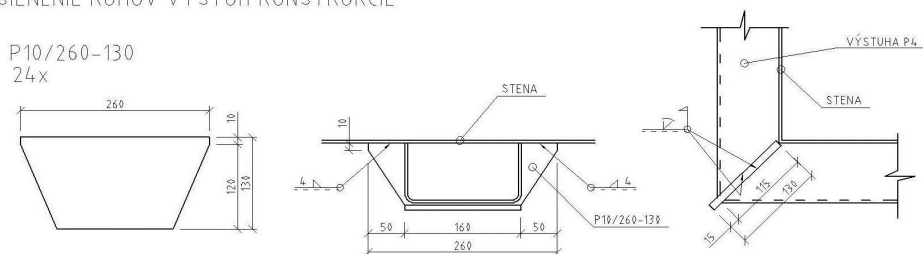
2.3 Návrh úprav

Na základe vizuálnej prehliadky a statickej analýzy boli navrhnuté nasledovné úpravy nosnej konštrukcie oboch segmentov komína (obr. 9, obr. 10):

- dovarenie všetkých pripojovacích kútových zvarov výstuh k stenám z prerušovaného na priebežný s minimálnou výškou 3mm.
- Zosilnenie výstuh v rohoch vovarením výstužného plechu P10. Zvar musí byť riešený ako tupý. Privarenie výstužného plechu bolo pomocou kútových zvarov hrúbky 4 mm. (obr. 8)
- Zosilnenie križovania výstuh. Pred samotnou úpravou sa vyduté alebo zbortené plechy povyrovnávali. V prvej fáze sa na vodorovné výstuhy privarili príložky z plechu P5 prípadne 6,8 tak, aby horná hrana príložky bola v jednej rovine so zvislou výstuhou. Zvary boli riešené ako kútové s výškou 3,5 mm a čelný zvar bol tupý a potom sa zabrusil do roviny. V druhej fáze bol privarený kútovým zvarom 3,5 mm zosilňujúci plech hrúbky 6 mm v tvare kríža, ktorý zabezpečí zvýšenie tuhosti celého spoja. (obr. 9)
- Rozšíril sa pohyb klzných podpôr na základe nameraných dilatácií.

DETAIL 1

ZOSILNENIE ROHOV VÝSTUH KONŠTRUKCIE

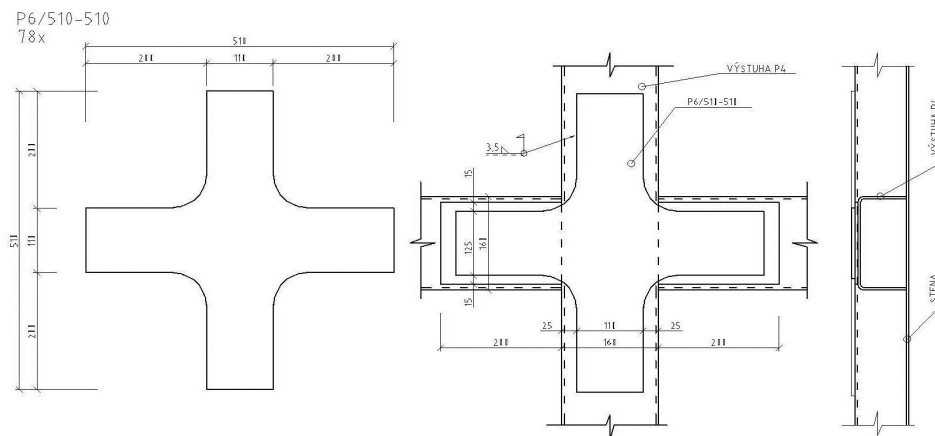


Obr. 9: Detail 1 – Zosilnenie výstuh v rohoch kolena a tmiča [3]

DETAIL 2

ZOSILNENIE KRÍŽENIA VÝSTUH KONŠTRUKCIE

2. Fáza zosilnenia – privarenie zosilňujúcich krížov



Obr. 10: Detail 2 – Zosilnenie výstuh v križovaní 2. fáza [3]

3 POSÚDENIE KRUHOVEJ ČASTI

Predmetom posudku tejto kapitoly je posledná časť výfukového traktu od turbokompresora – zvislá kruhová časť nachádzajúca sa nad kolenom (obr. 11). Celkovo má komín výšku cca 19 m, z čoho samotná komínová rúra nad podperou má výšku 16,4 m. Komín skladajúci sa z troch segmentov priemeru 3200 mm má hrúbku steny 4 mm. Stena je zosilnená v mieste štvorice úložných nožičiek na 6 mm. V mieste styku segmentov sú montážne príruby z plechu hrúbky 16 mm a šírkou 100 mm. Spojenie je pomocou 36 skrutiek M20, ktoré majú od seba odklon 10°. Na strednom segmente je v strede medziľahlá vodorovná výstuha rovnakých rozmerov ako montážne príruby. Posledný vrchný segment sa kónicky rozširuje a je ukončený strechou s rozrážачom prúdiacich plynov.

Maximálna teplota spalín v komíne má hodnotu 475°C.

Poruchy na komíne sa prejavili najmä pri spodných montážnych prírubách všetkých segmentov (obr. 12) a v mieste medziľahlej výstuhy.

Trhliny vznikli v období za posledných cca 3 rokov (od poslednej diagnostickej prehliadky) vplyvom zvýšenia frekvencie štartov. Pri týchto štartoch sa konštrukcia nerovnomerne ohrieva, čo spôsobuje nerovnomernú teplotnú rozťažnosť. Tento jav spôsobuje vznik výrazných špičiek napätí a nízkocyklovú únavu materiálu.

3.1 Posúdenie pripojovacej okrajovej príruby



Obr. 11: Segment zvislej časti komína

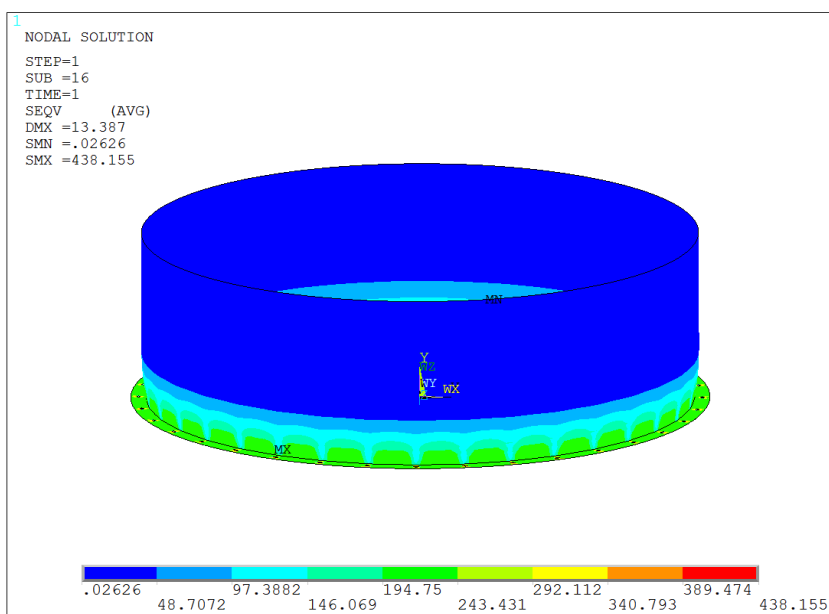


Obr. 12: Segment zvislej časti komína

Pre modelovanie tejto časti komína sa javil ako vhodnejší program ANSYS, ktorý pracuje na princípe metódy konečných prvkov. Boli riešené detaily komína v mieste zistených porúch. Konštrukcia bola zaťažená teplotou 400°C, ktorá pôsobila len na komínovú rúru, nie na prírubu. Toto zaťaženie simuluje nerovnomerné ohriatie rúry oproti prírubám (výstuhám). Sledovaný bol prírastok napätí v mieste pripojenia príruby na rúru.

Konštrukcia bola namodelovaná v reálnych rozmeroch zo skupinových prvkov SHELL 93. Materiál nerezovej ocele bol zadaný pomocou pracovného diagramu a normových charakteristík pre tento materiál. Uvažovaná medza klzu bola $f_y = 230$ MPa, modul pružnosti $E = 200$ GPa a tepelná rozťažnosť $\alpha = 1,7e-5$. Veľkosť konečno-prvkového elementu bola zvolená 35 mm.

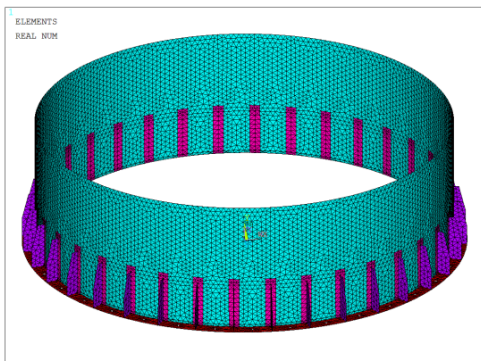
Namodelovaný bol segment komína pri montážnej prírubu v jestvujúcom stave (obr. 13). Rúra je zvarená z plechov hrúbky 4 mm a prírubu šírky 100 mm je hrúbky 16 mm. Na obrázkoch 10 až 12 sú vykreslené výsledné napätia.



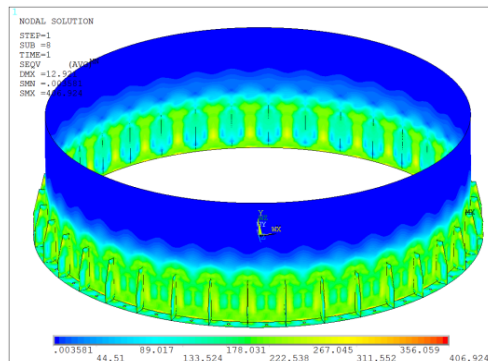
Obr. 13: Von Mises napätia na neupravenom pôvodnom segmente komína [3]

Zosilnenie pomocou privarených výstuh a podložiek z plechu hrúbky 4 mm a šírky 150 mm

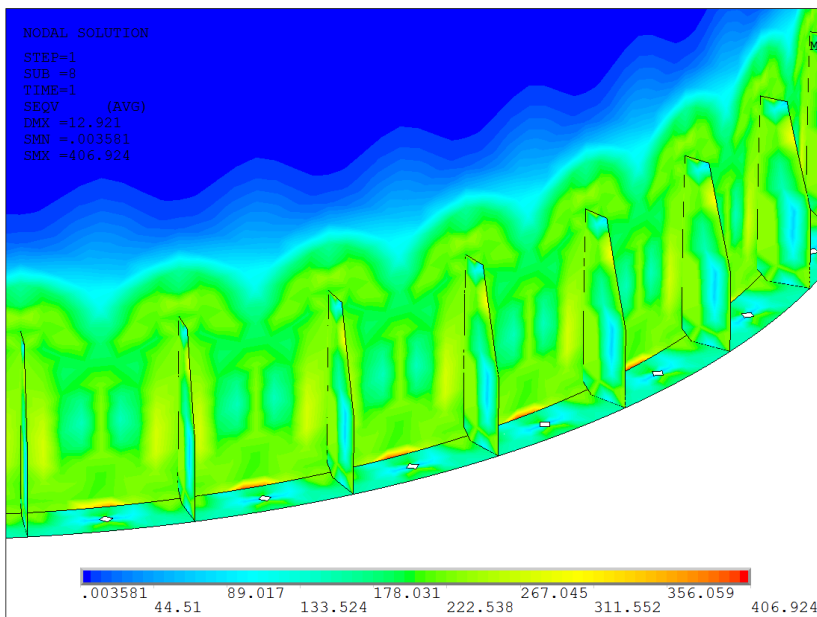
Zosilnenie je realizované pomocou 36 kusov privarených výstuh celkovej výšky a hrúbky 12 mm. Rúra bola v mieste privarenia výstuhy zosilnená podložkou hrúbky 4 mm. Šírka podložky je 150 mm (obr. 14). Na obrázkoch 15 a 16 sú výsledné napätia.



Obr. 14: Model upraveného segmentu komína [3]



Obr. 15: Von Mises napätia na upravenom segmente komína [3]



Obr. 16: Detail pri upravenom segmente komína [3]

Z uvedených obrázkov vidieť, že maximálne špičky napätí nevznikajú a napätia dosahujú približne rovnakú hodnotu po celom obvode komína. Maximálna hodnota je cca 220 MPa a napätie nie je sústredené okolo kritického detailu prípoja príruby na komínovú rúru. Zosilnenie sa javí ako najvhodnejšie.

Zosilnenie v mieste montážnych prírub:

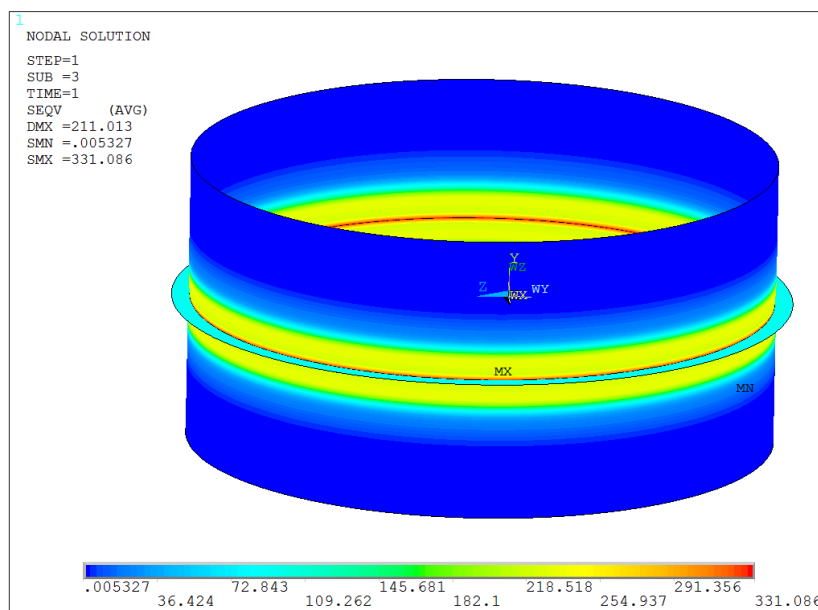
Odrhnuté montážne príruby sa privarili na pôvodné miesta pomocou tupých, resp. kútových zvarov. Bolo potrebné ich vytvarovať do pôvodného kruhového tvaru tak, aby bolo možné segmenty opätovne navzájom pospájať. Po privarení príruby k rúre sa na rúru privarili podložky z plechu hrúbky 4 mm a rozmeru 150/400 mm. Podložky mali od seba odklon 10° a celkovo ich bolo po celom obvode 36 ks. Najprv sa zrealizovali bočné kútové zvary s horným a nakoniec sa privaril

spodný okraj podložky tak, aby sa zvar prepojil s kútovým zvarom pripájajúcim prírubu k rúre. Potom sa k prírubu a podložke privarila výstuha z plechu hrúbky 12 mm a rozmeru 96/350 mm. Všetky zvary pripájajúce zosilňujúce prvky boli riešené ako kútové s výškou 3 mm. Zosilniť bolo potrebné všetky montážne výstupy na komín – celkovo 6. V mieste hornej výstuhu bol z vnútornej strany navarený plech hrúbky 2 mm, ktorý pri montáži slúžil ako vodiaci a počas prevádzky komína chráni zvarové prípoje a medzeru medzi prírubami pred priamym pôsobením horúcich plynov. Celková výška plechu je 100 mm – 40 mm bude zasahovať do segmentu a 60 mm bude vyčnievať nad segment – zasahovať do vyššieho segmentu.

3.2 Prepočet medziľahlej výstuhu

Namodelovaný bol komín v jestvujúcom stave. Rúra je zvarená z plechov hrúbky 4 mm a medziľahlá výstuha šírky 100 mm je hrúbky 16 mm. Pomocou výpočtového programu boli posudzované rôzne spôsoby zosilnenia a to zväčšením hrúbky rúry komína privarením plechového pásu hrúbky 4 mm. Ďalej boli pridané výstupy hrúbky 12 mm.

Namodelovaný bol komín v jestvujúcom stave. Rúra je zvarená z plechov hrúbky 4 mm a medziľahlá výstuha šírky 100 mm je hrúbky 16 mm. Na obrázku 17 sú napätia v konštrukcii v súčasnom stave.



Obr. 17 Von Mises napätia pri medziľahlej výstuhe pred úpravou [3]

Pôvodná konštrukcia bola z vnútornej strany zosilnená a bol pridaný po celom obvode pás z plechu hrúbky 4 mm a výšky 300 mm (150 mm nad aj pod výstuha – tmavomodrá zóna, obr. 18). Na obrázku 19 sú výsledné napätia po zosilnení.

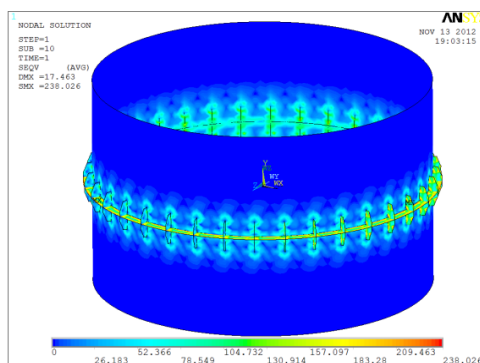
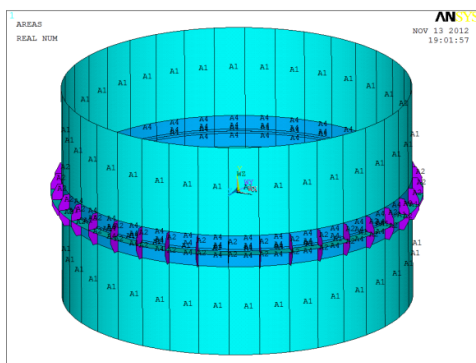
Z uvedených obrázkov vidieť, že koncentrácia napätí nenastáva už v mieste pripojenia steny komína na výstuha, ale v širšom páse. Zosilnenie je efektívne a pokles napätosti oproti súčasnému stavu je skoro o polovicu na úroveň 148 MPa.

Na základe hore uvedených výpočtov rôznych spôsobov zosilnenia kritických detailov boli navrhnuté nasledovné konštrukčné úpravy. Použitý bude materiál zhodný z materiálom existujúcej komínovej konštrukcie – austenitická oceľ.

Trhliny v okolí medziľahlej výstuhu boli zavarené tupými zvarmi. Z vnútornej strany komína bol navarený zosilňujúci pás z plechu 4 mm po celom obvode. Šírka pásu je 400 mm (200 mm nad

a 200 mm pod), skladá sa zo segmentov dĺžky 1000 mm, ktoré sa na hornej a spodnej strane privarili kútovým zvarom výšky 3 mm. Plechy sa medzi sebou pripojili k rúre privarené Pi zvarom.

Z vonkajšej strany sa pomocou obojstranného kútového zvaru výšky 3 mm privarili výstupy výšky 150 mm a šírky 90 mm. Odklon výstuh bude od seba 10° a celkovo ich bolo 36.



Obr. 18: Model upraveného segmentu [3] Obr. 19: Napätia na upravenom segmente [3]

Po zrealizovaní opráv a zosilnení výstuh bolo možné pristúpiť k montáži komínovej konštrukcie. Jednotlivé segmenty sa medzi sebou spojili v mieste montážnych výstuh pomocou skrutiek z nerezového materiálu rozmeru M20 z materiálu A2. Pod hlavu skrutky aj pod maticu sa dali podložky.

Po ukončení opráv a montáže komína sa neodporúčalo komín izolovať z dôvodu diagnostických prehliadok.

4 ZÁVER

Predložený článok na základe diagnostických prehliadok z praxe poukazuje na dôležitosť návrhu oceľových konštrukcií na účinky nerovnomerného ohriatia konštrukcie. Ukázané sú poruchy, analyzované príčiny ich vzniku a sú navrhnuté opatrenia

POĎAKOVANIE

Projekt bol realizovaný za podpory VEGA 1/0929/12.

LITERATÚRA

- [1] A Designers Handbookseries, No. 9004, High-Temperature Characteristics of Stainless Steels, American Iron and Steel Institute
- [2] O'Donnell W.J., Watson J.M., Mallin W.B., Kenrick J.R.: Lowcyclethermalfatigue and fracture of rein forced piping, Analyzing Failures: The problem and the solutions, Salt Lake City, Utah, USA, 2-6 December 1985, pp. 227-236
- [3] BRODNIANSKY, J., MAGURA, M. Statický posudok a návrh opravy konštrukcie komína, Bratislava: STU SvF, 2011.

Oponentní posudek vypracoval:

Prof. Ing. Jozef Melcer, DrSc., Katedra stavebnej mechaniky, Stavebná fakulta, ŽU v Žiline.

Prof. Ing. František Wald, CSc., Katedra oceľových a drevěných konstrukcií, Fakulta stavební, ČVUT v Praze.

Ondřej PEŠEK¹, Jindřich MELCHER²

NUMERICKÁ ANALÝZA PŮSOBENÍ TLAČENÝCH PRUTŮ Z VRSTVENÉHO KONSTRUKČNÍHO SKLA

NUMERICAL ANALYSIS OF BEHAVIOUR OF COMPRESSION MEMBERS MADE OF LAMINATED STRUCTURAL GLASS

Abstrakt

Příspěvek pojednává o návrhu tlačných prutů z monolitického i vrstveného konstrukčního skla. Skleněné tlačené pruty jsou analyzovány pomocí numerických modelů provedených v programech RFEM a ANSYS s uvažováním proměnné hodnoty modulu pružnosti ve smyku mezivrstvy. Získané hodnoty kritických sil, napětí a deformací jsou potom porovnávány s hodnotami z analytického výpočtu.

Klíčová slova

Tlačný prut, vrstvené sklo, polyvinyl butyralová folie, počáteční imperfekce, analytické řešení, metoda konečných prvků.

Abstract

This paper deals with design of compression members made of monolithic and laminated structural glass. Glass columns are analyzed by numerical models made in RFEM and ANSYS software with consideration of variable value of the interlayer shear modulus. The obtained elastic critical forces, stresses and deflections are compared with the values from the analytical calculation according to the second order theory.

Keywords

Compression member, laminated glass, polyvinyl butyral foil, initial imperfection, analytical solution, finite elements method.

1 ÚVOD

V soudobé architektuře jsou oblíbené subtilní a transparentní konstrukce. Tradičním materiálem, který splňuje tato kritéria je sklo, které již neplní funkci pouze výplňového materiálu otvorů, ale nyní získává funkci nosnou, aktivně se tedy podílí na přenosu zatížení [5]. Skleněné sloupy, stěny, nosníky, výztužné prvky prosklených fasád atd. se navrhuji v kombinaci s ocelovými, hliníkovými nebo dřevěnými konstrukčními prvky. Z důvodu bezpečného, spolehlivého a ekonomického navrhování takovýchto moderních konstrukcí je zcela nezbytné znát skutečné působení prvků skleněných konstrukcí.

Z důvodu velkých štíhlostí skleněných konstrukčních prvků je nutné tyto konstrukce ověřovat na ztrátu stability – vzpěr sloupů, klopení nosníků a boulení stěn. Již existující návrhové metody kovových a dřevěných prutů nemohou být zcela beze změny aplikovány na pruty skleněné, protože ty

¹ Ing. Ondřej Pešek, Ústav kovových a dřevěných konstrukcí, Fakulta stavební, Vysoké učení technické v Brně, Veveří 331/95, 602 00 Brno, tel.: (+420) 541 147 329, e-mail: pesek.o@fce.vutbr.cz.

² Prof. Ing. Jindřich Melcher, DrSc., Ústav kovových a dřevěných konstrukcí, Fakulta stavební, Vysoké učení technické v Brně, Veveří 331/95, 602 00 Brno, tel.: (+420) 541 147 300, e-mail: melcher.j@fce.vutbr.cz.

vykazují několik odlišných vlastností: výrobní tolerance (počáteční imperfekce), křehký lom, působení vrstveného skla. Tyto odlišnosti musí být zahrnuty v početním návrhu konstrukce.

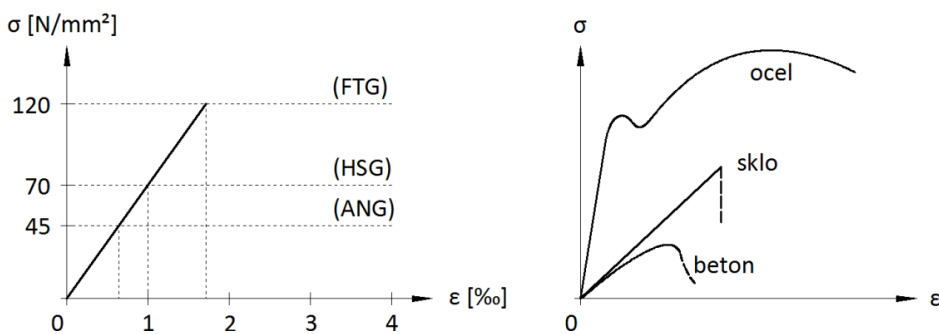
2 KONSTRUKČNÍ VRSTVENÉ SKLO A JEHO CHARAKTERISTIKY

Sklo vykazuje za běžných teplot dokonale pružné chování a k jeho porušení dojde vždy křehkým lomem v tažených vláknech. Nejdůležitější materiálové charakteristiky konstrukčního skla jsou uvedeny v tab. 1. Nejčastěji se používá sklo sodnovápenaté, borokřemičité sklo je vhodnější (vzhledem k tepelně fyzikálním vlastnostem) pro ohnivzdorné zasklení.

Tab. 1: Materiálové charakteristiky konstrukčního skla [1]

Veličina	Symbol	Jednotka	Sodnovápenaté sklo	Borokřemičité sklo
Hustota	ρ	kg/m ³	2500	2200 - 2500
Youngův modul	E	MPa	70 000	60 000 - 70 000
Poissonův koeficient	ν	-	0,23	0,2
Souč. tep. roztažnosti	α_t	K ⁻¹	$9 \cdot 10^{-6}$	$3,1 \cdot 10^{-6} - 6,0 \cdot 10^{-6}$

Pevnost skla v tahu a tlaku je teoreticky stejná (až několik tisíc MPa), prakticky je ale pevnost v tahu mnohem menší. To je způsobeno mechanismem porušení – křehkým lomem. Již z výroby jsou na povrchu skleněných tabulí trhlinky, které snižují pevnost materiálu. Pevnost skla v tahu není materiálová konstanta, ale závisí na historii zatížení, reziduálním napětí, mechanickém poškození povrchu, velikosti skleněného dílce a kvalitě prostředí, kde je dílec umístěn. Charakteristické hodnoty tahové pevnosti potom jsou 45, 70 a 120 MPa pro plavené (ANG), tepelně zpevněné sklo (HSG) a tvrzené sklo (FTG) respektive – viz obr. 1.



Obr. 1: Pracovní diagram skla [4] a srovnání s ostatními materiály [6]


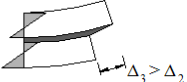


Tepelně zpevněné sklo a tvrzené sklo vznikne z plaveného skla procesem temperování, při kterém vznikají při povrchu skla tlaková zbytková napětí. Temperování může probíhat řízeným ohřevem a ochlazením skleněných tabulí nebo v chemické lázni. Reziduální tlaková napětí na straně tažených vláken brání rozevírání trhlin a tím zvyšují únosnost skleněného dílce (k porušení tahem je potřeba vyvolat větší zatížení). Lze uvést, že princip temperování skla je obdobný principu předpínání betonu. Velikost reziduálního napětí je odvislá od druhu a doby temperování.

Vrstvení je výrobní proces, kterým získáme výrobek ze skla (vrstvené sklo) skládající se ze dvou anebo více skleněných tabulí vzájemně spojených průhlednou plastickou mezivrstvou. Vrstvené sklo se může skládat pouze z jednoho druhu skleněných tabulí (ANG, HSG nebo FTG) nebo mohou být tyto skleněné tabule různým způsobem vhodně kombinovány. Během výrobního procesu je pomocí tlaku a teploty (autoklávování) zajištěno, aby mezi skleněnou tabulí a mezivrstvou nevnikly vzduchové dutiny. Nejvýznamnější vlastností vrstveného skla je nabytí pokritické únosnosti. Střepey jsou „přilepeny“ na materiál mezivrstvy a po porušení jsou nadále schopny přenášet určitou hodnotu zatížení.

Nejpoužívanějším materiálem mezivrstvy je polyvinyl butyralová folie (PVB). Nominální tloušťka jedné PVB folie je 0,38 mm. V praxi je jedna mezivrstva tvořena spíše dvěma (0,76 mm) nebo čtyřmi (1,52 mm) PVB foliemi. Polyvinyl butyralová folie je viskoelastický materiál – jeho fyzikální vlastnosti jsou silně závislé na době působení zatížení a teplotě. Při nízkých teplotách (pod 0°C) a pro krátkodobá zatížení je obecně PVB mezivrstva schopna plně přenášet smyková napětí z jedné skleněné tabule do druhé – jedná se o jakési dokonalé spřažení. Při vyšších teplotách a delším působení zatížení je tato schopnost významně redukována, při dlouhodobém zatížení nebo vysokých teplotách PVB mezivrstva prakticky není schopná přenášet smyková napětí mezi sousedními skleněnými tabulemi, které potom v podstatě působí samostatně.

V tabulce 2 jsou uvedeny doporučené hodnoty modulu pružnosti ve smyku PVB mezivrstvy pro různé typy zatížení při pokojové teplotě. V případě neznámé doby působení zatížení nebo teploty, při jaké bude vrstvené sklo zatíženo odolávat je nutné pro bezpečný a spolehlivý návrh uvažovat s nulovou hodnotou modulu pružnosti ve smyku. Pro ilustraci jsou v tabulce vykresleny průběhy normálového napětí po příčném řezu a vzájemné prokluzu skleněných tabulí. Poissonův součinitel PVB folie $\nu \approx 0,50$.

Tab. 2: Doporučené hodnoty modulu pružnosti ve smyku PVB mezivrstvy [3]

Doba trvání zatížení	velmi dlouhá > 10 dní	douhá < 10 dní	krátká < 3 min	velmi krátká < 10 s
Teplota [°C]	≈ 22	≈ 22	≈ 22	≈ 22
Typ zatížení	vlastní tíha	sníh	vítr	náraz
Modul pružnosti ve smyku G [MPa]	0,01	0,05	1	4
Průběh normálového napětí				

3 NUMERICKÉ MODELOVÁNÍ PRUTŮ Z VRSTVENÉHO SKLA

Numerické modely byly vytvořeny v softwarech založených na metodě konečných prvků ANSYS a RFEM z důvodu porovnání výsledků. V obou případech byly použity prostorové konečné prvky jak pro modelování skleněných tabulí, tak pro modelování PVB mezivrstvy. Byla provedena parametrická studie.

Proměnné a konstantní geometrické a materiálové parametry vstupující do výpočtů:

- $L = 3000$ mm (délka prutu kloubově uloženého na obou koncích)
- $b = 200$ mm (šířka průřezu)
- $t = 20$ mm (tloušťka monolitického skla nebo součet tloušťek jednotlivých skleněných tabulí vrstveného skla)
- $t_{int} = 1,52$ mm (tloušťka PVB mezivrstvy)
- $E = 70$ GPa, $\nu = 0,23$ (materiálové charakteristiky skla)
- $G_{int} = 4; 1; 0,05$ a $0,01$ MPa, $\nu = 0,499$ (materiálové charakteristiky PVB mezivrstvy)
- $N = 0$ až N_{cr} (osová zatěžovací síla)

Modelovány byly pruty z monolitického skla a vrstveného skla skládajícího se ze dvou (dvojsklo) a ze tří (trojsklo) skleněných tabulí. V případě monolitického skla a vrstveného skla složeného ze tří tabulí byly podpory i zatížení umístěny na linii procházející těžištěm celého průřezu, u vrstveného skla složeného ze dvou tabulí skla byly podpory i zatížení umístěny na linii procházející těžištěm jedné skleněné tabule.

Z předchozího vyplývá, že pruty z monolitického skla a trojskla jsou zatíženy centricky, kdežto pruty z dvojskla jsou zatíženy na excentricitě rovné součtu poloviny tloušťky skleněné tabule a poloviny tloušťky mezivrstvy. U všech prutů bylo uvažováno počáteční zakřivení (imperfekce) podle průběhu prvního vlastního tvaru prutu. Hodnota amplitudy imperfekce uprostřed délky prutu byla uvažována jako $L/386$, což je 95% kvantil počátečních deformací prutů vrstveného skla [1].

V programu ANSYS byly k modelování skleněných tabulí i mezivrstvy použity konečné prvky SOLID45. Pro vytvoření sítě byl průřez nadělen na 20 dílů po šířce a na 4 až 10 dílů po tloušťce (2 díly pro každou skleněnou tabuli a mezivrstvu), po délce byl prut nadělen na 200 dílů. Okrajové podmínky (zatížení a podepření modelu) byly aplikovány na uzly prvků. Byl proveden výpočet podle teorie velkých deformací s nejméně deseti přírůstky zatížení.

Tab. 3: Kritické síly pro čtyři vlastní tvary vypočtené softwarem ANSYS

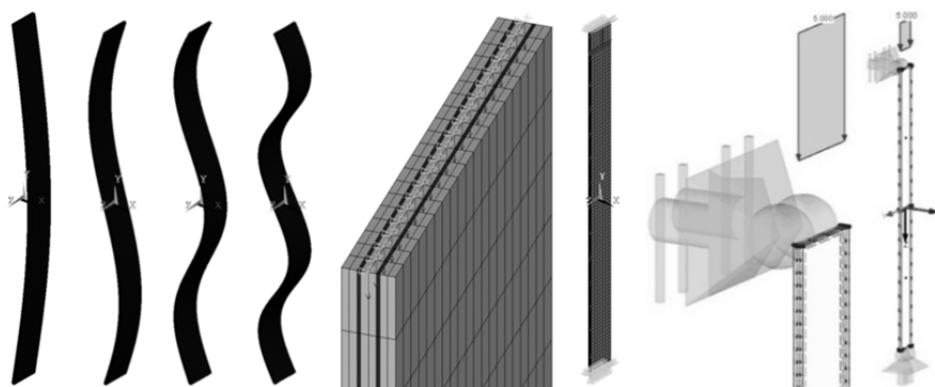
	vlastní tvar	monolitické sklo	dvojsklo - G_{int} [MPa]				trojsklo - G_{int} [MPa]			
			4,0	1,0	0,05	0,01	4,0	1,0	0,05	0,01
N_{cr} [kN]	1	10,24	11,45	8,99	3,36	2,73	12,63	8,86	1,98	1,32
	2	40,99	35,98	22,48	11,10	10,42	35,44	17,92	5,43	4,73
	3	92,36	62,75	37,77	23,95	23,24	55,22	25,73	11,15	10,45
	4	164,49	90,05	56,92	41,96	41,22	71,80	34,68	19,19	18,48

V softwaru RFEM nelze zadat konkrétní typ konečného prvku, síťování se provádí automaticky a lze ho poměrně hůře ovládat ve srovnání se softwarem ANSYS. Zatížení a podepření bylo aplikováno na linii. V tabulkách 3 a 4 jsou uvedeny kritické síly pro první čtyři vlastní tvary prutu z monolitického skla, vrstveného dvojskla a trojskla vypočítané stabilitní analýzou v programu ANSYS a RFEM respektive.

Tab. 4: Kritické síly pro čtyři vlastní tvary vypočtené softwarem RFEM

	vlastní tvar	monolitické sklo	dvojsklo - G_{int} [MPa]				trojsklo - G_{int} [MPa]			
			4,0	1,0	0,05	0,01	4,0	1,0	0,05	0,01
N_{cr} [kN]	1	10,39	11,89	9,23	3,53	2,92	13,83	10,06	3,18	2,52
	2	41,59	36,97	23,04	11,85	11,19	40,27	22,77	10,28	9,57
	3	93,66	64,27	39,17	25,72	25,04	66,20	36,71	22,12	21,39
	4	166,71	92,59	59,73	45,25	44,54	91,35	54,18	38,66	37,90

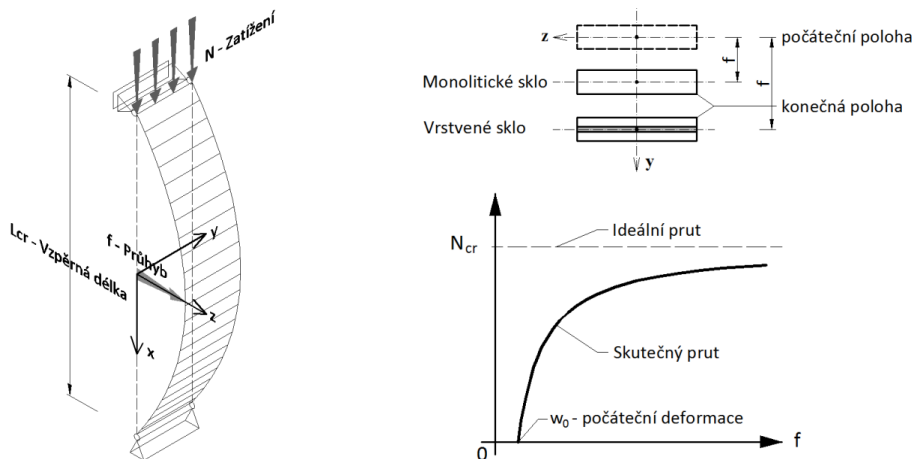
V obr. 2 jsou znázorněny první čtyři vlastní tvary prutu namáhaného na vzpěr, náhled na model vytvořený v obou výpočetních softwarech a detail modelování okrajových podmínek.



Obr. 2: Vlastní tvary, detail uložení a zatížení modelu v programech ANSYS a RFEM

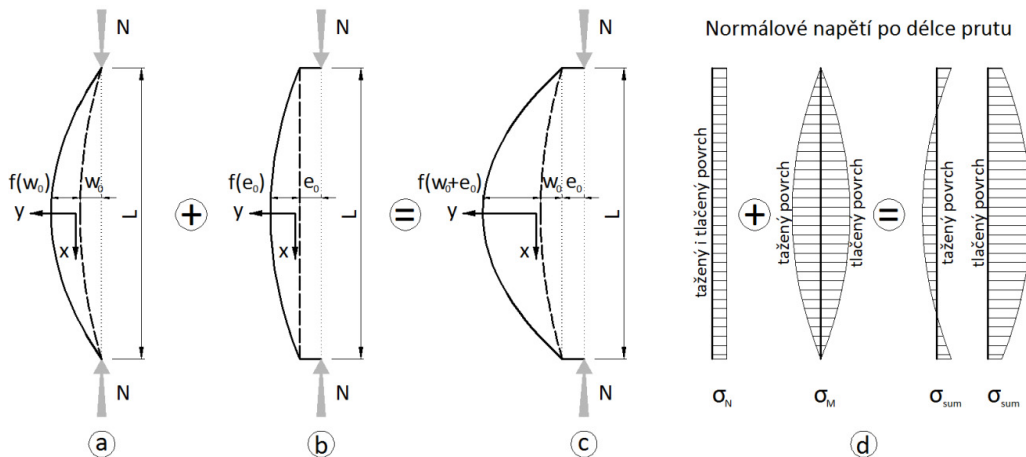
4 ANALYTICKÉ VÝPOČETNÍ MODELY TLAČENÝCH ŠTÍHLÝCH PRUTŮ

Skutečné konstrukční dílce nejsou dokonale přímé – vykazují deformace (počáteční geometrické imperfekce). Vlivem počátečních imperfekcí vykazují zatěžované pruty deformace již pro nízké hodnoty zatížení, které dále nelineárně rostou s přírůstkem zatížení až do dosažení mezního napětí nebo mezní deformace. Závislost deformací a napětí na zatížení je tedy nelineární a k popisu skutečného chování prvků ze skla je zapotřebí použít analýzu druhého řádu, ať už při výpočtu analytickém nebo numerickém – obr. 3.



Obr. 3: Vzpěr štíhlého skleněného prutu, vztah zatížení a deformace

Březina [2] uvádí výpočetní vztahy pro vyčíslení průhybu a normálového napětí skutečných (nedokonalých) kovových prutů zatížených osovou silou. Tyto vztahy mohou být použity i pro skleněné tlačené pruty, protože se chovají pružně. Ve vztazích se uvažuje se sinovým tvarem deformovaného prutu.



Obr. 4: Původní (čárkovaně) a konečný (plně) tvar sloupu; průběh napětí

Průhyb sloupu (příčné vybočení) po délce prutu se spočítá podle následujícího vztahu, tvar počátečního zakřivení je uvažován jako sinová půlvlna, obr.4a:

$$f(w_0)_x = w_0 \frac{N}{N_{cr} - N} \cdot \cos \frac{\pi \cdot x}{L} \quad (1)$$

Průhyb tlačeného prutu (vybočení) způsobený mimostředností v uložení se určí podle následující rovnice, obr.4b:

$$f(e_0)_x = e_0 \left(\frac{1}{\cos(L/2 \cdot \sqrt{N/EI_z})} - 1 \right) \cdot \cos \frac{\pi \cdot x}{L} \quad (2)$$

Velikost průhybu uprostřed délky tlačeneho prutu (maximální hodnota) se určí superposicí vztahů (1) a (2) následovně, obr.4c:

$$f(w_0 + e_0)_{L/2} = e_0 \left(\frac{1}{\cos(L/2 \cdot \sqrt{N/EI_z})} - 1 \right) + w_0 \frac{N}{N_{cr} - N} \quad (3)$$

Největší hodnoty normálových napětí (uprostřed rozpětí) se určí podle zásad pružnosti, ohybový moment uprostřed rozpětí se nahradí součinem osového zatížení a jeho výchylky od těžiště deformovaného prutu, obr.4d:

$$\sigma(w_0 + e_0)_{\max} = \frac{N}{A} \pm \frac{M_{L/2}}{W} = \frac{N}{A} \pm \frac{N}{W} (f(w_0 + e_0)_{L/2} + w_0 + e_0) \quad (4)$$

Ve vztazích uvedených výše jsou použity následující veličiny:

- w_0 – hodnota výchylky počáteční imperfekce (zakřivení prutu) v polovině délky prutu
- e_0 – hodnota mimostřednosti působíště zatížení od těžiště průřezu
- L – délka prutu (vzpěrná délka)
- x – vzdálenost vyšetřovaného bodu od středu prutu
- N – hodnota zatížení
- N_{cr} – kritická síla prutu
- E – modul pružnosti v tahu a tlaku skla
- I_z – moment setrvačnosti průřezu k měkké ose, pro případ prutu z vrstveného skla se nahradí efektivním momentem setrvačnosti $I_{z,eff}$

Pro praktické navrhování tlačeneých skleněných prutů je výhodné převzít přístup pro navrhování kovových prutů namáhaných na vzpěr využívající křivky vzpěrné pevnosti [8]. Mezikrokem pro výpočet návrhové vzpěrné únosnosti je určení efektivního momentu setrvačnosti, který je nutné znát pro určení kritické síly. Do jeho výpočtu vstupují následující veličiny: modul pružnosti mezivrstvy ve smyku, tloušťka mezivrstvy, tloušťky skleněných tabulí a jejich osová vzdálenost, modul pružnosti skla v tahu, šířka průřezu a vzpěrná délka prutu [7].

5 VÝSLEDKY PARAMETRICKÉ STUDIE

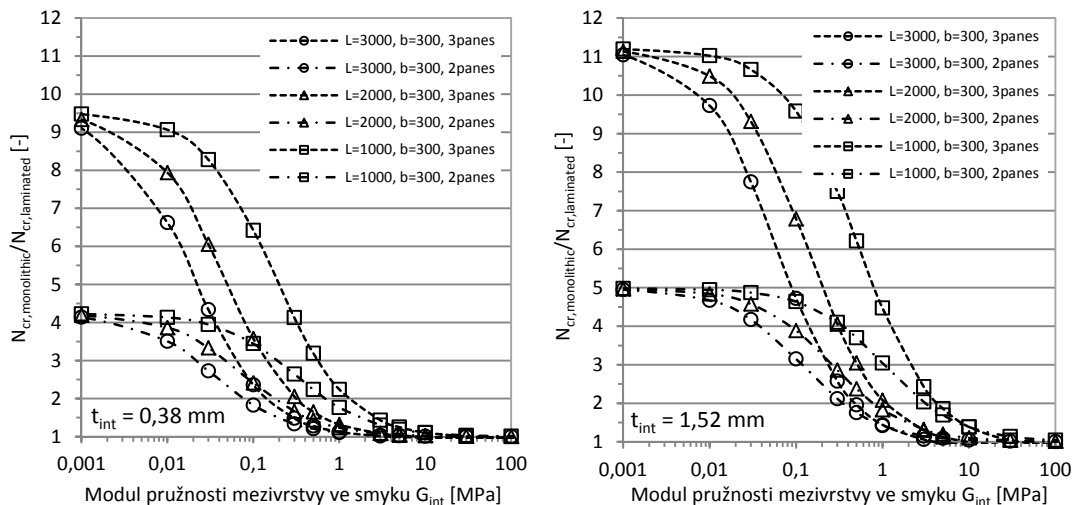
Hodnoty kritických sil prvních vlastních tvarů tlačeneých prutů z monolitického skla a vrstveného skla složeného ze dvou resp. tří skleněných tabulí délky 3000 mm a šířky 200 mm vypočtené analyticky a numerickým modelováním jsou uvedeny v tab. 5.

Tab. 5: Kritické síly pro první vlastní tvar

	výpočet	monolitické sklo	dvojsklo - G_{int} [MPa]				trojsklo - G_{int} [MPa]			
			4,0	1,0	0,05	0,01	4,0	1,0	0,05	0,01
N_{cr} [kN]	analytický	10,24	11,45	9,00	3,36	2,73	12,63	8,86	1,97	1,31
	ANSYS	10,24	11,45	8,99	3,36	2,73	12,63	8,86	1,98	1,32
	RFEM	10,39	11,89	9,23	3,53	2,92	13,83	10,06	3,18	2,52

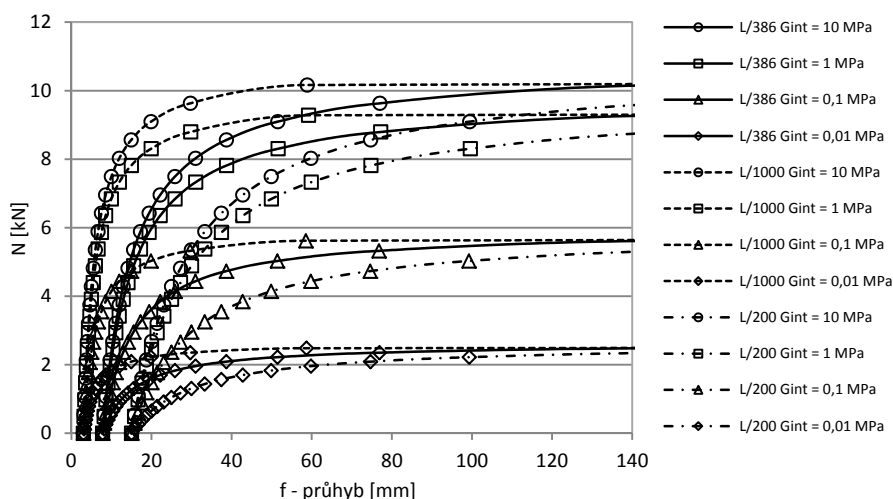
Kritické síly z programu ANSYS jsou prakticky totožné s hodnotami spočtenými analyticky, program RFEM udává hodnoty vyšší, přičemž rozdíl vzhledem k analytickému výpočtu roste s klesající hodnotou modulu pružnosti ve smyku mezivrstvy a se stoupajícím počtem tabulí. Tento rozdíl může být přisouzen méně vhodné síti konečných prvků.

V obr. 5 je vynesena závislost kritické síly prutu z vrstveného skla na hodnotě modulu pružnosti ve smyku mezivrstvy. Pro názornost jsou na svislé ose kritické síly sloupů z vrstveného skla ($N_{cr,laminated}$) vztaženy ke kritické síle sloupu z monolitického skla ($N_{cr,monolithic}$). Na vodorovné ose jsou vynášeny hodnoty modulu pružnosti ve smyku mezivrstvy G_{int} v logaritmickém měřítku. Z průběhů závislostí lze vyčíst, že pro vysoké hodnoty modulu pružnosti ve smyku se vrstvené sklo chová téměř jako monolitické, při poklesu hodnot G_{int} kritická síla výrazně klesá, až dosáhne hodnoty přibližně jedné pětiny resp. jedné desetiny kritické síly monolitického skla pro vrstvené sklo složené ze dvou resp. tří skleněných tabulí. Čím je mezivrstva tlustší, tím je vliv pružného spojení jednotlivých skleněných tabulí vyšší (klesá kritická síla).



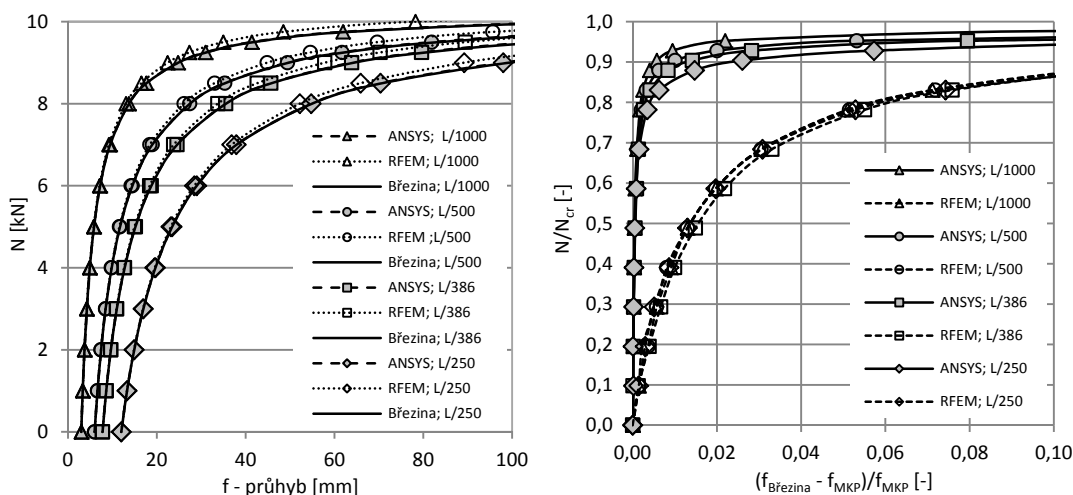
Obr. 5: Závislost kritické síly na modulu pružnosti ve smyku mezivrstvy pro $t_{int} = 0,38$ a $1,52$ mm

V obr. 6 jsou vyneseny závislosti příčné deformace (průhybu) na zatížení pro pruty z vrstveného skla složeného ze dvou skleněných tabulí a jedné mezivrstvy podle teorie druhého řádu. Byly voleny tři hodnoty počáteční imperfekce zakřivení prutu ($L/200$; $L/386$ a $L/1000$) a čtyři hodnoty modulu pružnosti ve smyku mezivrstvy ($G_{int} = 10$; 1 ; $0,1$ a $0,01$ MPa). Křivky vycházejí ze společného bodu (imperfekce), poté se rozdělí a vzájemně se přibližují křivky prutů se stejnou hodnotou modulu pružnosti mezivrstvy ve smyku G_{int} .



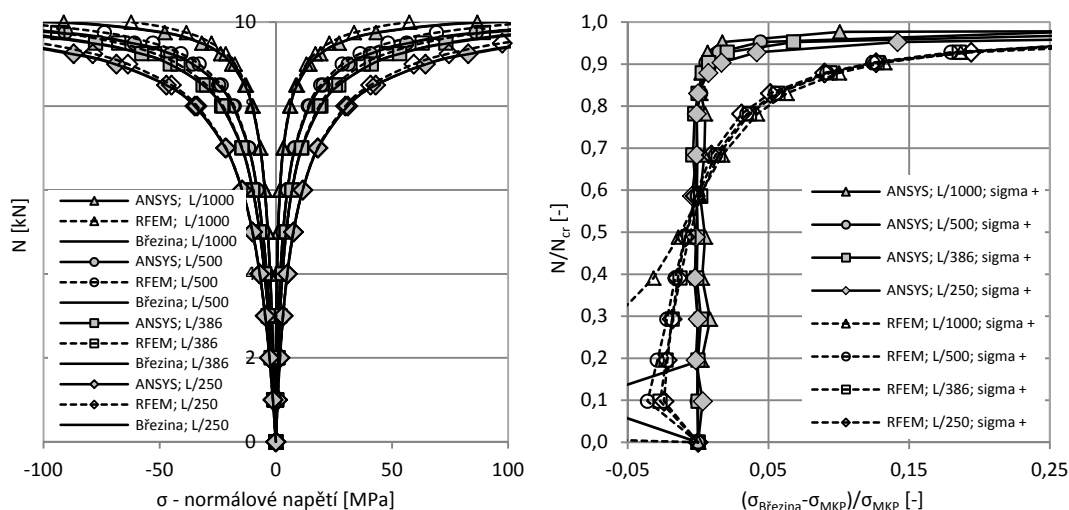
Obr. 6: Závislost deformace (průhybu) na zatížení podle teorie druhého řádu

V grafu vlevo v obr. 7 jsou vyneseny křivky závislosti příčné deformace na zatížení pro proměnné hodnoty velikosti počáteční imperfekce. Pro konkrétní hodnotu počáteční deformace přísluší vždy tři křivky – plná čára pro analytický výpočet podle Březiny, čárkovaná čára s plnou značkou pro numerický výpočet v programu ANSYS a tečkovaná čára s prázdnou značkou pro numerický výpočet v programu RFEM.



Obr. 7: Porovnání deformací podle numerických modelů a analytického výpočtu

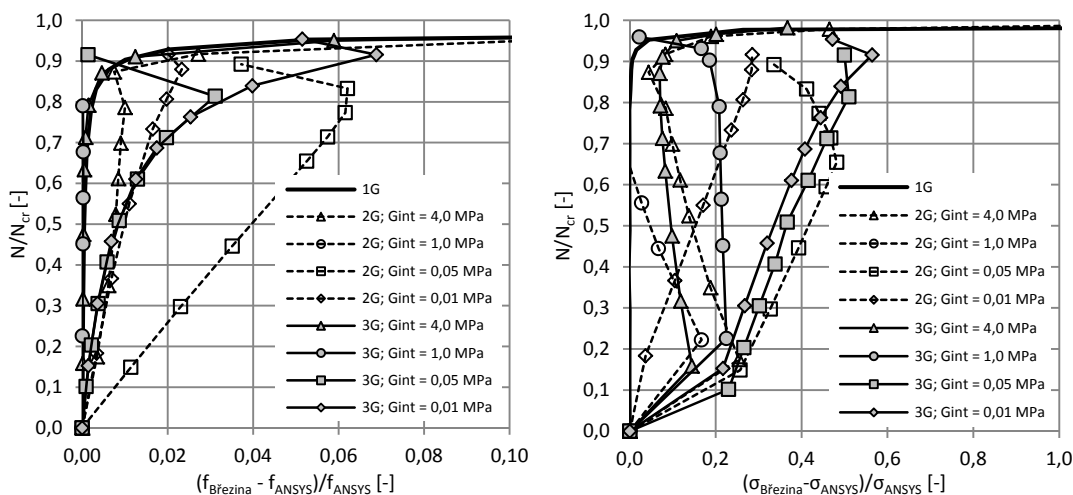
Pro lepší názornost jsou v obr. 7 vpravo vyneseny křivky znázorňující odchylku numerického výpočtu od výpočtu analytického. Na vodorovné ose je vynesen poměrný rozdíl výsledků vzhledem k hodnotám z numerického modelování, na svislé ose je potom poměr zatěžovací síly k příslušné kritické síle pro daný prut. Zde je již patrný rozdíl mezi výsledky získanými z obou programů MKP. Program ANSYS poskytuje výsledky téměř nelišící se od analytických výpočtů při malém zatížení, při zatížení rovnajícím se osmdesáti procentům kritické síly je rozdíl menší než 0,5%. Při vyšších hodnotách zatížení již analytický výpočet nedostačuje, numerický výpočet podle teorie velkých deformací poskytuje reálnější výsledky. Naopak výstupy z programu RFEM jsou poměrně odlišné již při nízkých hodnotách zatěžovací síly, na úrovni zatížení 80% N_{cr} je rozdíl numerického a analytického výpočtu přibližně 6%.



Obr. 8: Porovnání napětí podle numerických modelů a analytického výpočtu

Největší a nejmenší hodnoty normálových napětí v krajních vláknech uprostřed délky prutu v závislosti na osově síle jsou uvedeny v obr. 8 vlevo. Pro lepší představu o rozdílech výsledků třech výpočtů (Březina, ANSYS, RFEM) jsou v obrázku 8 vpravo zobrazeny křivky vyjadřující závislost poměrného rozdílu napětí získaného analytickým výpočtem a numerickým na poměru zatěžovací síly ke kritické síle. Z důvodu zvýšení přehlednosti jsou vyneseny křivky pouze pro kladná napětí. Z obrázku je patrné, že ANSYS poskytuje řádově přesnější výsledky než RFEM.

Na základě předešlých poznatků o přesnosti výpočtů výše uvedených programů byl pro modelování tlacených prutů z vrstveného skla vybrán program ANSYS. V následujícím byly numericky modelovány sloupce z vrstveného skla skládajícího se ze dvou a tří skleněných tabulí s mezivrstvou z polyvinyl butyralové folie tloušťky 1,52 mm s proměnnou hodnotou modulu pružnosti ve smyku mezivrstvy.



Obr. 9: Poměrné vyjádření rozdílu deformací a napětí podle analytického výpočtu a MKP

Na obr. 9 jsou graficky zobrazeny rozdíly mezi analytickým a numerickým výpočtem příčné deformace (vlevo) a normálového napětí (vpravo) uprostřed tlaceného skleněného prutu z vrstveného skla s počáteční imperfekcí o velikosti $L/386$, přičemž křivky označené 2G a 3G platí pro vrstvené sklo složené ze dvou resp. tří skleněných tabulí, 1G označuje monolitické sklo.

Přesnost výpočtu průhybů vrstveného skla je řádově menší než u monolitického skla, přesto je dostatečná – největší rozdíl je přibližně 6% při zatížení 80% N_{cr} . Rozdíly v hodnotách normálových napětí získaných analytickým výpočtem a modelováním MKP v programu ANSYS jsou výrazné, pohybují se v řádech až desítek procent již pro nízké hodnoty zatížení.

Numerické modely zcela potvrdily předpoklady o průbězích normálových napětí uvedené v tab. 2: při vysokých hodnotách G_{int} se průřez chová jako téměř dokonale spřažený a průběh napětí po celém průřezu je přibližně lineární, se snižující se hodnotou G_{int} se snižuje spolupůsobení skleněných tabulí (klesá schopnost přenosu smykových napětí mezivrstvou mezi sousedními skly), při velice nízkém modulu pružnosti ve smyku již skleněné tabule působí téměř samostatně a průběh normálových napětí je lineární v každé samostatné tabuli, přičemž v místě mezivrstvy dochází ke změně znaménka.

6 ZÁVĚR

Z provedené parametrické studie vyplývá, že na únosnost tlaceného prutu z vrstveného skla má zásadní vliv počet skleněných tabulí, ze kterých se průřez skládá a hodnota modulu pružnosti ve smyku mezivrstvy, která závisí zejména na teplotě prostředí a době trvání zatížení. Pro dlouhodobé zatížení nebo vysoké teploty je únosnost vrstveného skla pětkrát až desetkrát nižší, než pro ekvivalentní monolitické sklo.

Analytický výpočet kritických sil prutů z vrstveného skla je přesný – výsledky se zcela shodují s hodnotami získanými numerickým modelováním v programu ANSYS. Podobně tomu je i v případě deformací, kde jsou výsledky z ANSYSu téměř shodné s výsledky analytického výpočtu, výrazný rozdíl nastává až při zatížení na úrovni přibližně 90% N_{cr} . Hodnoty kritických sil, deformací a napětí vypočtené programem RFEM se liší (v určitých případech velmi výrazně) od hodnot vycházejících z analytického řešení nebo modelování v ANSYSu.

Pro ověření správnosti analytického výpočtu a numerického modelování je nutné provést sérii experimentů tlačných skleněných prutů z monolitického i vrstveného skla. Cílem výzkumu je stanovení vhodného analytického modelu pro návrh skleněných prutů namáhaných na vzpěr. V rámci zkoušek je nutné změřit hodnoty počátečních imperfekcí. Na základě výsledků experimentů se poté určí nevhodnější křivka vzpěrné pevnosti pro výpočet návrhové vzpěrné únosnosti skleněného prutu (analogie k teorii navrhování kovových tlačných prutů).

V numerických i analytických modelech se předpokládá, že jednotlivým skleněným tabulím není bráněno ve vzájemném pohybu. V praxi je však skleněný prut usazen prostřednictvím pružného tmelu do kovového pouzdra, které slouží ke vzájemnému spojování skleněných dílců a k přenosu vnitřních sil. Pružný tmel částečně brání volnému pohybu konců skleněných tabulí a zvyšuje tak tuhost kompozitního průřezu. Pokud tento jev zanedbáme, pohybujeme se na straně bezpečné.

PODĚKOVÁNÍ

Projekt byl realizován za finanční podpory ze státních prostředků prostřednictvím Grantové agentury České republiky - registrační číslo projektu GAČR P105/12/0314 a v rámci projektu specifického výzkumu VUT v Brně FAST-J-13-2036.

LITERATURA

- [1] HALDIMANN, M., LUIBLE, A., OVEREND, M. *Structural Use of Glass*. Zurich: ETH Zurich, 2008. ISBN 3-85748-119-2.
- [2] BŘEZINA, V. *Vzpěrná únosnost kovových prutů a nosníků*. Praha: ČSAV, 1962.
- [3] LAUFS, W., LUIBLE, A. Introduction on Use of Glass in Modern Buildings. Rapport N° ICOM 462. EPFL – ICOM Lausanne, 2003.
- [4] PEŠEK, O., MELCHER, J. Study of Behaviour of Beams and Panels Based on Influence of Rigidity. *Procedia Engineering*, Podbanské: Elsevier, 2012, Nr. 40, pp. 363-368. ISSN 1877-7058.
- [5] MELCHER, J., KARMAZÍNOVÁ, M. The Experimental Verification of Actual Behaviour of the Glass Roofing Structure under Uniform Loading. In *Proceedings of EUROSTEEL 2005 4th European Conference on Steel and Composite Structures*, Maastricht, 2005, volume B. ISBN 3-86130-812-6.
- [6] MELCHER, J., KARMAZÍNOVÁ, M. Design and experimental verification of actual behaviour of structural glass in roofing and façade systems. In *Proceedings of 3rd International Conference on Structural Engineering, Mechanics and Computation*, Cape Town: Millpress, 2007, pp. 657-658. ISBN 978-90-5966-054-0.
- [7] BELIS, J., VAN IMPE, R. Buckling-related problems of glass beams. In *Research in Architectural Engineering series*. 2007, Nr. 1, pp. 169-176. ISSN 1873-6033.
- [8] LUIBLE, A., CRISINEL, M. Buckling strength of glass elements in compression. In *Structural Engineering International: Journal of the International Association for Bridge and Structural Engineering (IABSE)*, 2004, pp. 120-125. ISSN 1873-6033.

Oponentní posudek vypracoval:

Doc. Ing. Martin Psotný, PhD., Katedra stavební mechaniky, Stavební fakulta, STU v Bratislavě.

Ing. Vít Křivý, Ph.D., Katedra konstrukcí, Fakulta stavební, VŠB-TU Ostrava.

Jaroslav SANDANUS¹, Kristián SÓGEL²

MODELOVANIE NOSNÝCH KONŠTRUKCIÍ PAMIATKOVÝCH OBJEKTŮV

LOAD-BEARING STRUCTURE MODELLING OF HISTORIC BUILDINGS

Abstrakt

V príspevku je predstavená analýza a následná sanácia strešných konštrukcií dvoch sakrálnych stavieb. V prvom prípade ide o veže kostola kláštorného komplexu v Jasove a druhým opisovaným objektom je kaplnka v Bratislave. Prostredníctvom týchto konštrukcií sú predstavené postupy a metódy modelovania historických stavieb z dreva. Pre každý objekt je predstavená diagnostická prehliadka, statická analýza a návrh rekonštrukcie a sanácie.

Kľúčové slová

Pamiatkový objekt, drevená nosná konštrukcia, statická analýza, zaťaženie vetrom, konštrukčná ochrana, drevokazné huby, drevokazný hmyz.

Abstract

In the contribution the analysis and subsequent reconstruction of two religious building's roof structure is presented. In the first case, the towers of the monastery church in Jasov are described. Second the Chapel in Bratislava is introduced. Through these structures the modelling problems and methods by historic buildings are presented. For each object the diagnostic inspection, structural analysis and recommendation for reconstruction is mentioned.

Keywords

Historic monument, timber load-bearing structure, structural analysis, wind load, structural protection, wood-destroying fungi and insects.

1 ÚVOD

Ochrana a reštaurovanie pamiatok je odborom, ktorý si vyžaduje spoluprácu so všetkými vedami a technikami, schopnými napomáhať pri výskume a záchrane pamiatkového dedičstva. Obnova je úkon, ktorý má mať povahu výnimočnosti. Jeho cieľom je zachovať a odhaľovať estetické a historické hodnoty pamiatky. Zakladá sa na rešpektovaní pôvodných stavebných materiálov nosných prvkov a zachovaní ich pôvodných prípojov. Pôvodná myšlienka pôsobenia konštrukcie sa tak premieta do statického modelovania nosnej konštrukcie. Zohľadniť pritom treba aj všetky zmeny, ktoré vznikli na konštrukcii vplyvom času [1].

2 VEŽE KLÁŠTORA PREMONŠTRÁTOV V JASOVE

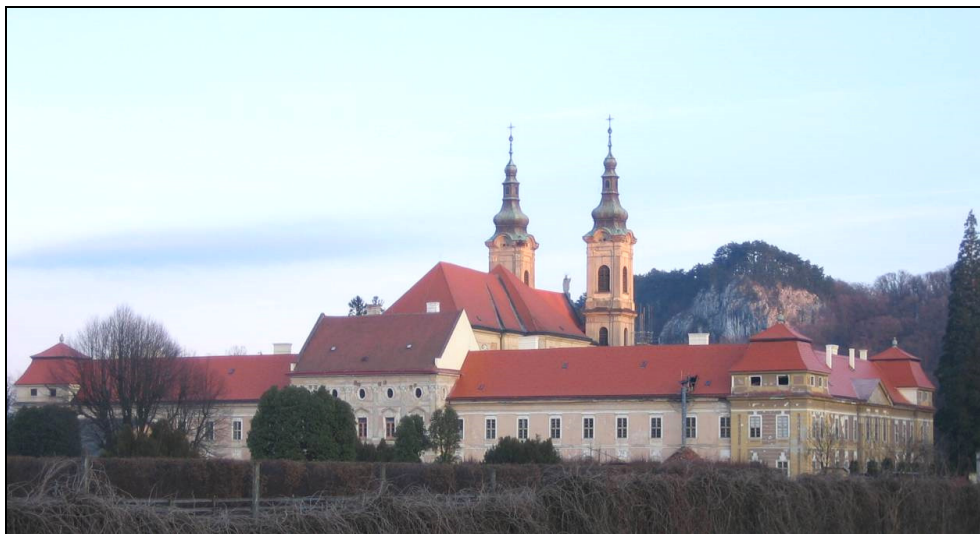
Vďaka harmónii kláštora s prírodou, jeho polohe naproti Jasovskej skale (obr.1), severo-južnej orientácii a vzácnej záhrade patrí kláštorný komplex jasovského premonštrátskeho opátstva

¹ Doc. Ing. Jaroslav Sandanus, PhD., Katedra kovových a drevených konštrukcií, Stavebná fakulta STU v Bratislave, e-mail: jaroslav.sandanus@stuba.sk.

² Ing. Kristián Sógel, PhD., Katedra kovových a drevených konštrukcií, Stavebná fakulta STU v Bratislave, Radlinského 11, 813 68 Bratislava, e-mail: kristian.sogel@stuba.sk.

k najvýznamnejším sakrálnym areálom na Slovensku. Pre svoje urbanistické, architektonické a výtvarné kvality je od roku 1970 národnou kultúrnou pamiatkou.

Kláštor má obdĺžnikový pôdorys zahŕňa dve symetricky situované dvojpodlažné budovy, ležiace po stranách centrálného jednolodového kostola s dvojvežovým priečelím. V pravom aj ľavom krídle sú uzavreté rajske dvory štvorcového pôdorysu. Fasády sú zvýraznené náročnými vežami s manzardovou strechou a členené pravidelným rytmom okien, prerušovaným rizalitmi. V predĺženej hlavnej osi kostola je umiestnená kláštorná knižnica s takmer 80000 titulmi.



Obr. 1: Pohľad na kláštor zo severnej strany

Rekonštrukcia kláštora sa realizovala niekoľko rokov. Po oprave krovov a výmene strešnej krytiny sa pristúpilo k oprave oboch kláštorných veží.

Drevená konštrukcia veží je vysoká 15 m, je kotvená do spodnej murovanej stavby oceľovými ťahadlami. Konštrukcia má pôdorys nerovnostranného osemuholníka. Veža má osem hlavných stĺpov umiestnených vo vrcholoch osemuholníka. Stĺpy sú podpierané na vodo rovné účinky sústavou šikmých vzpier. Stĺpy sú uložené na trámy kríža základne. Vo výške 9,5 m od základne je nosný trámový kríž helmy veže. Oba kríže sú zhotovené z dubového dreva. Ostatné prvky sú z dreva červeného smreka a smreka obyčajného [2].

Zámerom investora bola kompletná výmena oplechovania veže, ktoré bolo na viacerých miestach poškodené jednak vplyvom degradácie plechu a jednak vplyvom poškodenia debnenia veže a niektorých nosných prvkov.

Cieľom diagnostickej prehliadky bolo určenie rozsahu poškodenia drevených prvkov biotickými a abiotickými škodcami. Zistenia z prehliadky boli využité pri návrhu sanácie poškodených prvkov. Na základe diagnostickej prehliadky a statického posudku jednotlivých nosných prvkov a ich spojov bola navrhnutá rekonštrukcia drevených konštrukcií veží.

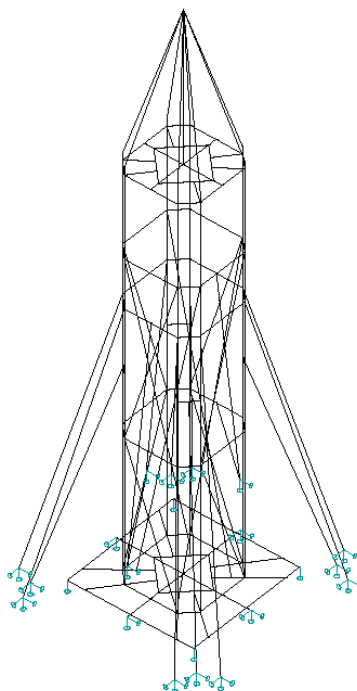
2.1 Statická analýza

Proces rekonštrukcií historických stavieb pozostáva z nasledovných krokov. V prvom rade je potrebné objekt geodeticky zmerať. Po zameraní nasleduje podrobná diagnostická prehliadka, ktorá je zameraná na biotické a mechanické poškodenia prvkov nosnej konštrukcie a ich spojov. Na základe podrobného zamerania a diagnostickej prehliadky sa vypracuje statická analýza objektu.

Podobne sa postupovalo aj pri objekte veží kostola kláštora v Jasove. Model konštrukcie pre statickú analýzu so skutočnými prierezmi je znázornený na obrázku 2. Zistilo sa, že konštrukcie veží

nie sú dostatočne vystužené. V jednej z veží chýbalo priestorové vystuženie, zabraňujúce skrúteniu veže. Táto veža bola v čase prehliadky mierne skrútená okolo zvislej osi.

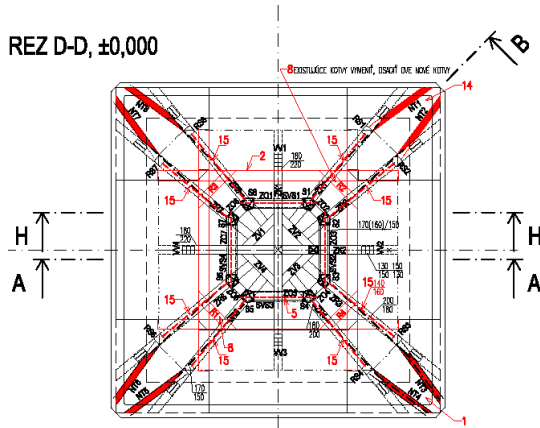
Vzhľadom na tvar konštrukcie rozhodujúcim zaťažením je vietor. Pri statickej analýze bol posúdený stav pred rekonštrukciou (keď nebola drevená konštrukcia dostatočne kotvená do murovanej časti), počas rekonštrukčných prác (keď sa odstráni krytina veží), a na záver stav po doplnení dostatočného počtu kotiev. Pri modelovaní bolo uvažované s čisto tlačnými a čisto ťahovými prvkami. Tesárske spoje drevených nosných prvkov predurčujú spôsob ich namáhania. Väčšina prvkov z dreva môže prenášať iba tlakové namáhanie, ich prípoje nie sú navrhované na preberanie väčších ťahových účinkov. Spojovacie prostriedky v podobe drevených kolíkov slúžia iba na zaistenie pozície jednotlivých prvkov v prípoji. Ťahadlá boli použité iba na kotvenie drevenej veže do murovanej stavby.



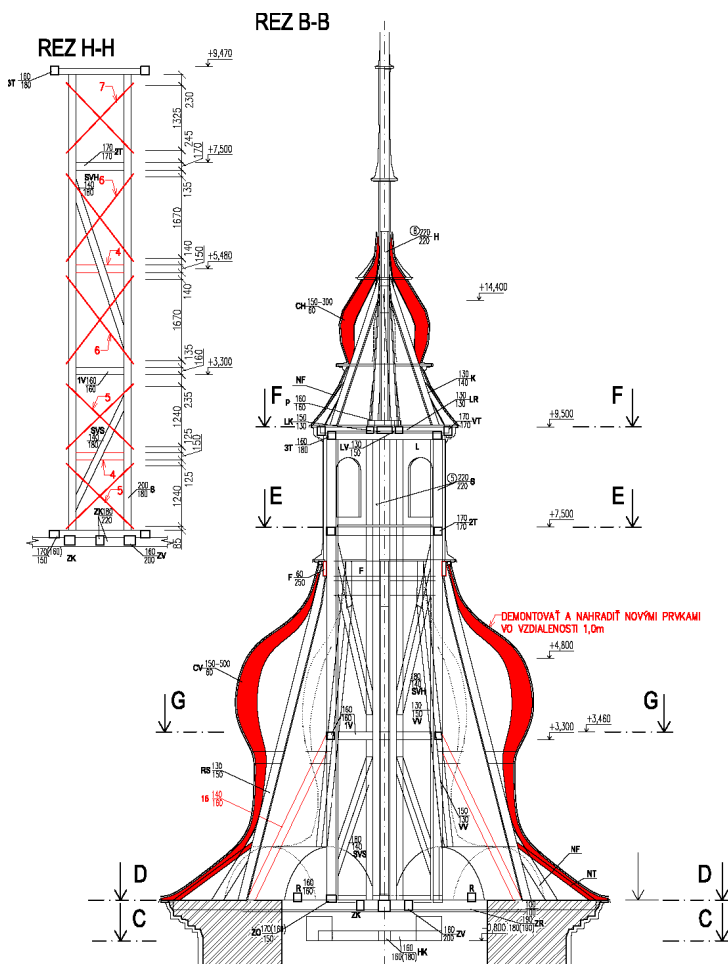
Obr. 2: Priestorový model pôvodnej konštrukcie veže

2.2 Návrh sanácie

Na základe diagnostickej prehliadky a statického posudku jednotlivých nosných prvkov a ich spojov bola navrhnutá sanácia drevených konštrukcií veží (obr. 3 a 4). V prvom rade bolo potrebné zosilniť základňu veže, kvôli biotickému poškodeniu niektorých prvkov v mieste uloženia na murivo. Ďalej bolo nutné kompletne vymeniť prvky cibulových skruží a debnenia. Doplnili sa nové oceľové kotevné prvky tak, aby bola drevená konštrukcia kotvená v každom rohu do stien. Navrhol sa dodatočný výstužný systém z kruhovej ocele, umiestnený medzi hlavné nosné stĺpy. Nové oceľové prvky boli určené iba na ťahové namáhanie. Tieto pre svoj plný kruhový prierez nie sú schopné prenášať tlakové namáhanie. K hlavným nosným stĺpom sa umiestnili ďalšie vzperky, zabezpečujúce lepší roznos zaťaženia do základne veže. Pre prípad budúcich prehliadok sa navrhol systém rebríkov a medzipodesta pre bezpečný prístup do najvyššie položených miest veže. Medzipodesta okrem bezpečnosti prístupu osôb prispieva aj k zvýšeniu priestorovej tuhosti konštrukcie.



Obr. 3: Návrh sanácie základne veže



Obr. 4: Návrh sanácie veže v priečnom reze a nový výstužný systém

3 KAPLNKA RUŽENCOVEJ PANNY MÁRIE V DÚBRAVKE

Podľa dostupných historických prameňov pochádza kaplnka z obdobia okolo roku 1780 a pravdepodobne ide o zvyšok nedostaveného barokového kostola. V období okolo roku 1870 bola v rámci stavby vtedajšej drevenej prístavby realizovaná aj úprava na krove hlavnej lode. Vežička kaplnky bola dostavaná až dodatočne, čo bolo zistené počas diagnostickej prehliadky. Je pravdepodobné, že okolo roku 1920 boli vymenené niektoré nosné prvky. O sanácii však neexistuje u objednávateľa posudku žiaden záznam. V roku 1970 sa realizovala výmena strešnej krytiny dreveného šindľa a pravdepodobne v tom čase boli realizované aj posledné opravy na konštrukcii vežičky.



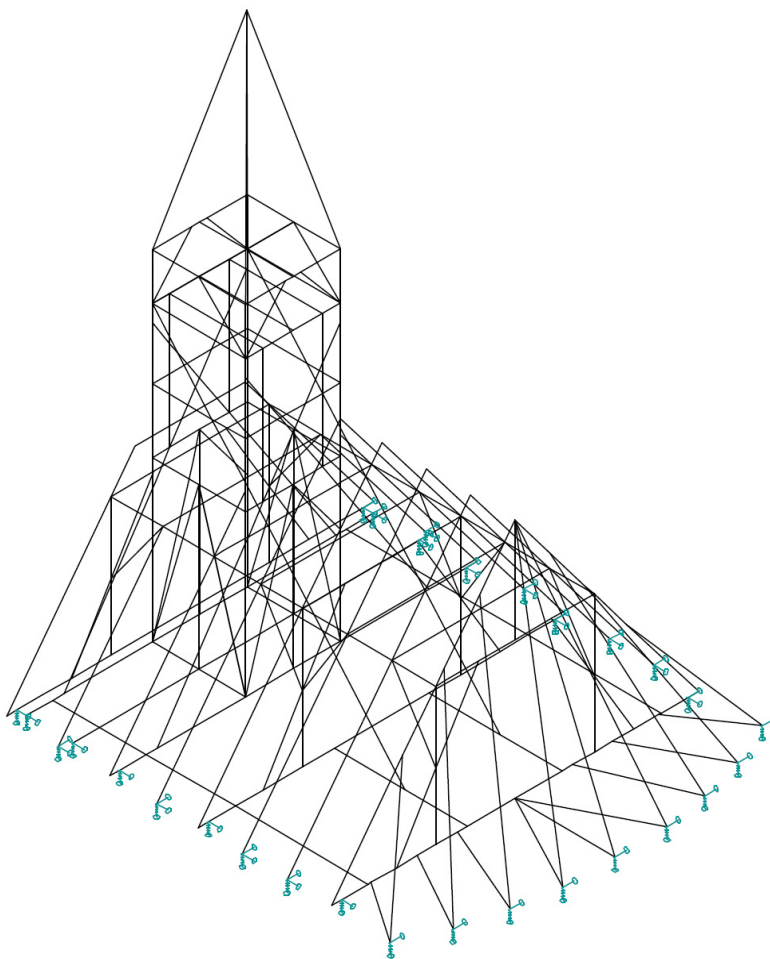
Obr. 5: Kaplnka Ružencovej Panny Márie

O rekonštrukcii barokovej kaplnky sa začalo uvažovať v „poslednej“ chvíli. Veža kaplnky bola naklonená smerom k oltáru, pričom naklonenie bolo asi 0,5 metra v najvyššom bode veže. Tento údaj bol získaný z geodetického zamerania objektu. Počas diagnostických prehliadok sa zistili vážne poškodenia väzných trávov, čo spôsobilo naklonenie vežičky. Vlhkosť drevených prvkov krovu bola meraná prenosným vlhkomerom na charakteristických miestach a charakteristických prvkoch: pomúrnice, väzné trámy, podružné trámy, stĺpy, vzpery, väznice, hambálky a krokvy. Na viacerých drevených prvkoch bola nameraná absolútna vlhkosť nad 35%, čo nebolo zodpovedajúce rovnovážnemu vlhkosťnému stavu dreva pre vtedajšie klimatické pomery v krove (dva týždne pred prehliadkou vôbec nepršalo). Takýto stav bol nameraný aj na miestach, kde nemohlo dôjsť k priamemu zatekaniu dažďovej vody. Podľa nameraných hodnôt vlhkosti dreva je pravdepodobné, že krytina kostola nespĺňa svoju funkciu z hľadiska tesnosti škár a takisto z hľadiska nepriepustnosti vodných pár [3].

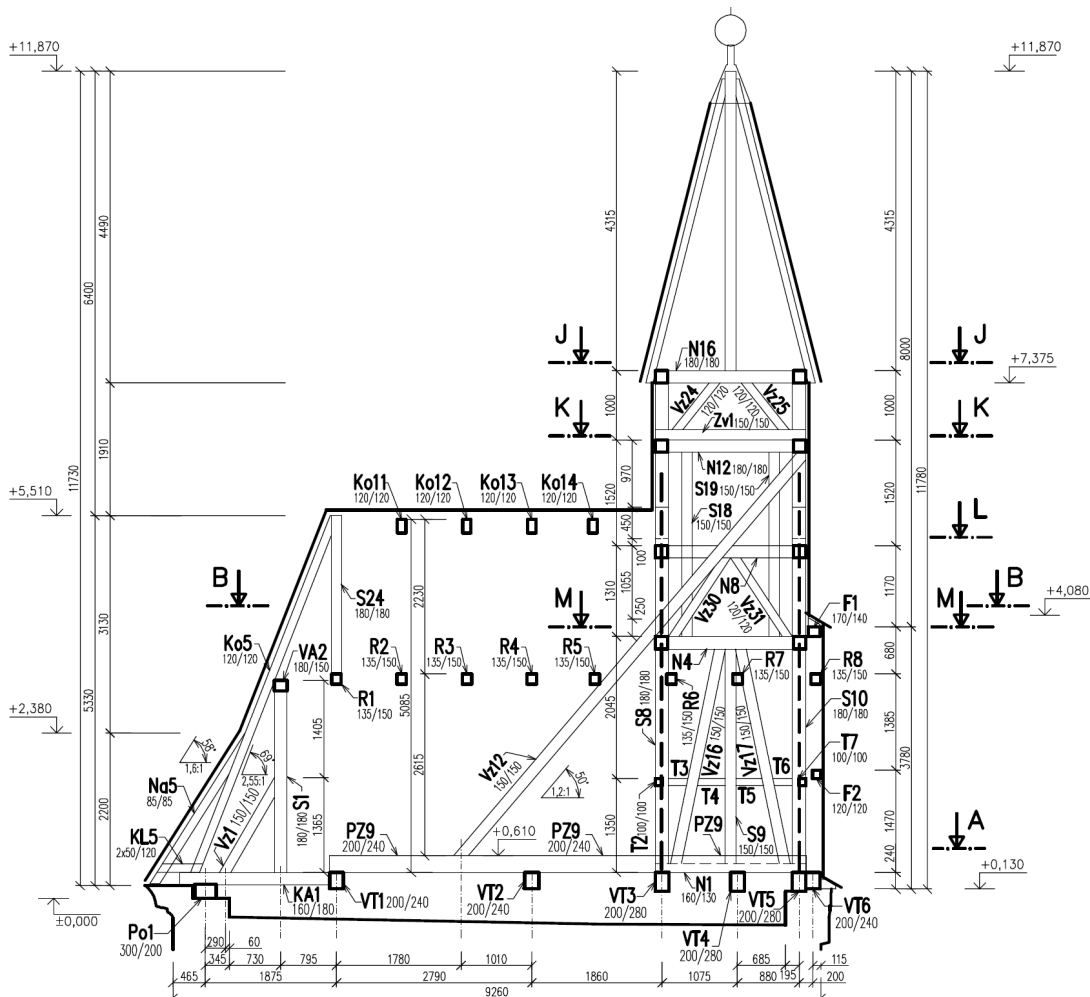
Predchádzajúca sanácia krovu kaplnky bola neodborná, pretože pôvodná poškodená konštrukcia bola sanovaná amatérskym spôsobom pridávaním rôznych doplnkových konštrukcií, ktoré majú veľmi malú statickú účinnosť, sú pripájané neodborne a pôvodné nosné prvky neboli

žiadnym spôsobom ochránené voči postupujúcej hnilobe, resp. neboli ani nijakým spôsobom sanované. Zásah do nosného systému v takejto miere bol veľmi necitlivý a zrejme spôsobil ďalšiu rýchlo postupujúcu degradáciu drevenej hmoty všetkých nosných prvkov. Ako podporné body bol využitý klenbový strop, čo je hľadiska nosného systému neprípustné a nezodpovedá pôvodnej myšlienke väznicovej sústavy krovu a vežovej sústavy dostavanej veže. Na základe diagnostickej prehliadky bol konštatovaný havarijný stav strešnej konštrukcie kaplnky.

Pri diagnostickej prehliadke sa zistilo, že drevená konštrukcia kaplnky nie je kotvená do murovanej stavby. Bolo potrebné modelovaním zistiť, či môže konštrukcia fungovať s podperami, ktoré preberajú iba tlakové namáhanie. Pri modelovaní sa využili nelinearity podpíer a zároveň nelinearity niektorých prútov. Mnohé prípoje v historických stavbách boli vyhotovené tak, že dokážu preniesť relatívne veľký tlak, ale takmer žiaden ťah. Pri tejto stavbe to platilo aj pre kotvenie konštrukcie do murovanej stavby.



Obr. 6: Priestorový model konštrukcie



Obr. 7: Pozdĺžny rez strešnou konštrukciou kaplnky

Následne bol vypracovaný projekt rekonštrukcie, pričom bolo snahou zachovať časť pôvodnej konštrukcie. Počas projekčných prác bolo konzultované s Krajským pamiatkovým úradom, keďže sa väčšina pôvodných prvkov už nedala zachrániť. V rámci obnovy krovu bolo možné zachovať jednu plnú väzbu väznicovej sústavy. Ostatná časť krovu bola nahradená novou konštrukciou, ktorá je vernou kópiou pôvodnej konštrukcie s použitím reziva tej istej dreveniny a s použitím takej istej krytiny. Z hľadiska vnútornej klímy priestoru krovu bolo potrebné vytvoriť účinné vetranie podkrovného priestoru. Prívod vzduchu bol navrhnutý v miestach atiky a odvod vzduchu cez vežu kaplnky.

4 ZÁVER

Obnova nosných konštrukcií historických objektov je veľmi špecifickou oblasťou, kde sa stretávajú požiadavky zachovania pamiatky v čo najpôvodnejšom stave a s pôvodnými materiálmi. Zároveň je požadované, aby stavba spĺňala všetky kritériá bezpečnosti a spoľahlivosti. Pri rekonštrukciách pamiatkových objektov je potrebné zohľadniť viacero faktorov, ktoré vstupujú do činnosti projektanta. Je potrebné zosúladiť požiadavky pamiatkových úradov, investorov, architektov, statikov a dodávateľov. Drevené nosné konštrukcie si vyžadujú predovšetkým spoluprácu

odborníkov, ktorí posudzujú mieru poškodenia samotnej drevenej hmoty a odborníkov, ktorí poznajú funkciu jednotlivých prvkov konštrukcie. Vo viacerých prípadoch sa poznaním funkcie prvku v konštrukcii dali prvky zachrániť v duchu požiadaviek ochrany pamiatkových objektov, pretože na prenos daného zaťaženia v konštrukcii boli prierezy aj napriek poškodeniu dostatočné. Je ideálne, ak prieskum konštrukcie a projekt rekonštrukcie robí tá istá osoba. Takisto je vždy v prospech vecí, ak projektant spolupracuje so skúseným dodávateľom a už počas projektovania vzájomne komunikujú. Po rekonštrukcii sa nesmie zabúdať na pravidelné kontroly autorizovanou osobou, aby mohla byť pamiatka zachovaná v čo najväčšej miere.

LITERATÚRA

- [1] KOHÚT, V.: *Uplatňovanie zásad pamiatkovej starostlivosti v oblasti nosných konštrukcií*. Eurostav. Bratislava: Vydavateľstvo Eurostav s.r.o., č. 4. ISSN 1335-1249.
- [2] SANDANUS, J. – SÓGEL, K.: *Prieskum biotického poškodenia drevenej konštrukcie dvoch veží kláštora v Jasove a projekt sanácie drevenej konštrukcie veží*, KKDK SvF STU Bratislava, 2008.
- [3] SANDANUS, J. – SÓGEL, K.: *Projekt rekonštrukcie, 1. fáza, strešná konštrukcia Rímsko-katolíckej kaplnky Ružencovej Panny Márie, Bratislava – Dúbravka*. 2010.

Oponentský posudok vypracoval:

Doc. Ing. Antonín Lokaj, Ph.D., Katedra konštrukcií, Fakulta stavební, VŠB-TU Ostrava.

Doc. Ing. Bohumil Straka, CSc., Ústav kovových a dřevěných konštrukcií, Fakulta stavební, VUT v Brně.

Anna BENEŠOVÁ¹, Jan VANĚREK², Rostislav DROCHYTKA³

**VLIV PODÍLU PLASTOVÉHO REGRANULÁTU NA VLASTNOSTI
DŘEVOPLASTOVÉHO KOMPOZITU**

**THE INFLUENCE OF REGRANULATE ADMIXTURE ON THE PROPERTIES
OF WOOD-POLYMER COMPOSITE**

Abstrakt

Matrice dřevoplastového kompozitu je tvořena termoplasty s nízkým bodem měknutí, nejčastěji polyolefiny nebo polyvinylchloridem. Tyto termoplasty s širokým průmyslovým využitím umožňují jednodušší recyklaci, která by měla zachovat požadované vlastnosti primárního polymeru. Využití recyklované drtě nebo regranulátu pro výrobu dřevoplastového kompozitu závisí tedy na splnění parametrů (druhotné) suroviny v souvislosti s účelem a technologií výroby produktu.

Klíčová slova

Dřevoplastový kompozit, polypropylenový regranulát, tahová pevnost, poměrné prodloužení, pevnost ve tříbodovém ohybu, deformace ohybem, infračervená absorpční spektroskopie.

Abstract

The WPC matrix is made of thermoplastics characterized by low softening point. The main types of WPC matrixes are polyolefins and polyvinylchloride. These thermoplastics, which provide a broad range of industrial utilization, allow a single-stage recycling that should maintain the virgin polymer properties. Therefore, the use of plastic regranulates in the form of a WPC matrix depends mainly on whether they meet the parameters required by the use purpose and production technology.

Keywords

Wood-polymer composite, polypropylene regranulate, tensile strength, elongation, the three-point bending strength, flexural deformation, infrared absorption spectroscopy.

1 ÚVOD

Dřevoplastový kompozit, tedy materiál spojující termoplastovou matici a plnivo tvořené částicemi dřevní hmoty (ideálně dřevní moučkou), byl vyvinut s cílem získat materiál vzhledem příbuzný masivnímu dřevu, jehož struktura ovšem eliminuje negativní vlastnosti ovlivňující životnost a s ní související požadavky na úpravu dřevěných konstrukcí zejména při použití v exteriéru [1]. V porovnání s masivním dřevem, dřevoplastový kompozit nevyžaduje pravidelnou údržbu, která chrání dřevo proti biotickým škůdcům, ztrátě barevnosti v důsledku vymývání produktů fotooxidace ligninu (šednutí dřeva) a především působení střídavého navlhání a vysychání, které má za následek

¹ Ing. Anna Benešová, Ústav technologie stavebních hmot a dílců, Fakulta stavební, Vysoké učení technické v Brně, Veveří 331/95, 602 00 Brno, tel.: (+420) 541 147 522, e-mail: benesova.a@fce.vutbr.cz.

² Ing. Jan Vaněrek, Ph.D., Ústav technologie stavebních hmot a dílců, Fakulta stavební, Vysoké učení technické v Brně, Veveří 331/95, 602 00 Brno, tel.: (+420) 541 147 514, e-mail: vanerek.j@fce.vutbr.cz.

³ Prof. Ing. Rostislav Drochytka, CSc., MBA, Ústav technologie stavebních hmot a dílců, Fakulta stavební, Vysoké učení technické v Brně, veveří 331/95, 602 00 Brno, tel.: (+420) 541 147 502, e-mail: drochytka.r@fce.vutbr.cz.

značné objemové změny vedoucí k destrukci konstrukce [2, 3]. Tyto negativní vlastnosti jsou obalením dřevní hmoty omezeny termoplastovou maticí, jejíž citlivost k okolnímu prostředí se snížila přidáním vhodných přísad upravujících materiál již v průběhu výroby [1-4].

Kromě výhod spojených s údržbou a deklarovanou životností je dřevoplastový kompozit rovněž upřednostňován z důvodu šetrnosti k životnímu prostředí, neboť vybraný typ plniva i matrice vytváří prostor pro využívání odpadů a druhotných surovin. Dřevní moučku lze vyrábět výhradně jako produkt odpadu dřevařského průmyslu [5], popřípadě doplnit vhodnou druhotnou surovinou, která neovlivní nebo zlepší pevnostní charakteristiky kompozitu [6].

Matrice dřevoplastového kompozitu musí být tvořena termoplastem s nízkým bodem měknutí, protože výroba kompozitu je omezena rozkladem polysacharidických složek dřevní hmoty při teplotě nad 170°C [7]. Z tohoto důvodu se nejčastěji užívají polyolefiny a polyvinylchlorid [1]. Zpracování polyolefinů se všeobecně uplatňuje v oblasti obalových materiálů, jež se vyznačují krátkou spotřební dobou a je možné je jednostupňově recyklovat regranulací. Regranulát polyolefinového termoplastu by měl dosáhnout vlastností primárního polymeru, jeho kvalita může být ovšem ovlivněna původem, způsobem a účelem prvotního použití, zpracováním a mírou znečištění cizorodými látkami. Rozdílné vlastnosti kompozitu obsahujícího výhradně primární polymer a kompozitu s podílem polymerního recyklátu se mohou projevit nejen v oblasti pevnostních charakteristik, ale zejména ve snížení délky životnosti produktů a kvality uživatelských požadavků. Bude-li ovšem prokázáno, že náhrada části nebo celé matrice recyklátem nemá významný vliv na požadované vlastnosti, bude možné snížit i cenu produktů, vzhledem ke skutečnosti, že pořizovací cena regranulátu může dosáhnout až poloviny pořizovací ceny primárního polymeru.

Experiment, popsáný v této práci, je zaměřen na stanovení počátečních pevnostních charakteristik dřevoplastového kompozitu se třemi typy množství podílu regranulátu v matrici. Hlavními studovanými vlastnostmi jsou tahová pevnost a poměrné prodloužení zkušebních těles, modul pružnosti v tahu, pevnost a deformace ve třibodovém ohybu. Součástí základních testů je rovněž stanovení odchylek v chemické struktuře makromolekul síťovaných modifikovaných matic pomocí infračervené absorpční spektroskopie. Na výstupy tohoto experimentu bude následně navazovat vystavení dlouhodobým zátěžovým testům vlivu vodního uložení a osvětlení ultrafialovým zářením. Konstrukční prvky vyrobené z dřevoplastového kompozitu jsou určeny pro venkovní použití a vyznačují se tedy vysokými nároky na odolnost vůči rázu, zejména při snížené okolní teplotě. Z tohoto důvodu bude rovněž nutné všechna zkušební tělesa podrobit zkoušce rázové houževnatosti.

2 POUŽITÉ MATERIÁLY A ZKUŠEBNÍ METODY

Zkušební tělesa pro tahové a ohybové zkoušky byla vyrobena ze tří typů dřevoplastového kompozitu s podílem 27%, 50% a 100% regranulátu (Tab. 1). Použity byly: primární polymer typu Mosten GB 504 (MFI – index toku taveniny (melt flow index) 230°C/2,16 4g/10min, teplota měknutí dle Vicata 150°C) a regranulát vyráběný firmou Kordplast (MFI 230°C/2,16 6,1g/10min, teplota měknutí dle Vicata 145°C) původně užíván ve formě obalového materiálu. Blokový kopolymer Mosten GB 504 je polypropylén s vysokou rázovou houževnatostí a mezi pevností pohybující se kolem hodnoty 25 MPa [8]. Polypropylénový regranulát je díky nízkému indexu toku taveniny vhodný pro komerční využití v oblasti extrudovaných výrobků, protože se ovšem jedná o homopolymer, měla by se hodnota pevnosti na mezi kluzu přibližovat 35 MPa [8]. Z hlediska koncového užívání (převážně podlahové dílce) by bylo vhodnější použít regranulát polypropylénového kopolymeru, jež dosahuje vyšších hodnot houževnatosti a vyšší stability při snížených teplotách, původní užívání tohoto polymeru ovšem velmi často vyžaduje probarvování pigmenty, které ovlivňuje vzhled kompozitu a míra jeho degradace bývá zvýšená působením chemických a fyzikálních procesů. Z tohoto důvodu bude následně nutné stanovit únosnou mez snížení rázové resp. vrubové houževnatosti kompozitu a pevnosti při vystavení snížené teplotě v závislosti na podílu příměsi použitého regranulátu v matrici.

Dřevitá moučka byla dodána firmou Nate s.r.o., Mlýn – Bělkovice s jemností mletí B2 – polohrubá. Dřevitá moučka byla před započítáním výroby vysušena na minimální vlhkost. Obsah

těkavých podílů by bez úpravy sušením zapříčinil nižší homogenitu kompozitu. Dřevitá moučka působí v kompozitu jako vláknová výztuž a způsobuje tedy nárůst jeho tahových a ohybových pevností (při 30% plnění je u kopolymeru nárůst pevností v tahu přibližně 12%-ní vzhledem k deklarovanému napětí na mezi kluzu [6]).

Tab. 1: Složení surovinových směsí pro výrobu zkušebních těles

Složka	Popis	Označení směsi		
		1	2	3
PP Mosten GB 504 [%]	Blokový kopolymer, MFI 230°C/2,16 4g/10min, teplota měknutí dle Vicata 150°C, čirý	40	27,5	0
PP regranulát Kordplast [%]	Homopolymer, MFI 230°C/2,16 6,1g/10min, teplota měknutí dle Vicata 145°C, čirý	15	27,5	55
Dřevitá moučka B2 [%]	Polohrubá, vysušená	40	40	40
Příspěvky [%]	Licomont AR, Irganox B225, Chimisorb UV 944	5	5	5

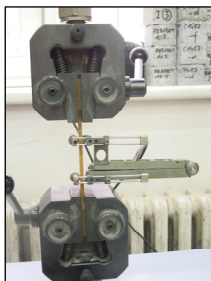
Směsi surovin o stanovených poměrech byly homogenizovány na extrudéru BUSS MDK 46 a vyrobený granulát byl poté vstříkáván do formy vstříkolisem Arburg. Rozměry zkušebních těles odpovídají požadavkům normy ČSN EN ISO 527 pro stanovení tahové pevnosti plastů. Zkušební tělesa typu 1B o délce 150 mm, šířce 20 mm (pracovní část šířky 10mm) a tloušťce 4 mm (obr. 1) byla použita i pro stanovení pevnosti ve tříbodovém ohybu.



Obr. 1: Zkušební tělesa předepsaných rozměrů dle ČSN EN ISO 527, typ 1B, složení 1 (27%-ní podíl regranulátu v matrici), 2 (50%-ní podíl regranulátu v matrici) a 3 (100% matrice tvoří regranulát)

Zkušební tělesa byla zatěžována dle metodiky popsané v technické normě ČSN EN ISO 527-1, 2 pro stanovení meze pevnosti v tahu, poměrného prodloužení a modulu pružnosti v tahu a dle ČSN EN ISO 178 A1 pro stanovení meze pevnosti a deformace ve tříbodovém ohybu. Stanovení všech veličin bylo provedeno na zkušebním zařízení Testometric M350-20CT, pro stanovení deformací tahem byl použit extenzometr (obr. 2, 3).

Infračervené absorpční spektrogramy byly získány pomocí spektrometru PerkinElmer® Frontier IR Single-Range. K měření byla použita odrazová metoda ATR.



Obr. 2: Stanovení mezní síly při zatěžování tahem a deformace pomocí extenzometru



Obr. 3: Stanovení mezní síly při porušení tříbodovým ohybem

3 VYHODNOCENÍ A DISKUZE VÝSLEDKŮ

3.1 Vyhodnocení pevnostních charakteristik.

Všechny pevnostní charakteristiky byly stanoveny na zkušebních tělesech kondiciovaných v normalizovaném prostředí při laboratorní teplotě.

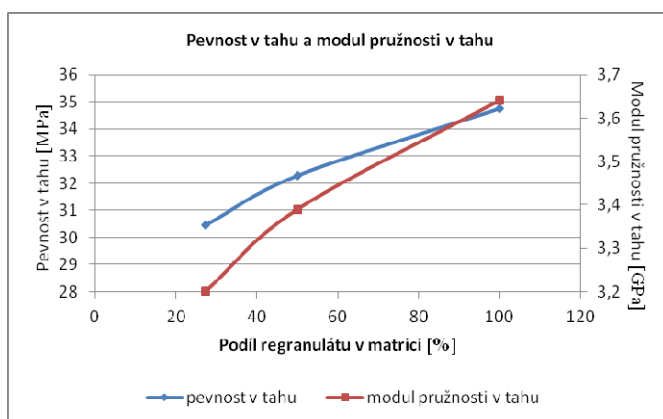
Dle předpokladů, průměrné počáteční hodnoty testovaných pevnostních charakteristik měly narůstající tendenci při zvyšujícím se podílu polypropylénového regranulátu v matrici (Tab. 2). Funkční závislosti pevnosti a modulu pružnosti v tahu na množství podílu regranulátu měly záporně kvadratický průběh (obr. 4). U obou veličin byl zaznamenán nárůst o 13,8%. Tomuto trendu odpovídá i snižující se tendence poměrného prodloužení zkušebních těles, které dosáhlo poklesu až o 69%.

Se zvyšujícím se procentuálním podílem polymerní složky z regranulátu docházelo i ke zvýšení ohybové pevnosti. Funkční závislost nárůstu ohybové pevnosti byla kvadratického průběhu (obr. 5). Hodnota průměrné ohybové pevnosti se zvýšila o 16,9%. Stejně jako poměrné prodloužení, i průměrná deformace při tříbodovém ohybu měla tendenci klesající (dosažený pokles činil 44,5%). Snižující se hodnoty poměrného prodloužení a deformace ve tříbodovém ohybu svědčí o vyšší tuhosti směsi s vyšším podílem regranulátu.

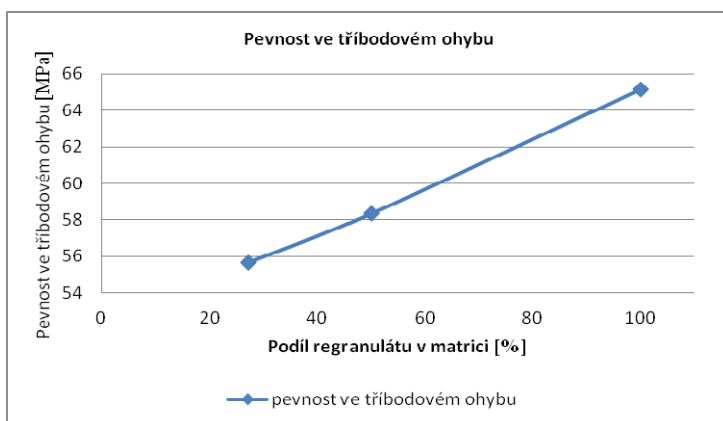
Deklarovaná pevnost v tahu homopolymerů se blíží hodnotě 35 MPa. Vzhledem ke skutečnosti, že průměrná pevnost v tahu zkušebních těles obsahujících matrici pouze z regranulátu činila 37,4 MPa, nebyl experimentem potvrzen pozitivní vliv zvýšení pevnosti v tahu dřevoplastového kompozitu ve spojení s přídatkem dřevní moučky, jak je trendem při plnění primárních polymerů.

Tab. 2: Průměrné hodnoty sledovaných charakteristik

Označení typu směsi	Pevnostní charakteristiky - Tah			Pevnostní charakteristiky – Tříbodový ohyb	
	Pevnost [MPa]	Modul pružnosti [GPa]	Poměrné prodloužení [%]	Pevnost [MPa]	Deformace ohybem [%]
1	30,5±0,872	3,20±0,102	0,042	55,7±2,090	6,724
2	32,3±0,920	3,39±0,047	0,029	58,3±0,803	4,862
3	34,7±0,671	3,64±0,135	0,013	65,1±0,700	3,729



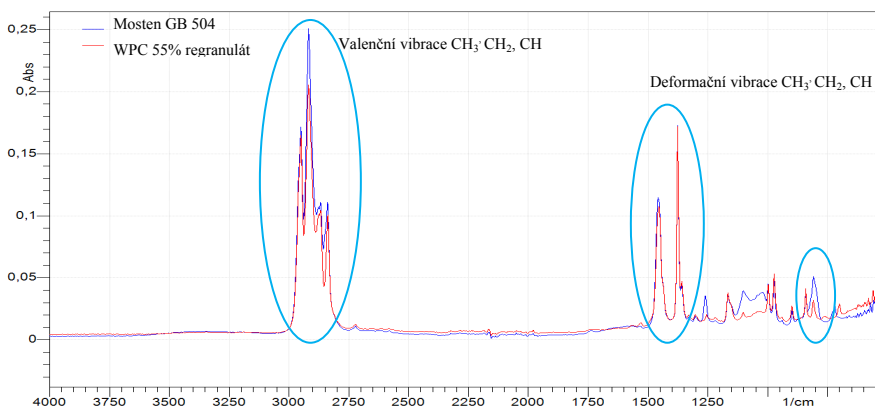
Obr. 4: Grafické znázornění průběhu závislosti pevnosti a modulu pružnosti v tahu na množství podílu regranulátu v matrici



Obr. 5: Grafické znázornění průběhu závislosti pevnosti ve třibodovém ohybu na množství podílu regranulátu v matrici

3.2 Vyhodnocení infračervených absorpčních spektrogramů.

Infračervené absorpční spektrogramy byly naměřeny u všech tří typů matic. Pro stanovení odchylek byl spektrogram zkušebního tělesa s matricí tvořenou regranulátem porovnán se spektrogramem primárního polymeru Mosten GB 504. Intenzivní spektrální pásy odpovídají hlavním vlnočtům polypropylenu. V oblasti vlnočtů $3000-2850\text{ cm}^{-1}$ reagují valenční vibrací silné intenzity základní vazby uhlíkových makromolekul (CH_3 , CH_2 , CH), deformační vibrace těchto vazeb se vyskytují na vlnočtech 1460 cm^{-1} , 1375 cm^{-1} s přílehlým pásem 1360 cm^{-1} (C-H kolébavá vibrace) a v oblasti spektrálního pásu na vlnočtu 720 cm^{-1} . Srovnání spektrogramů neukázalo žádné výrazné rozdíly v chemické struktuře jednotlivých matic.



Obr. 6: Porovnání infračervených absorpčních spektrogramů typu 3 (matrici tvoří 100% regranulát) a primárního polymeru Mosten GB 504

4 ZÁVĚR

V rámci experimentu byly stanoveny počáteční pevnostní parametry tří typů dřevoplastového kompozitu s matricí modifikovanou 27%, 50% a 100% podílem regranulátu. Vyhodnocené průběhy tahových a ohybových pevností měly se zvyšujícím se podílem regranulátu rostoucí tendenci, zvýšení pevnosti a modulu pružnosti v tahu dosáhlo nárůstu 13,8%. Nárůst ohybové pevnosti dosáhl 16,9%. Tato skutečnost je zapříčiněna stavbou makromolekul regranulátu.

Možnost použití regranulátu jako náhrady části nebo celé primární polypropylénové matrice dřevoplastového kompozitu je tedy závislá jednak na stanovení houževnatosti kompozitu, zejména

pak na provedení testů dlouhodobé zátěže zkušebních těles v nepříznivých podmínkách (vodní uložení, ultrafialový osvit, snížená okolní teplota). Po vyhodnocení zkoušek dlouhodobé zátěže bude možné optimalizovat poměr regranulátu a primárního polymeru k dosažení adekvátní kvality modifikovaného kompozitu.

Prvním z ukazatelů degradace materiálu v nepříznivém prostředí bude kromě vizuálního posouzení rovněž stanovení změny chemické struktury pomocí infračervené absorpční spektroskopie. Pořízené počáteční spektrogramy nevykázaly relevantní odchylky od spektrogramu primárního polymeru, pro potřeby navazujícího experimentu byly stanoveny hlavní spektrální pásy polypropylenu.

PODĚKOVÁNÍ

Príspevek byl realizován za finanční podpory Centra AdMaS – Advanced Materials, Structures and Technologies (reg. č. CZ.1.05/2.1.00/03.0097), Výzkumný program VP1: Vývoj pokročilých stavebních materiálů a interního projektu Specifického výzkumu FAST-J-13-1877.

LITERATURA

- [1] OKSMAN NISKA, K., SAIN, M. *Wood-polymer composites*. Cambridge England. 2008. ISBN 978-1-84569-272-8.
- [2] MORRELL, J.J., STARK, N.M., PENDELTON, D.E., MCDONALD, A. Durability of Wood-plastic composites. In: *10th International Conference on Wood & Biofiber Plastic Composites and Cellulose Nanocomposites*. Place: Forest Products Society, 2009. ISBN 978-1-892529-55-8.
- [3] SHAO-YUAN, L., TSU-HSIEN, Y., SHENG-FONG, L., TSE-HSIN, Y. Optimized material composition to improve the physical and mechanical properties of extruded wood-plastic composites (WPC). In: *Construction and building materials*. 2012, 29, pp. 120-127, ISSN 0950-0618.
- [4] GNATOWSKI, M. Water Absorption and Durability of Wood-plastic composites. In: *10th International Conference on Wood & Biofiber Plastic Composites and Cellulose Nanocomposites*. Place: Forest Products Society, 2009, ISBN 978-1-892529-55-8.
- [5] ARES, A., BOUZA, R., PARDO, S.G., ABAD, M.J., BARRAL, L. Rheological, mechanical and thermal behaviour of wood-polymer composites based on recycled polypropylene. In: *Journal of Polymers and the Environment*. 2010, 18, pp. 318-325. ISSN 1566-2543.
- [6] BENEŠOVÁ, A. Fyzikálně-mechanické vlastnosti modifikovaného dřevoplastového kompozitu. In: *15. Odborná konference doktorského studia JUNIORSTAV 2013*. Place: Vysoké učení technické v Brně, 2013. ISBN 978-80-214-4669-4.
- [7] NAJAFI, K.Z. Use of recycled plastics in wood plastic composites – A review. In: *Waste Management*. 2013, 33, pp. 1898-1905. ISSN 0956-053X.
- [8] Technické listy produktů společnosti Unipetrol.
- [9] ČSN EN ISO 527-2. *Plasty - Stanovení tahových vlastností - Část 2: Zkušební podmínky pro tvářené plasty*. Praha: Úřad pro technickou normalizaci, metrologii a státní zkušebnictví, 2012. Třídící znak 640604.
- [10] ČSN EN ISO 178 A1. *Plasty - Stanovení ohybových vlastností*. Praha: Úřad pro technickou normalizaci, metrologii a státní zkušebnictví, 2013. 18s. Třídící znak 640607.

Oponentní posudek vypracoval:

Doc. Ing. Dagmar Měřínská, Ph.D., Ústav inženýrství polymerů, Fakulta technologická, Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně.

Doc. Ing. Miroslava Netopilová, CSc., Katedra požární ochrany, Fakulta bezpečnostního inženýrství, VŠB-TU Ostrava.

Tomáš PETŘÍK¹, Eva HRUBEŠOVÁ²

**NUMERICKÝ MODEL ODEZVY DYNAMICKÉHO ZATÍŽENÍ REÁLNÉHO HORNINOVÉHO
PROSTŘEDÍ S POUŽITÍM METODY LATIN HYPERCUBE SAMPLING**

**NUMERICAL MODEL OF THE DYNAMIC LOAD RESPONSE IN THE REAL ROCK MASS
USING LATIN HYPERCUBE SAMPLING METHOD**

Abstrakt

Příspěvek navazuje na předešlou modelovou studii, ve které bylo využito simulačních stochastických metod modelování pro stanovení dynamické odezvy v horninovém prostředí. I v tomto příspěvku je využito simulační stochastické metody Latin hypercube sampling (LHS) pro stanovení vstupních parametrů modelu. Pro modelování bylo zvoleno reálné horninové prostředí. Výsledné hodnoty maximálních amplitud rychlostí kmitání z modelů jsou pak porovnány s provedeným experimentálním měřením in-situ. Celkem bylo generováno pro každý vstupní parametr 20 hodnot. Maximální amplitudy rychlosti kmitání byly vypočteny pro 15 různě vzdálených povrchových bodů od místa použití reverzní vibrační desky. Pro každou analyzovanou vzdálenost byly výsledky statisticky zpracovány a stanoveny základní statistické charakteristiky získaného souboru dat odezvy modelů. Na základě těchto výsledků stochastického modelování dynamické odezvy lze pak stanovit rozsahy, ve kterých se budou rychlosti kmitání v různé vzdálenosti od zdroje kmitání s určitou pravděpodobností pohybovat.

Klíčová slova

Dynamické zatížení, numerický model, stochastický parametr, Latin Hypercube Sampling, maximální amplituda rychlosti kmitání, experimentální měření.

Abstract

This paper follows on previous paper “numerical model of the dynamic load response in the soil using Latin hypercube sampling method”. In this paper the Latin Hypercube Sampling method (LHS) is used in order to evaluate the values of input parameters of real rock environment. The resulting values of the models were compared with the experimental in-site measurements. Twenty input values were generated for each input parameter. The peak oscillation velocities were calculated for 15 different surface points. The results were statistically analyzed in each distance (the basic statistical characteristics were evaluated). Based on this stochastic analysis the attenuation curve of the vibration velocity with the certain level of probability were determined.

Keywords

Dynamic loading, numerical model, stochastic parameter, Latin Hypercube Sampling method, peak oscillation velocity, experimental measurements.

¹ Ing. Tomáš Petřík, Katedra geotechniky a podzemního stavitelství, Fakulta stavební, VŠB-Technická univerzita Ostrava, Ludvíka Podéště 1875/17, 708 33 Ostrava-Poruba, tel.: (+420) 597 321 362, e-mail: tomas.petrik@vsb.cz.

² Doc. RNDr. Eva Hruběšová, Ph.D., Katedra geotechniky a podzemního stavitelství, Fakulta stavební, VŠB-Technická univerzita Ostrava, Ludvíka Podéště 1875/17, 708 33 Ostrava-Poruba, tel.: (+420) 597 321 373, e-mail: eva.hrubesova@vsb.cz.

1 ÚVOD

Objektivita a spolehlivost vstupních parametrů je jedním z nejdůležitějších činitelů matematických modelů. Jednou z možností, jak lze zohlednit proměnlivý charakter horninového prostředí, je využití pravděpodobnostního přístupu k modelování. Aplikaci pravděpodobnostního přístupu na řešení odezvy seizmického zatížení horninového prostředí a okolních konstrukcí se již věnovali např. [1, 2 nebo 3]. Využívali zde především simulační stochastické metody Latin hypercube sampling (dále jen LHS) pro výběr hodnot vzorků vstupních parametrů matematických modelů. Tento článek se zaměřuje na využití metody LHS pro zohlednění stochastického charakteru parametrů horninového prostředí, na které působí dynamické zatížení. Konkrétně za náhodně proměnné vstupní parametry horninového prostředí jsou považovány deformační modul, úhel vnitřního tření a v případě soudržných zemin i soudržnost. Článek tak navazuje na předchozí modelovou studii [4], která je tentokrát provedena pro reálnou geotechnickou situaci. Díky tomu je možné porovnat výsledky stochastických modelů s provedeným experimentálním měřením. Toto terénní měření bylo provedeno v prostorech areálu Fakulty stavební VŠB-TUO, jehož výsledky jsou publikovány v článku [5].

2 CHARAKTERISTIKA MODELU

Jako podklad pro geologické poměry sloužila závěrečná zpráva, která byla zveřejněna v článku [6]. Geologie se v dané lokalitě sestává ze 7 m vrstvy tuhých jíílů třídy F6 (CI, CL), pod kterými se nachází vrstva ulehlých písků o mocnosti přibližně 3,0 m třídy S3 (S-F) a dále cca 5,0 m mocná vrstva ulehlých písčitých štěrků třídy G3 (G-F). Pod vrstvou štěrků dále pokračují ulehlé písky třídy S2 (SP). Základní model je vytvořen s jednoduchým geologickým rozhraním. Hladina podzemní vody se v terénu nachází přibližně v hloubce 16,5 m, v modelech se ovšem s hladinou podzemní vody neuvažuje. Geotechnické vlastnosti zemin vychází ze směrných normových charakteristik ČSN 73 1001, která je již v současné době neplatná, a jsou uvedeny v Tab. 1.

Tab. 1: Vstupní parametry horninového prostředí v areálu FAST

Třída	Poisson. číslo ν	Objemová tíha γ kN.m ⁻³	Deformační modul E_{def} MPa	Úhel vnitřního tření φ_{ef} °	Soudržnost c_{ef} kPa
F6	0,40	21	3–6	17–21	8–16
S3	0,30	17,5	17–25	30–33	0
G3	0,25	19	90–100	33–38	0
S2	0,28	18,5	30–50	34–37	0

Za stochastické parametry s normálním rozdělením pravděpodobnosti jsou považovány deformační modul E_{def} , úhel vnitřního tření φ_{ef} a soudržnost c_{ef} všech zemin (s výjimkou soudržnosti u nesoudržných písčitých a štěrkovitých zemin). Pro generaci náhodných hodnot vstupních parametrů metodou LHS byl použit modulu GLHS, který byl vyvinut na katedře geotechniky a podzemního stavitelství, VŠB-TUO. Generace byla provedena na základě horních a dolních mezí, střední hodnoty a směrodatné odchylky stochastických parametrů horninového prostředí a zvoleného rozdělení pravděpodobnosti. Celkově bylo zvoleno 20 simulačních variant, pro které byly určeny příslušné distribuční funkce a k nim náležející výsledné hodnoty vstupních parametrů modelů (Tab. 2).

Tab. 2: Ukázka výstupních parametrů zemin z modulu GLHS

	modul F6		Soudržnost F6		Úhel tř. F6		Modul G3		Úhel tř. G3	
	DF	gen.hod.	DF	gen.hod.	DF	gen.hod.	DF	gen.hod.	DF	gen.hod.
1	0,275607	4,20203	0,175877	10,75842	0,475067	18,95831	0,524933	95,10423	0,275607	35,00338
2	0,824123	4,965595	0,026282	9,41537	0,524933	19,04169	0,674528	95,75408	0,724393	35,99662
3	0,624663	4,658875	0,375337	11,57633	0,076147	18,04568	0,824123	96,55198	0,375337	35,23521
4	0,026282	3,530762	0,724393	12,79459	0,175877	18,37921	0,275607	94,00677	0,973718	37,1154
5	0,375337	4,341125	0,923853	13,90863	0,425202	18,87427	0,126012	93,09092	0,076147	34,30711
6	0,873988	5,072723	0,475067	11,91662	0,375337	18,78817	0,923853	97,38579	0,774258	36,12745
7	0,325472	4,273775	0,325472	11,39673	0,674528	19,30163	0,724393	95,99323	0,225742	34,87255

Dynamické zatížení je v modelu definováno jako spojité zatížení vyvolané hutnicím strojem použitým při experimentálním měření [5] v okolí zkušební konstrukce stand v areálu Fakulty stavební, VŠB-TUO (viz obr. 1). Parametry dynamického zatížení (viz tab. 3) vycházejí z prospektů výrobce reverzní vibrační desky VDR 22 [7] a výsledků experimentálního měření in-situ [5]. Při tomto měření dosahovala reverzní vibrační deska frekvence 82 Hz. Doba, po kterou zatížení v modelu působí, je 5 s.

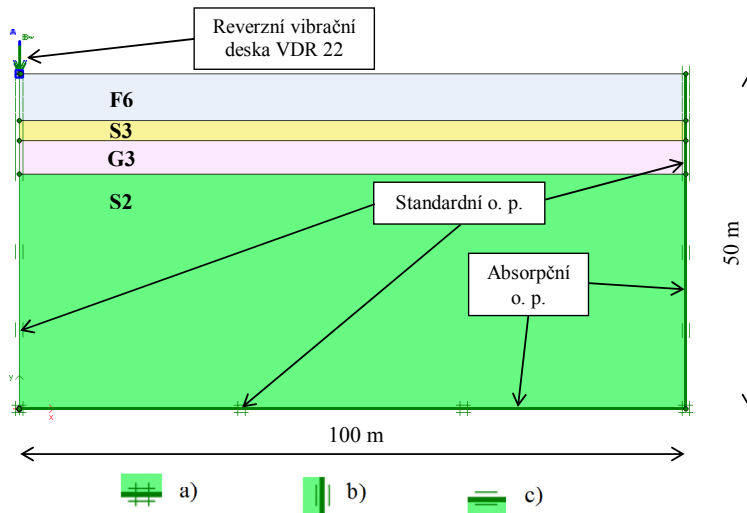
Tab. 3: Vstupní parametry reverzní vibrační desky

Reverzní vibrační deska VDR 22		
Hmotnost	120	kg
Rozměry hutnicí desky	400 × 630	mm
Frekvence	82	Hz
Odstředivá síla	22	kN



Obr. 1: Foto z experimentálního měření

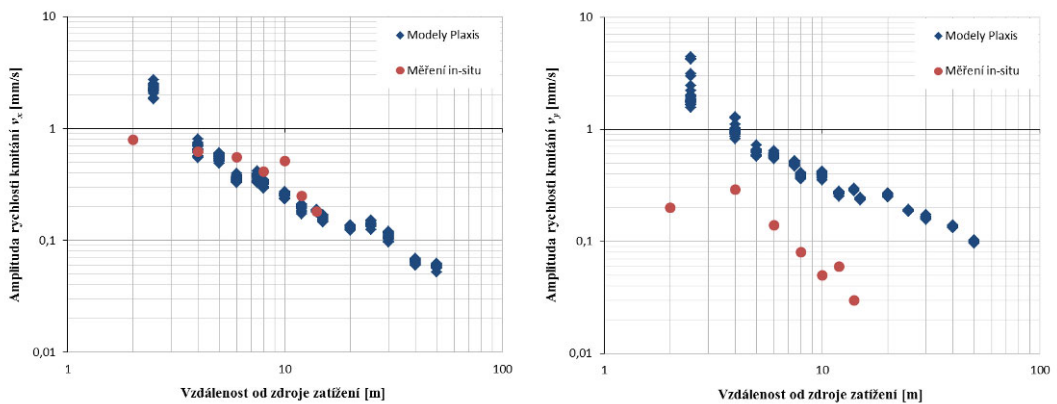
Základní model je vytvořen ve výpočetním programu Plaxis jako osově symetrický v rozsahu 100 × 50 m (délka × hloubka). Geologické rozhraní modelu s umístěním dynamického zatížení je vidět na obr. 2. Vstupní parametry horninového prostředí jsou definovány jak podle tab. 1 (parametry prostředí považované za deterministické), tak i podle výstupních parametrů modulu GLHS uvedených v tab. 2 (stochastické parametry prostředí). Parametry materiálového tlumení zeminy se ve výpočetním programu Plaxis zadávají pomocí Rayleighových parametrů (α_R a β_R). Na základě modelové studie je pro daný případ uvažováno s variantou $\alpha_R = 0,001$ $\beta_R = 0,0001$.



Obr. 2: Geometrie modelu v programu Plaxis (standardní okrajové podmínky s totálním omezením a) s omezením v horizontálním směru b) a vertikálním směru c))

3 VÝSLEDKY MODELOVÁNÍ

Na základě popsanych vstupních parametrů (deterministických i stochastických) a předpokladů modelu byly pro všech 20 simulačních variant stanoveny amplitudy rychlosti kmitání v ose x a ose y v 10-ti různě vzdálených bodech. Pro podrobnější výsledky bylo využito možnosti dopočítat další body v modulu Output výpočetního programu Plaxis. Celkově tedy pro 15 vzdáleností bylo stanoveno 600 hodnot maximální amplitudy rychlosti kmitání horninového prostředí. Všechny tyto body jsou zaneseny do grafů na obr. 3 a obr. 4 a porovnány s hodnoty měření in-situ.



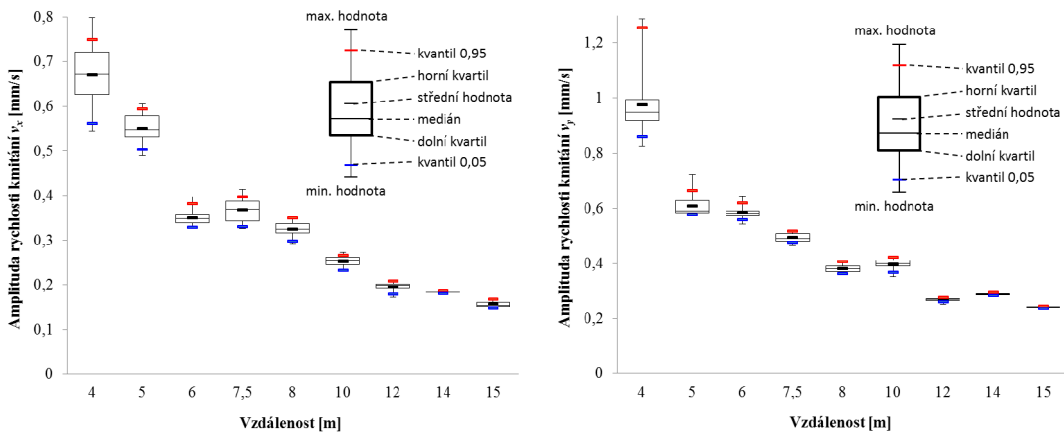
Obr. 3 a obr. 4: Záznamy amplitud rychlosti kmitání v ose x a ose y

V těchto grafech je patrný vliv horninového prostředí na amplitudu rychlosti kmitání. K nejvýraznějšímu ovlivnění dochází v rozmezí vzdálenosti 8 až 10 m od středu vibrační desky v ose x a 10 až 12 m ve složce y . Zde dochází k nárůstu amplitudy rychlosti kmitání, který je především způsoben v důsledku odrazu seizmických vln od nižších vrstev horninového prostředí s odlišnými geotechnickými vlastnostmi. Další takový vliv je z grafů patrný už pouze z namodelovaných dat ve vzdálenosti okolo 20 až 22 m. Veškerá modelová data byla pak v každé analyzované vzdálenosti statisticky zpracována tabulkovým procesorem MS Excel. Byly stanoveny základní statistické charakteristiky získaného statistického souboru odezvy modelu, které jsou uvedeny v tab. 4.

Tab. 4: Základní statistické charakteristiky z tabulkového procesoru MS Excel

Vzdálenost [m]	4	6	8	10	4	6	8	10
Osa	v_x [mm.s ⁻¹]				v_y [mm.s ⁻¹]			
Střední hodnota	0,671	0,351	0,325	0,253	0,978	0,583	0,382	0,396
Medián	0,672	0,349	0,326	0,255	0,951	0,582	0,381	0,399
Směrodatná odchylka	0,068	0,017	0,016	0,011	0,115	0,021	0,014	0,018
Kvantil 0,05	0,561	0,329	0,299	0,233	0,859	0,559	0,363	0,359
Kvantil 0,95	0,750	0,382	0,350	0,268	1,226	0,619	0,406	0,422

Z výsledků stochastického modelování dynamické odezvy lze pak stanovit rozsahy, v nichž se budou rychlosti kmitání v různé vzdálenosti od zdroje kmitání s určitou pravděpodobností pohybovat. Například ve vzdálenosti 6 m od místa působení vibrační desky se hodnoty amplitudy rychlosti kmitání s 90% pravděpodobností pohybovaly v rozsahu od 0,329 do 0,382 mm/s ve směru x a v rozmezí od 0,559 do 0,619 mm/s ve směru y . Tato data jsou zpracována v krabicových grafech na obr. 5 a obr. 6.



Obr. 5 a obr. 6: Krabicový graf amplitud rychlosti kmitání na ose x a ose y

4 ZÁVĚR

Uplatnění stochastických metod v modelování geotechnických úloh může výrazně zpřesnit představu o předpokládaném chování posuzovaného horninového masívu či stavební konstrukce a předejít tak nekvalitním či nevhodným návrhům. Je známo, že metoda LHS je efektivní stochastickou metodou pro zohlednění pravděpodobnostního charakteru vstupních parametrů. Ve srovnání se standardní metodou Monte Carlo snižuje tato metoda počet nutných simulací při zachování vysoké přesnosti výsledků. Určitou nevýhodou metody LHS však je, že neumožňuje libovolné přidání simulací k již zpracovanému souboru dat. Obecně platí, že vyšší počet simulací odpovídá větší přesnosti výsledků. S tím však rostou nároky na potřebný objem dat a dobu výpočtů. Zároveň roste i nejistota spojená s chybou lidského faktoru (např. při přepisování dat). V současné době již existují modifikace metody LHS, které umožňují rozšířit výchozí počet simulací (bez nutnosti opakovat celý předchozí simulační výpočet), například metoda *Hierarchical Subset Latin Hypercube Sampling* (HSLHS) [8]. I v případě aplikace této metody HSLHS počet potřebných simulací nenarůstá lineárně (v našem případě by pro 20 původních simulací bylo nutné pro další stupeň hierarchie dopočítat 40 simulací). V analyzované úloze lze při aplikaci metody LHS získat

představu o pravděpodobnostním výskytu extrémních hodnot maximální amplitudy rychlosti kmitání horninového prostředí a navrhnout pro daný případ uplatnění jiného technologického postupu či jiných opatření.

PODĚKOVÁNÍ

Příspěvek byl realizován za finančního přispění MŠMT, podporou specifického vysokoškolského výzkumu Studentské grantové soutěže VŠB-TU Ostrava pod identifikačním číslem SP2013/139.

LITERATURA

- [1] RAJEEV, P. & TEFAMARIAM, S. Seismic fragilities of non-ductile reinforced concrete frames with consideration of soil structure interaction. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*. 2012, Vol. 40, pp. 78-86. ISSN 0267-7261.
- [2] CELAREC, D. & DOLŠEK, M. The impact of modelling uncertainties on the seismic performance assessment of reinforced concrete frame buildings, *Engineering Structures*, Volume 52, July 2013, Pages 340-354, ISSN 0141-0296.
- [3] HRUBEŠOVÁ, E. & LUŇÁČKOVÁ, B. Modelování dynamických vlivů odstřelu na napěťo-deformační stav svahového tělesa. *Sborník vědeckých prací Vysoké školy báňské – Technické univerzity Ostrava – Řada stavební*. 2006, roč. VI, č. 1, s. 65-71. ISSN 1213-1962.
- [4] PETŘÍK, T.; MOHYLA, M. & HRUBEŠOVÁ, E. Numerický model odezvy dynamického zatížení v zemině s použitím metody latin hypercube sampling. *Sborník vědeckých prací Vysoké školy báňské – Technické univerzity Ostrava – Řada stavební*. 2013, roč. XIII, č. 1. ISSN 1213-1962 (v tisku).
- [5] PINKA, M.; STOLÁRIK, M.; FOJTÍK, R. & PETŘÍK, T. Experimental Seismic Measurement on the Testing Construction and The Analyze. *Transactions of the VŠB - Technical University of Ostrava: Construction Series* [online]. Warsaw: Versita, 2012, Volume XII, Number 1 / 2012, s. 1-11 [cit. 2012-09-13]. DOI: 10.2478/v10160-012-0006-6.
- [6] ČAJKA, R.; KŘIVÝ, V. & SEKANINA, D. Design and Development of a Testing Device for Experimental Measurements of Foundation Slabs on the Subsoil. *Transactions of the VŠB-Technical University of Ostrava: Construction Series* [online]. Warsaw: Versita, 2011, Volume XI, Number 1 / 2011, s. 1-5 [cit. 2012-09-13]. DOI: 10.2478/v10160-011-0002-2.
- [7] NTC – Profesionální stavební technika [online]. [cit. 2012-09-13]. Oficiální stránky společnosti NTC stavební technika. Dostupné z: <<http://www.ntc.cz/>>
- [8] VOŘECHOVSKÝ, M. Extension of sample size in Latin Hypercube Sampling with correlated variables. In EDITORS, Michael Beer. REC 2010, *Proc. of 4th International Workshop on Reliable Engineering Computing*, Singapore, March 3-5, 2010, pp. 353–368. ISBN 978-981-08-5118-7.

Oponentní posudek vypracoval:

Doc. Ing. Marián Drusa PhD., Katedra geotechniky, Stavebná fakulta, ŽU v Žiline.

Doc. Ing. Miroslav Vořechovský, Ph.D., Ústav stavební mechaniky, Fakulta stavební, VUT v Brně.

Renáta KORENKOVÁ¹, Peter KRUŠINSKÝ²

DIAGNOSTICS OF THE TECHNICAL CONDITION OF TIMBER ROOF FRAMES USING
FAKOPP 3D SONIC TOMOGRAPH

DIAGNOSTIKA TECHNICKÉHO STAVU DREVENÝCH KONŠTRUKCIÍ VYUŽITÍM
AKUSTICKEJ 3D TOMOGRAFIE PRÍSTROJOM FAKOPP

Abstract

The Fakopp 3D Sonic Tomograph is used in practice for making the diagnosis of latent, i.e. internal, damage to living trees. We experimented with the possibility of using this device for decay detection in timber elements of a roof frame. It was tested in the laboratory (in labo) as well as in the roof space of a historical truss (in situ). We examined the timber elements of historical wooden trusses that had relatively a small diameter.

Keywords

Sonic tomograph, timber element, wood damage.

Abstrakt

Akustický 3D tomograf Fakopp sa v praxi používa na diagnostikovanie skrytého, vnútorného, poškodenia živých stromov. Testovali sme možnosť použitia tohto prístroja pre diagnostiku drevených prvkov konštrukcie krovu. Prístroj sme skúšali v priestore laboratória (in labo) a tiež v teréne v priestore historického krovu (in situ). Merané boli časti drevených prvkov historických krovov relatívne malého prierezu.

Klíčová slova

Akustický tomograf, drevený prvok, poškodenie dreva.

1 INTRODUCTION

The many valuable historic timber structures are located in Slovakia. There are already trusses of the Middle Ages [1]. In the field of sustainability of historic roofs is necessary to use non-destructive diagnostic methods [2, 3, 4]. The aim of our work was to find out whether this tool would be suitable for diagnosing the technical condition of timber components in historical trusses. Since it is a semi-destructive method, there are minimal interventions in wood [5]. In fact it is the measuring of time taken for sonic stress waves to pass through the wood of a tree. A series of nails are installed around the tree at the measuring plane as the measuring points and are used to send or receive sound waves that are generated by hammer tapping on one of them. Longer time indicates internal biotic damage, possibly a cavity in a tree trunk or inside a timber element. The velocity of sonic waves in sound wood depends on its species, moisture content, and the direction of measurement [6]. The

¹ Ing. Renáta Korenková, PhD., Department of Building Engineering and Urban Planning, Faculty of Civil Engineering, University of Žilina, Univerzitná 1, 01026 Žilina, phone: (+421) 41 513 5708, e-mail: korenkova@fstav.uniza.sk.

² Ing. arch. Peter Krušínský, PhD., Department of Building Engineering and Urban Planning, Faculty of Civil Engineering, University of Žilina, Univerzitná 1, 01026 Žilina, phone: (+421) 41 513 5707, e-mail: krusop@fstav.uniza.sk.

paper presents results of the study investigating 6 timber elements - 4 were tested under laboratory conditions, and 2 in a roof space.

Employed equipment: the Fakopp 3D Sonic Tomograph, the Greisinger Hygrometer for specifying absolute wood moisture, a tape, a calliper.

The evaluation of spatial distribution of the speed of sound in timber elements was compared with the outcome of their visual inspection. The average velocity of ultrasonic waves in timber component, depending on wood species, is shown in Table 1.[7]. This evaluation was processed graphically, and has the following shading (see Fig. 1.):

- dark green - sound wood,
- yellow to red - the stage of wood decay,
- blue - the presence of cavities.

Tab. 1: The average velocity of a ultrasonic wave according to the tree species [7]

The average velocity perpendicular to grains (m/s)			
The stage of damage	tree species		
	spruce, fir	pine	oak
1	1260 - 1800	1160 – 1750	1640 – 2100
2	920 - 1260	840 – 1160	1180 – 1640
3	750 - 920	680 – 840	850 – 1180
4	500 - 750	500 - 680	600 - 850

2 CASE MEASUREMENTS IN SITU

2.1 The village of Turzovka – a Roman Catholic church, the truss over the sanctuary

The church has an original timber roof frame over the nave dated from 1759 [8]. It is made of spruce with hewn elements. A part of the truss over the sanctuary is colonised by bats, there are obvious leavings of their excrements on timber. Measurements were made in a collar beam nearby the central trestle. The lower speed of sound indicated the higher moisture content in wood. It is because its capillaries that were filled up with the air are now filled up with water [6]. In consequence of this the environmental resistance to spreading ultrasonic waves rises. The collar beam is 190/140mm horizontally. It is clearly broken-down by ligniperdous insects, but it is weak, non-active damage. There are visible cracks close to the surface on its bottom, maximally 5 mm wide.

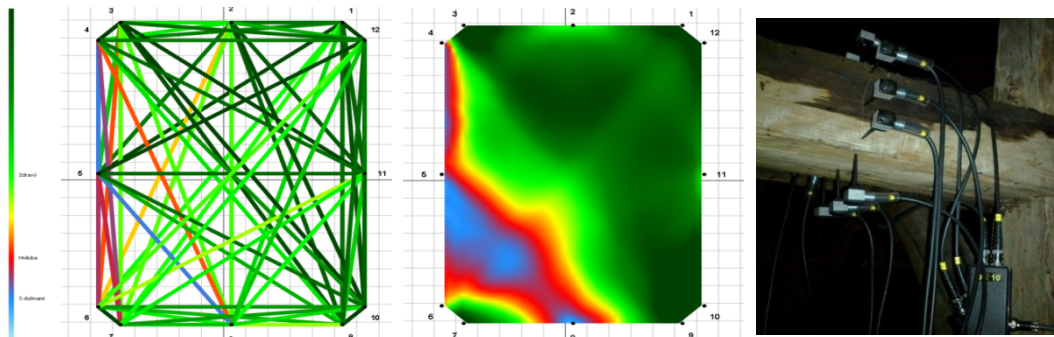


Fig. 1: The collar beam - the roof frame of the Turzovka’s church. The linear and 2D tomogram, right - the photo from measuring

The tomograms prove that there are cavities, or some larger crannies in the lower corner of its cross-section, which is not evident from the visual inspection. Measurements may be affected by bats' droppings.

2.2 The village of Turzovka – a Roman Catholic church, the truss over the main nave

The church has an original timber roof frame over the sanctuary dated from 1759 [8]. This truss is quite well-preserved; there is some local significant damage, especially on its foot. A foot strut of a king post, with dimensions 180/215 mm, on the southern side was tested. The visual examination refers to perceptible surface damage. It is the consequence of ageing and an attack of ligniperdous insects - woodworm that is not active. There are also splits nearby the surface, their width is max. 5 mm, their depth is unequivocal. The tomogram demonstrates only surface damage of a timber element which is sound at its depth.

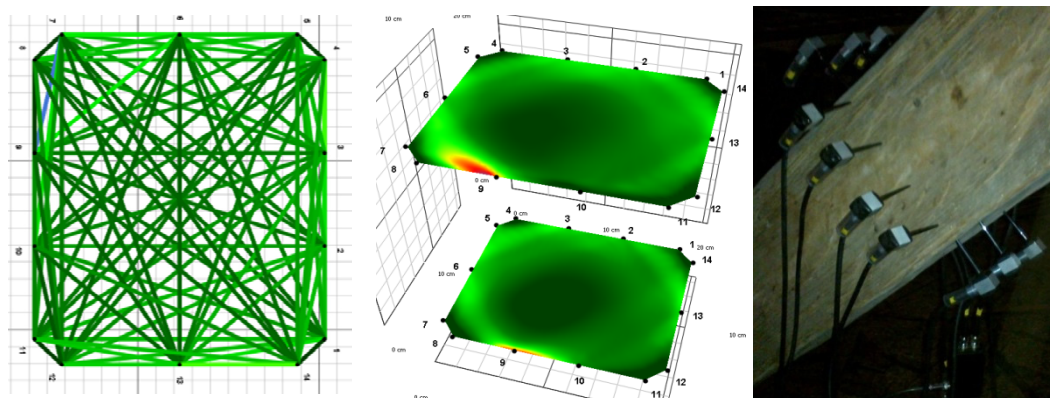


Fig. 2: The foot strut - the roof frame over the nave in the Turzovka's church. The two-level tomogram with 300 mm spacing, right - the photo from measuring

3 CASE MEASUREMENTS IN LABO

3.1 The village of Čierny Váh - a part of a strut of the church truss.

The roof frame of the church in Čierny Váh is of 1803 (d) [9]. Measured timber part is spruce, and has 190/170 mm. The moisture content of wood is 10%. The ocular inspection confirms distinctive breaches, and surface degradation caused by ligniperdous insects and ageing.

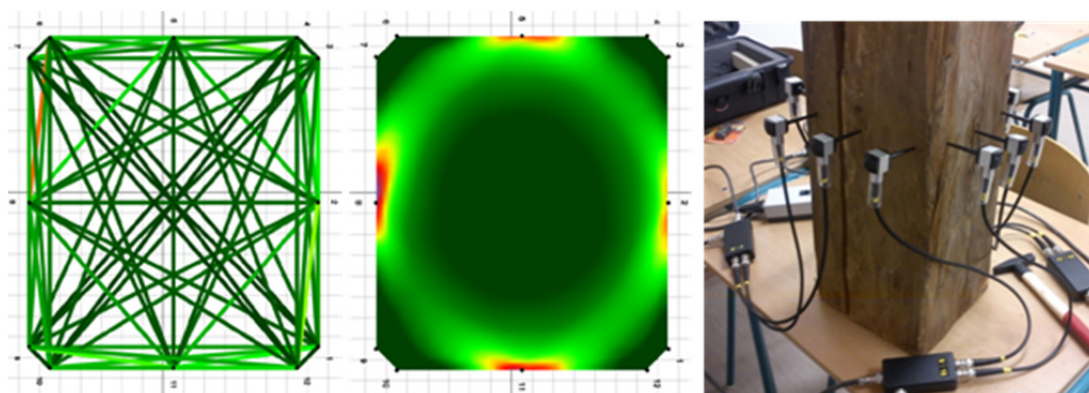


Fig. 3: The part of a strut - the roof frame of the church in Čierny Váh. The 2D tomogram, right - photo from measuring

One evident crack is 70 mm deep, and reaches almost the diameter centre. Its width is 12 mm on the surface with gradual tapering towards the centre. It was not clearly caught by scanning. The linear tomogram indicates a defect between sensors 6 and 8, unlike the 2D one.

3.2 The village of Kamenná Poruba - a part of a post of the church truss

The truss construction, made of spruce, arose in 1870. The moisture content of wood is 10%. We studied a timber element with dimensions 230/190 mm. The visual examination reveals some damage on its surface as a result of an activity of ligniperdous insects. It has a fissure extending to 100 mm, running towards the centre where it has the width of around 1 mm. Despite it is rather deep, it is not visible neither in the 2D tomogram, nor in the linear one.

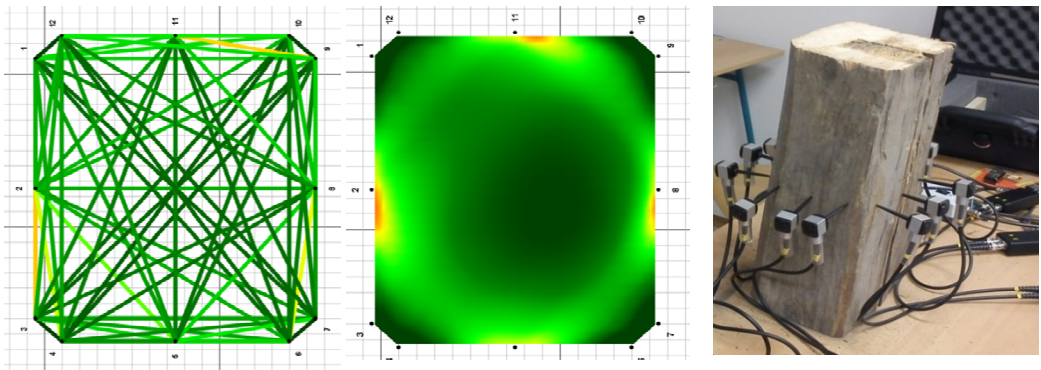


Fig. 4: The part of a post - the roof frame of the church in Kamenná Poruba. The 2D tomogram, right - photo from measuring.

3.3 The village of Socovce - a part of a strut of the church truss

The roof frame of the church in Socovce is of 1775 (d) [10]. The timber strut is spruce with the cross-section of 190/150 mm. The moisture content of wood is 10%. There are discernible marks of damage from ligniperdous insects, and more surface cracks max. 3 mm wide. One of them is 10 mm wide and 50 mm deep, but it is not found in the 2D tomogram. The linear one shows a defect between sensors 2 and 3. There is obvious surface damage in the middle part of the cross-section.

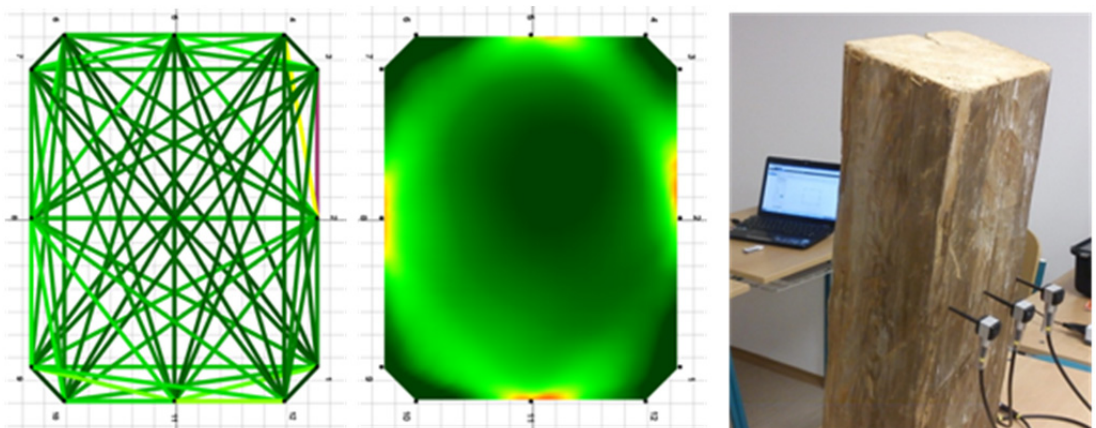


Fig. 5: The strut - the roof frame of the Socovce's church. The linear and 2D tomogram, right - photo from measuring

3.4 The village of Čimhová - a part of a wall plate of the church truss

The roof frame of the church in Čimhová is of 1775 (d) [8]. This part of a wall plate in the church truss made of fir was chosen as an example of an irregular cross-section of a timber element. It is approximately 200/190 mm. The visual study unveils the higher age of an element as well as its decay in a large measure. The leaking water caused considerable damage

The tomogram refers to its surface damage with one rotted small channel, and points out the difficulty of achieving an exact scan of such a section. Therefore, the precision of this measurement is debatable.

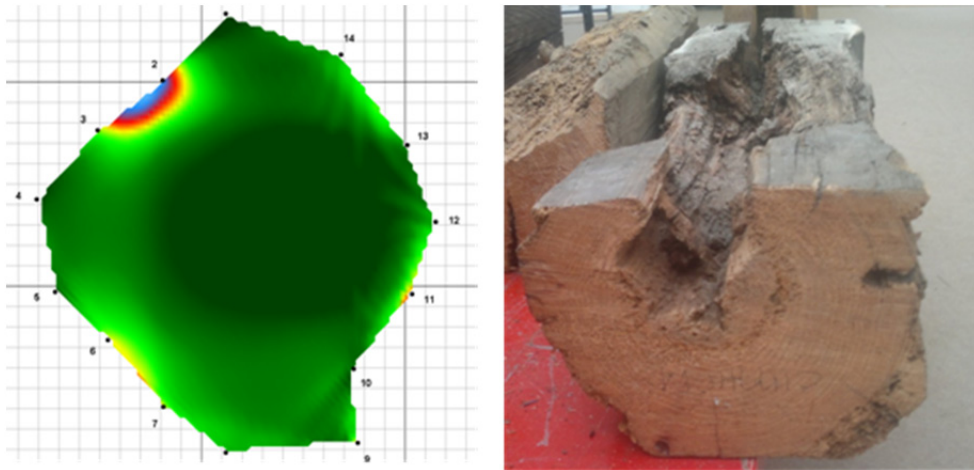


Fig. 6: The involved part of a wall plate - the roof frame of the Čimhová's church.
The tomogram, left - photo of measured element

4 CONCLUSION

The Fakopp 3D Sonic Tomograph is used for making the diagnosis of latent, i.e. internal, damage to living trees. Due to the conservation as well as the historical value of investigated timber elements it is necessary to prefer non-invasive detection techniques to prevent the loss of valuable information. That is why sensory perception (visual, tactual, auditory) is required to be used in determining the technical condition of historical trusses. However, such a method is not always sufficient, and therefore it is recommended to employ the devices that can provide non-destructive examination [11].

The paper was aimed to highlight the differences between the results gathered by visual inspection, and those that were obtained in making the diagnosis using the Fakopp 3D Sonic Tomograph. Six timber components were studied and assessed. Introduced outcomes prove that the visual assessment is in contrast with that which was made with the equipment. The evident cracks on timber elements, tested in the laboratory, did not occur in tomograms.

It can be claimed that this measuring manner was not successful in the case of the timber component damaged by breach running almost into its centre. It means that such a procedure may not fit for crack detection in timber with small dimensions. The fissure was not found and scanned as supposed. It is needful to take into consideration certain disadvantages of measuring, particularly the fact that only one cross-section, i.e. the area of one element, is investigated. Regardless this, it would be advisable to continue in testing this tool as a helpful instrument to settle the technical condition of historically valuable timber, and to try to specify what may affect the quality and accuracy of measurements made with this device.

ACKNOWLEDGEMENT

This contribution is the result of the project implementation: "Support of Research and Development for Centre of Excellence in Transport Engineering" (ITMS: 26220120031) supported by the Research & Development Operational Programme funded by the ERDF.

REFERENCES

- [1] ĎURIAN, K., SUCHÝ, L., ZACHAROVÁ, D., KRUŠINSKÝ, P.: Roofs and truss structures over the church of St. Peter of Alcantara and Monastery in Okolicne, In: *Monument revue* : journal for the promotion of scientific knowledge monuments in Slovakia. Vol. 1, No. 2 (2012), s. 26-28. (In Slovak language).
- [2] LIVINGSTON, RA: Nondestructive materials characterization for historic conservation, Nondestructive Characterization of Materials VII, PTS 1 and 2 Book Series: *Materials Science Forum*, Volume: 210-2 Pages: 751-757 Part: 1 & 2 Published: 1996.
- [3] RODRIGUEZ LINAN, C.; MORALES CONDE, MA J.; RUBIO DE HITTA, P.; et al., Inspeccion with non destructive techniques of a historic building: oratorio San Felipe Neri (Cadiz). *Informes dela Construcccion*, Volume: 63 Issue: 521 Pages: 13-22 DOI: 10.3989/ic.10.032 Published: JAN-MAR 2011.
- [4] KORENKOVÁ, R., The analysis of methods used in renovations of historical roof frames. In: *Civil and environmental engineering*, Vol. 9, 2013, No. 2, p. 144 - 149.
- [5] GILBERT, E. A., SMILEY, E. T., Picus sonic tomography for the quantification of decay in white oak (*quercus alba*) and hickory (*carya spp.*). *Journal of Arboriculture and Urban Forestry*, vol. 30(No. 5): September 2004.
- [6] REINPRECHT, L., HRIVNÁK, J., Ultrasonic and drilling resistance materiology of deciduous and logs. *Acta Facultatis Xylogologiae Zvolen*. Zvolen : TU Zvolen, 2012, pp 54(1): 43 –54. (In Slovak language).
- [7] KLOIBER, M., KOTLÍNOVÁ, M., Comparison of Testing Methods of Timber on Medieval Beams of a Store House Floor of Castle Pernstejn. In “*5th International Conference for NDT and Technical Diagnostics*”. Moskva : Russian Society for Non-Destructive Testing, 2006. p. 86-86.
- [8] SUCHÝ, L. a kol.: *Historical trusses in regions Orava and Kysuce*. Miroslav Gibala KNM, 2010, p. 224 + 1 DVD. (In Slovak language).
- [9] KORENKOVÁ, R., KRUŠINSKÝ P., The analysis of roof structures of historical trusses in selected regions of Slovakia. In: *Civil and environmental engineering: scientific technical journal*. Vol. 9, No. 1 2013, s. 21-26.
- [10] SUCHÝ, L. a kol.: *Historical trusses in region Turiec*. Miroslav Gibala KNM, 2008, p. 102. + 1 DVD. (In Slovak language).
- [11] HAVIROVA, Z., KUBU, P., Reliability and service life of constructions and buildings of wood, In *Wood Research* 51, 2007, pp. 15 – 28.

Reviewers:

Doc. Ing. Antonín Lokaj, Ph.D., Department of Building Structures, Faculty of Civil Engineering, VŠB-Technical University of Ostrava.

Doc. Ing. Jaroslav Sandanus, Ph.D., Department of Steel and Timber Structures, Faculty of Civil Engineering, Slovak University of Technology in Bratislava.

Kateřina KUBENKOVÁ¹

**POSOUZENÍ ENERGETICKÉ NÁROČNOSTI BUDOVY
Z HLEDISKA LEGISLATIVNÍCH ZMĚN**

**ASSESSMENT OF THE ENERGY PERFORMANCE OF THE BUILDING
IN TERMS OF LEGISLATIVE CHANGES**

Abstrakt

V první polovině roku 2013 došlo ke změně hodnocení energetické náročnosti budov změnou legislativy. V platnost vstoupila nová vyhláška [7] dle níž se v současnosti hodnotí budovy, dříve platná vyhláška [6] byla zrušena. Ovšem platnost samotných průkazů energetické náročnosti je 10 let, tudíž se v současnosti a v budoucích cca 10 letech můžeme setkávat se dvěma různými průkazy energetické náročnosti budovy. Na konkrétním příkladu bytového domu jsou tyto průkazy energetické náročnosti hodnoceny společně s vyhodnocením skutečných spotřeb energetické náročnosti.

Klíčová slova

Energetická náročnost budov, Průkaz energetické náročnosti budovy.

Abstract

In the first half of 2013 there was a change in the rating of the energy performance of buildings by changing legislation. The new regulation [7] according to which buildings are rated at present came into force, previously valid regulation [6] has been cancelled. But the validity of the sole energy performance certificates is 10 years, so at present and in the future app. 10 years, we shall meet with two different certificates of energy performance of the building. On the example of a residential building these energy certificates are evaluated together with an assessment of the actual consumption of energy performance.

Keywords

The energy performance of buildings, Energy performance certificate of a building.

1 PLATNÁ LEGISLATIVA

Dne 1. dubna 2013 vstoupila v platnost novela vyhlášky o energetické náročnosti budov s označením vyhláška č. 78/2013 Sb. [7]. Jedná se o prováděcí vyhlášku k zákonu č. 406/2000 Sb. o hospodaření energií ve znění pozdějších předpisů (zatím poslední novela zákona č. 318/2012 Sb.) [8]. Tato vyhláška zrušila dříve platnou vyhlášku o energetické náročnosti budov s označením vyhláška č. 148 / 2007 Sb. [6]. Dříve platná vyhláška byla zrušena, ovšem platnost průkazů energetické náročnosti budovy je deset let. Tudíž se budeme setkávat na trhu s dvojími průkazy energetické náročnosti budovy, které nejsou totožné a hodnoty v nich uvedené se mohou lišit. Metodika zpracování průkazů energetické náročnosti vychází z evropské legislativy. Podobně jako v ČR se zpracovávají energetické certifikáty pro budovy v celé EU. Kvalita zpracování průkazů

¹ Ing. Kateřina Kubenkova, Katedra pozemního stavitelství, Fakulta stavební, VŠB-Technická univerzita Ostrava, Ludvíka Podéště 1875/17, 708 33 Ostrava-Poruba, tel.: (+420) 597 321 912, e-mail: katerina.kubenkova@seznam.cz.

energetické náročnosti budov pak vede k lepší informovanosti veřejnosti i ke snížení spotřeby energie při užívání budov, a to nejen těch, které jsou přístupny veřejnosti [1].

2 POPIS BYTOVÉHO DOMU

Pro konkrétní příklad byl vybrán bytový dům realizovaný ve druhé polovině minulého století, provedený montovanou blokopanelovou technologií soustavy HK 60. Jedná se o samostatně stojící nepodsklepený bytový dům s pěti nadzemními podlažními, s celkovým počtem šestnáct bytových jednotek.



Obr. 1: Pohled na bytový dům (květen 2007) Obr. 2: Pohled na bytový dům (září 2011)

Obvodový plášť tvoří blokopanely ze struskopemzobetonu v tl. 375 mm. a tl. 300 mm. Celková revitalizace budovy byla provedena na přelomu let 2007 a 2008. Obvodový plášť byl zateplen systémem ETICS s tepelnou izolací z EPS 70 F tl. 100 mm. Původní výplně otvorů v obvodovém plášti byly nahrazeny novými plastovými okny a balkonovými dveřmi s izolačními dvojskly. Jednoplášťová plochá střecha byla dodatečně zateplena tepelnou izolací z EPS 100 S tl. 120 mm. Strop nad 1NP byl dodatečně opatřen tepelnou izolací z minerálního vlákna tl. 50 mm s vyztuženou tenkovrstvou omítkou. Strop nad venkovním prostorem, vstupem a přílehlou místností (kolárnou) byl dodatečně opatřen tepelnou izolací z minerálního vlákna tl. 100 mm s vyztuženou tenkovrstvou omítkou. Dodávka tepla pro vytápění bytového domu je zajištěna společností Dalkia Česká republika, a.s.. V roce 2002 byla osazena vlastní místní malá výměňková stanice s výměníkem Alfa-Laval. Ta upravuje teplotu topné vody dle aktuálních požadavků vlastníků. Topnou vodu s přívodní teplotou až 80 °C a přípravu teplé vody na 55 °C (v denním režimu) a 45 °C (v nočním režimu). Lze tedy hovořit o ekvitermním řízení. Podkladem pro tepelně technické výpočty byla projektová dokumentace [5].

2.1 Skutečná spotřeba energie

Výchozím podkladem, dokládajícím skutečnou spotřebu energie v časovém rozsahu posledních let, jsou faktury společnosti Dalkia Česká republika, a.s.

Tab. 1: Skutečně spotřebované množství energie pro vytápění bytového domu

	jednotka	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011
Spotřeba tepla	GJ	792	789	673	682	629	638	428	343	413	329

Z těchto podkladů jsou převzaty následující hodnoty spotřeby energie v letech 2002 až 2011, které jsou zpracovány v tabulce č. 1 a v grafu č. 1.

Z grafu jsou patrné dvě skutečnosti:

- na konci roku 2003 došlo k osazení poměrového měřicího zařízení na jednotlivá otopná tělesa včetně osazení termoregulačních ventilů,

- na přelomu let 2007 / 2008 došlo ke komplexnímu zateplení obvodového pláště včetně výměny výplní otvorů.



Graf. 1: Grafické znázornění skutečně spotřebované energie pro vytápění bytového domu

2.2 Parametry výpočtu

Tepelně technické posouzení vlastností konstrukcí bylo provedeno v souladu s normou ČSN 73 0540 [4]. Tepelně technické parametry konstrukcí, které jsou vystaveny různým teplotním prostředím, jsou uvedeny v tabulce 2.

Tab. 2: Tepelně technické parametry konstrukcí oddělujících prostory s různým teplotním režimem

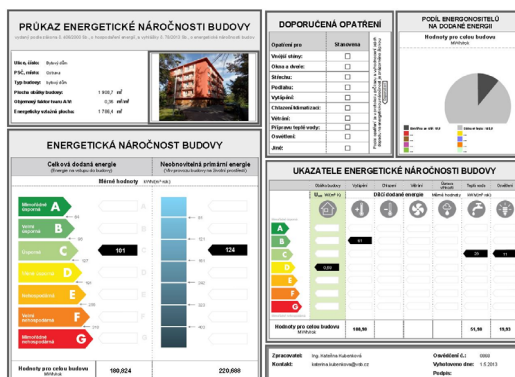
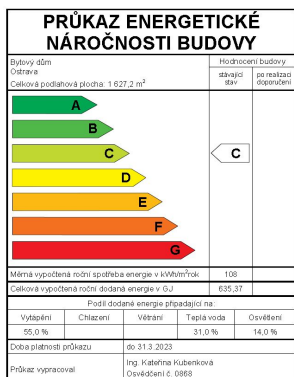
Konstrukce	Součinitel prostupu tepla U [$W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$]	Tepelný odpor konstrukce R [$m^2 \cdot K \cdot W^{-1}$]	Požadovaná hodnota součinitele prostupu tepla $U_{N,20}$ [$W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$]	Doporučená hodnota součinitele prostupu tepla $U_{rec,20}$ [$W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$]	ne/vyhovění požadavku normy ČSN 73 0540 – 2 (2011)
Obvodová stěna + 100 EPS	0,32	2,97	0,30	0,25	nevyhovuje
Obvodová stěna v parapetech + 100 EPS	0,33	2,88	0,30	0,25	nevyhovuje
střecha	0,24	3,96	0,24	0,16	vyhovuje
Podlaha nad exteriérem (nad vstupem)	0,25	3,73	0,24	0,16	nevyhovuje
Okna	1,2	---	1,5	1,2	vyhovuje
Vstupní dveře	1,7	---	1,7	1,2	vyhovuje
Podlaha na terénu	3,17	0,11	---	---	---
Podlaha nad suterénem	0,60	1,45	0,60	0,45	vyhovuje

(pokračování)

Konstrukce	Součinitel prostupu tepla U [$W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$] U_1	Tepelný odpor konstrukce R [$m^2 \cdot K \cdot W^{-1}$]	Požadovaná hodnota součinitele prostupu tepla $U_{N,20}$ [$W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$]	Doporučená hodnota součinitele prostupu tepla $U_{rec,20}$ [$W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$]	ne/vyhovění požadavku normy ČSN 73 0540 – 2 (2011)
Schodišťová stěna vnitřní 200 mm	2,22	0,28	1,3	0,9	nevyhovuje
Světlík	2,30	---	1,5	1,2	nevyhovuje
Garážová vrata	2,3	---	---	---	---

2.3 Průkaz energetické náročnosti budovy

Pro vybraný bytový dům byl zpracován průkaz energetické náročnosti budovy (dále jen PENB) dle vyhlášky o energetické náročnosti budov. PENB byly zpracovány pomocí software tepelná technika [2]. PENB zpracovaný dle [6] obsahuje 10 stran, z nichž 9 je součástí protokolu a poslední strana obsahuje grafické znázornění.



Obr. 3: Grafické znázornění PENB dle [6] Obr. 4: Grafické znázornění PENB dle [7]

Grafické znázornění PENB dle [6] je uvedeno na obrázku č. 3. PENB zpracovaný dle [7] obsahuje přibližně 20 stran, z nichž 18 je součástí protokolu a 2 poslední strany představují grafické znázornění protokolu. Grafické znázornění PENB dle [7] je uvedeno na obrázku č. 4. V tabulce č. 3 jsou uvedeny ukazatele, na jejichž základě chodí k zařídování do klasifikačních tříd.

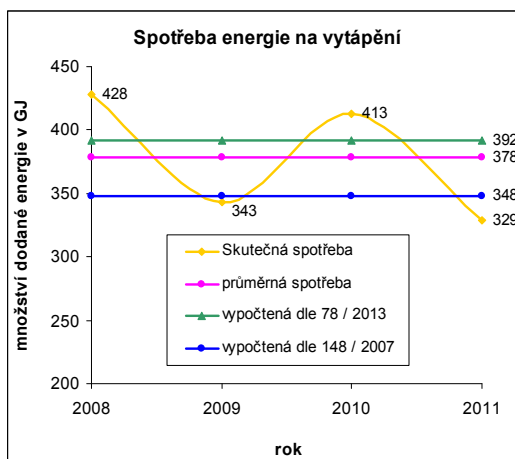
3 VYHODNOCENÍ

Při stanovování energetické náročnosti jedné budovy rozdílnými metodami dle [6] a dle [7] vznikají rozdíly ve výsledných hodnoceních. Ačkoli se nejedná o markantní rozdíly, je nutné veřejnost s těmito rozdíly seznámit. V případě dříve zpracovávaných PENB bylo hodnocení vztaženo především na hodnotu celkové dodané energie do budovy. Celková dodaná energie udávaná v GJ byla prostřednictvím celkové vnitřní podlahové plochy v m² (vycházející z celkových vnitřních rozměrů) přepočtena na měrnou energii v kWh.m⁻².a⁻¹. Toto hodnocení je zachováno i v nově zpracovávaných PENB, ovšem celková vnitřní podlahová plocha byla nahrazena celkovou energeticky vztažnou plochou (vychází z vnějších rozměrů).

Tab. 3: Parametry výpočtu PENB dle [1] a [2]

Hodnocený parametr	dle vyhlášky č. 148 / 2007 Sb. [1]	dle vyhlášky č. 78 / 2013 Sb. [2]	jednotka
Plocha pro výpočet měrné spotřeby energie (celková vnitřní podlahová plocha dle [1] / energeticky vztažná podlahová plocha dle [2])	1.627,2	1.786,4	m²
Měrná spotřeba energie	108	101	kWh . m⁻² . a⁻¹
Měrná spotřeba energie pro referenční budovu (pro výpočet dle [1] rozhraní klasifikačních tříd C / D)	120	127	kWh . m ⁻² . a ⁻¹
Klasifikační třída	C (vyhovující)	C (úsporná)	---
Celková dodaná energie	635,4	650,9	GJ
Dodaná energie na vytápění	348,3	392	GJ
Průměrný součinitel prostupu tepla U_{em}	0,58	0,58	W . m ⁻² . K ⁻¹
Normová hodnota průměrného součinitele prostupu tepla $U_{em,N}$ resp. referenční hodnota prům. součinitele prostupu tepla $U_{em,R}$	0,72	0,54	W . m ⁻² . K ⁻¹
Splnění požadavku $U_{em} \leq U_{em,N}$ (klasifikační třída)	splněno	nesplněno (D - méně úsporná)	---
Měrná neobnovitelná primární energie	---	124	kWh . m ⁻² . a ⁻¹
Měrná neobnovitelná primární energie pro referenční budovu (rozhraní klasifikačních tříd C / D)	---	161	kWh . m ⁻² . a ⁻¹
Klasifikační třída	---	C (úsporná)	---

Druhým parametrem hodnocení, kterému je v nové metodice zpracovávaném PENB kladen velký význam, je průměrný součinitel prostupu tepla U_{em} ve $W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$. V případě prodeje a pronájmu budovy nejsou kladeny žádné požadavky na posuzované parametry.



Graf. 2: Grafické znázornění vypočtené a skutečně spotřebované energie pro vytápění bytového domu

Třetím parametrem hodnocení PENB dle [7] je měrná neobnovitelná primární energie stanovovaná z faktoru primární energie jednotlivých energenositelů.

V případě této hodnocené budovy je vypočtená spotřeba energie (dodaná energie) na vytápění budovy dle [6] rovna hodnotě 348 GJ a vypočtená spotřeba energie (dodaná energie) dle [7] je rovna hodnotě 392 GJ. Rozdíl hodnot je dán úpravou výpočtu a zpřesněním vstupních výpočtových hodnot. Celková energie, která je skutečně dodaná do budovy odpovídá hodnotám 428 GJ (pro rok 2008), 343 GJ (pro rok 2009), 413 GJ (pro rok 2010) a 329 GJ (pro rok 2011). Průměrná hodnota celkové dodané energie na vytápění za čtyři roky je 378 GJ.

4 ZÁVĚR

Z grafu č. 2 je patrné, že vypočtené spotřeby energií nejsou totožné se skutečnou spotřebou energie. Je nutné vzít v úvahu rozptýl skutečných spotřeb energií v jednotlivých letech, které vyplývají z různých vlivů např. rozdílnost klimatických podmínek, rozdílnost obydlenosti bytových jednotek, rozdílnost vnitřních teplot apod. Toto jsou okrajové podmínky, které vstupují do výpočtu a se skutečnými okrajovými podmínkami se odlišují.

PENB zpracovávané pro prodej a pronájem budov, či jejich ucelených částí mají pouze informativní charakter, nejsou zde kladeny žádné požadavky. V současnosti se diskutuje o novele zákona [8] v oblasti možných úlev při povinnosti zpracovávat PENB.

Na tomto příkladu plně obydleného bytového domu je viditelný rozdíl mezi skutečnými a vypočtenými hodnotami spotřeb energií. Ještě větší rozdíl by mohl nastat v případě neobydleného či jen sporadicky obydleného rodinného domu určeného k prodeji či pronájmu, to budou skutečné spotřeby diametrálně odlišné od hodnot vypočtených. Proto je na zvážení návrh nahrazení PENB za vyúčtování skutečných spotřeb energií za poslední roky.

LITERATURA

- [1] BULL, R.; CHANG, N.; FLEMING, P. The use of building energy certificates to reduce energy consumption in European public buildings. ENERGY AND BUILDINGS. 2012. 50. p. 103 - 110. ISSN 0378-7788.
- [2] ENERGIE 2009, ENERGIE 2013, Svoboda software.
- [3] KOZÁKOVÁ, Markéta. Metodika pro stanovení změn tepelných ztrát při změnách tvaru objektu. Ostrava, 2011. Sborník vědeckých prací Vysoké školy Báňské - Technické univerzity Ostrava. Dostupné z: <http://www.fast.vsb.cz/export/sites/fast/cs/veda-a-vyzkum/odborna-cinnost-fakulty/sbornik-vedeckych-praci/archiv-vydanych-sborniku/sbornik-vs-b-fast-2011-2.pdf>
- [4] ČSN 73 0540 - 2. Tepelná ochrana budov: Část 2: Požadavky. 2011.
- [5] projektová dokumentace komplexní revitalizace bytového domu vypracována v roce 2007, kreslila Ing. K. Kubenková, zodp. Projektant Ing. M. Škarpa.
- [6] Vyhláška o energetické náročnosti budov. In: Sběrka zákonů. 2007, č. 148.
- [7] Vyhláška o energetické náročnosti budov. In: Sběrka zákonů. 2013, č. 78.
- [8] Zákon o hospodaření energií. In: Sběrka zákonů. 2000, č. 406.

Oponentní posudek vypracoval:

Doc. Ing. Josef Chybík, CSc., Ústav stavitelství, Fakulta architektury, VUT v Brně.

Doc. Dr. Ing. Zbyněk Svoboda, Katedra konstrukcí pozemních staveb, Fakulta stavební, ČVUT v Praze

Radka URBÁNKOVÁ¹

FLOOR MOSAICS FROM THE TERRITORY OF ROMAN PROVINCE MOESIA

PODLAHOVÉ MOZAIKY Z ÚZEMÍ ŘÍMSKÉ PROVINCE MOESIE

Abstract

This article deals with floor mosaics from the territory of Roman province Moesia. The term Moesia is used in this article only as a geographical definition for the territory of today's Serbia, Kosovo and Bulgaria. First, it summarizes the artistic technique as such. The following text describes the types of mosaics. The main part of the article deals with the examples of floor mosaics from the individual sites in the territory of Roman province Moesia and their ideological patterns.

Keywords

Floor mosaics, Moesia, Roman Empire, Byzantine period.

Abstrakt

Práce se věnuje podlahovým mozaikám z území bývalé římské provincie Moesie. Termín Moesie je používán v této práci výhradně jako zeměpisná definice pro území dnešního Srbska, Kosova a Bulharska. Nejdříve je shrnuta tato umělecká technika jako taková. Dále jsou popsány druhy mozaik. Hlavní část práce se zabývá podlahovými mozaikami z jednotlivých lokalit a jejich ideovými vzory.

Klíčová slova

Podlahové mozaiky, Moesie, doba římská, byzantské období.

1 INTRODUCTION

Moesia is geographically located in Serbia, Kosovo and Bulgaria today (fig. 13). *Domitian* divided the province into two parts in 85 AD - *Moesia Superior (Moesis Margensis)* to the west, is a mountainous area rich in minerals and precious metals. *Moesia Inferior*, in the east, lies on fertile plains where cereals are grown, there are plenty of farms and good pasture for livestock [14]. The article aims to contribute to understanding the origin of ideological patterns used on the floor mosaics in the territory of Roman province *Moesia*.

2 THE METHODS OF CONSTRUCTION OF FLOOR MOSAIC

There are two techniques to make mosaics – *opus tessellatum* and *opus vermiculatum*. The first one employs larger terracotta or mineral stones tesseras (size above 1 cm²). The second one is applied for figured compositions – tesseras are smaller. The *opus sectile* technique uses large tiles of marble or other stone and form complex geometrical compositions. Often it is the case of *opus tessellatum* and *opus vermiculatum* applied in combination. Pebble mosaics involved a cement floor with pieces of pottery, mosaic cubes and coloured marbles inserted into it. Decorative borders, such as the rope pattern, were placed round a central panel, which was often a copy of a painting. From 2nd century

¹ Mgr. Radka Urbánková, Faculty of Philosophy and Science, Silesian University in Opava, Masarykova třída 343/37, 746 01 Opava, phone: (+420) 605 801 276, e-mail: radka.urbankova@gmail.com.

BC are known panels about 40 cm², called *emblemata*. They could be made in workshops on trays or glued to a cloth on which the scene had been painted. Under an edict of *Diocletian* in 301 AD decorators were to be paid 150 denarii per day, while builders were to be paid only 50. This certainly gave status to the artists. It is estimated that it would take 6 days to make 1 m² of mosaic [13].



Fig. 1: Graphic reproduction of mosaic stratigraphy adapted from ancient literary. 1) *Statumen* - Layer which is made of large stones laid on the ground. This layer only exists if the mosaic has been constructed on a natural soil. 2) *Rudus* - Layer which is spread over the *statumen*. This layer is made of a lime mortar with large aggregates. 3) *Nucleus* - Layer which is spread over the *rudus* in a thinner layer. The *nucleus* is made of a mortar with fine aggregates. 4) Bedding layer - Layer of mortar which is very rich in lime, and thinly applied in small sections over the *nucleus*. Tesserae are inserted in this layer before the mortar sets. 5) *Tessellatum* - Layer which constitutes the mosaic surface and is composed of tesserae and mortar filling the interstices between them [13].

3 FLOOR MOSAICS FROM THE AREA OF INTEREST

3.1 Villa Armira

The site *Villa Armira* is situated in the Eastern Rhodopes (fig. 13), North from the town Ivaylovgrad (Bulgaria). The place is named after the *Armira* River. *Villa Armira* is exposed on a slant South slope on the left bank of the river. The ancient *villa Armira* was discovered in 1964. The building of the villa is related to the time of the Roman emperors *Trajan* (98-117 AD) and *Hadrian* (117-138 AD). The villa prospered for about three centuries and was burnt and looted during the war between the Romans and the Goths in 376-378 AD. The marble palace of the owners was most probably burnt down after the battle at *Hadrianopolis* on the 9th August 378 AD [6].



Fig. 2: Part of the mosaic with the portrait of villa Armira's owner and his children [6].

In the room No. 10 there are portraits of a middle-aged bearded man with an earring in one ear and the frail figures of two children, a boy and a girl, on the mosaic (fig. 2). Their bodies are naked and bear the signs of *rachitis*. The absence of the image of the woman (the wife and mother) is probably due to her early death, maybe at childbirth. The man from the portrait has the features of a man from the eastern Roman provinces Syria or Palestine. Maybe he came to the region as the son-in-law in the family of the *Armira villa* owners and his wife died at childbirth. This foreigner was only one of owners from the 1st half of the 2nd century AD. The origin of the founder of the ancient

villa Armira was either a direct representative of the Thracian aristocracy or an heir of a Thracian para-dynast from the lower Arda (ancient *Arpesos*) river valley. In any case, he was a well-educated man with the legal status of a Roman citizen [5].

3.2 Marcianopolis

The Roman town *Marcianopolis* (fig. 13) was the capital of the Province *Moesia Secunda*, it was built by the springs of the Devnya river and was named after the emperor's (*Marcus Ulpius Traianus*; 98-117 AD) sister *Marciana*. The Museum of Mosaics in Devnya (Varna province, Bulgaria) is standing on the ancient foundations of the building „House of Antiope“ with the early Byzantine mosaics from *Marcianopolis*, which was built at the end of the 3rd - the beginning of 4th century (the time of Constantine The Great) and existed until the 7th century. The mosaics were made in techniques *opus tessellatum* and *opus vermiculatum* out of small cubeshaped stones (tesseras) of marble, limestone, baked clay and coloured glass (smalta) [15].

1) The *Gorgon Medusa* floor mosaic (fig. 3) covers the living-room and dining room (*triclinium*) and represent the shield of the goddess *Pallas Athena* decorated with the head of *Gorgon Medusa*. It was intended to ward the evil away and to petrify ill-wishers with terrifying appearance and freezing gaze (*apotropaion*).



Fig. 3: Marcianopolis, Medusa mosaic detail (left), Ganymede and the eagle mosaic detail (middle) and Pannonian volutes mosaic detail (right) [15].

2) The *Satyr* and *Antiope* floor mosaic in the bedroom (*cubiculum*) depicting one of love affairs of *Zeus*. The nymph *Antiope* was seduced by *Zeus*, who had changed into the looks of a young *satyr* (creature personifying the animal fertility). The mosaic is accompanied by two inscriptions in Ancient Greek - ΣΑΤΥΡΟΣ (*satyr*) and ΑΝΤΙΟΠΗ (*Antiope*).

3) The *Ganymede* and the eagle floor mosaic (fig. 3) in the reception hall (*oecus*). *Ganymede*, the son of the Trojan king *Tros* and the nymph *Callirhoe*, was the most handsome of all mortals. *Zeus*, assuming the shape of an eagle, abducted him and took him to *Olympus* to be the mortal cup-bearer for the gods. *Tros*, *Ganymede*'s father, was given magnificent horses.

4) The seasons floor mosaic in the women's apartments (*gynaeece*). A circular emblem of figured type is inscribed into a rectangular frame of geometric ornaments. A rooster picking at grapes, birds and a pair of Roman sandals are depicted in the empty spaces. The corners of the ornamental frame display the allegories of the four seasons with their attributes. The Bust of Autumn is well preserved – personified by a young woman in a gold-woven gown.

5) The Pannonian volutes mosaic (fig. 3) was discovered in a building of unknown use. The decoration of the mosaic consists of repeated geometric patterns in four colour [15].

3.3 Felix Romuliana

Roman imperial city *Felix Romuliana* is located in eastern Serbia (fig. 13), 11 km from Zaječar (Serbia) and nearby village Gamzigrad (2 km). *Felix Romuliana* is a fortified palace and a memorial complex of the Roman emperor from the time of the Tetrarchy, *Gaius Valerius Galerius Maximianus*. He built a palace for himself and his mother *Romula* after whom it is called - *Felix Romuliana*. It was built between 297 and 311 AD, and intended to be the residence of the emperor after the *vincenalia* and his withdrawal from the throne. The ceremony of *vincenalia* was a part of the

ideological programme of the Tetrarchy that anticipated the emperor's withdrawal from the throne after his 20 year reign [12]. Life in *Felix Romuliana* can be divided into 2 horizons: the 1st horizon of construction of the *Galerius*' palace, from the beginning of the 4th century AD; and the 2nd horizon of the Late Roman fortification from the last decades of the 4th and the 1st half of the 5th century AD. After *Galerius*'s death, the complex was inhabited by common people. In the 6th century AD, at the time of *Justinian*, *Romuliana* was renovated. Being exposed to numerous attacks of the Avars and the Slavs in the 7th century AD, the complex was abandoned. According to the archaeological data, Gamzigrad was revived as a fortified Slav settlement in the 11th century AD [11].



Fig. 4: Felix Romuliana, detail of mosaic in south hallway (left); Thessaloniki, north peristyle, detail of south corridor mosaic (right) [7].

The south hallway is divided into 3 carpets by braid borders. The lateral carpets have patterns of meanders, octagons with circles decorated with knots, geometricized wine scrolls, and waves similar to the decoration in Thessaloniki (fig. 4). The central carpet contains smaller panels of geometric decoration. The patterns intersecting dodecagons forming squares and triangles around hexagons and stars of eight diamonds connected with squares - to a labyrinth, surrounded by a crenellated wall, from the 3rd century AD, which has the starting point and the anti-clockwise direction to the centre (Fig. 5) [12]. The filling elements include illusionistic motifs - twisted ribbon and rainbow cable. The rainbow style is characteristic for the eastern half of the Empire [7].



Fig. 5: Felix Romuliana, mosaic in south hallway (left) [7] and detail of labyrinth mosaic (right) [12].

Two apsidal rooms have figured panels combined with geometric mosaics and in one case *opus sectile*. The hunting scenes (fig. 6) were framed with braid, the group of figural scenes surrounded by a meander in perspective and flanked by a geometric design of intersecting circles. The glass meanders in perspective have illusionistic effects. An apsidal reception room had a figural panel depicting *Dionysus* seated in front of a leopard (fig. 6). The figural mosaics are isolated against a white ground. Faces have a slight three-quarter angle; shadows beneath the chins and eyes are delicately indicated with slightly darker tones of tesserae. The hair falls freely in wisps [7]. The rest of the room had geometric mosaics comparable with the south hallway. It seems that the complex was built and decorated within a short time, this means that differences among the mosaics are not chronologically significant, but maybe explain the status of the rooms.

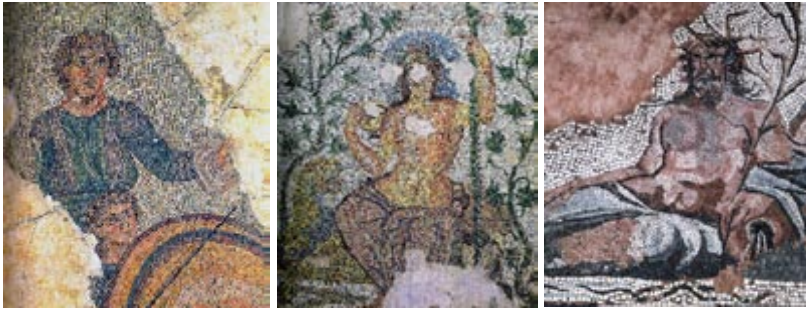


Fig. 6: Felix Romuliana, detail of hunters (left), and Dionysus (middle). Mediana-villa with peristyle, detail of river god (right) [7].

The mosaics in *Galerius's* palace display a symbolical connection with the ideological concept of the palace. There is a massive temple of *Jupiter*, and public rooms including a small baths complex and an elegant *triclinium* decorated with mosaics, the most striking of which features *Bacchus* riding a tiger. Maybe *Dionysus*, who conquered India, symbolize *Galerius* great victory over Persia [8]. It would seem plausible that *Galerius* brought artists from Thessaloniki, where his imperial palace was located, to the place where he built a complex for him and his mother.

3.4 Naissus

City of Nis (Serbia), antique *Naissus*, was located in the center of the Roman province *Moesia Superior* (fig. 13), at the crossroads of major antique roads. In the 2nd century AD *Naissus* was one of the four largest cities in *Dardania* (the district called *Dardania* in *Moesia Superior*, was formed into a province by *Diocletian*, with the capital at *Naissus*) [14]. In the 4th century AD *Naissus* belonged to the province *Dacia Mediterranea*. In this period the city became the residence of Constantine the Great, who was born on the territory of *Naissus*, ruled from 306 AD to 337 AD. The greatest merit to the increase of number of luxury buildings is attributed to his stays in *Naissus* [9].



Fig. 7: Mediana-villa with peristyle, triclinium (left). Sirmium, mosaic of Imperial Bath (right) [7].

The ancient settlement *Mediana* was located in the eastern suburb of the Roman *Naissus* and it is his best-preserved part from the late Roman period. The site dates to the reign of Constantine the Great [9]. The mosaic in the *triclinium's* central hexagonal space of the peristyle villa at *Mediana* is filled alternately with ribbon and braid and centered with rosette designs (fig. 7) [7]. A mosaic from the Large Bath at *Sirmium* (fig. 7) is similar to the floor of the *Mediana triclinium*, it may be a contemporary product of the same workshop.

The mosaics of the apsidal room are damaged; a winged head of *Medusa* set into a geometric pattern survives. Three sides of the peristyle have geometric patterns extended to cover long hallways, while in the center of the north corridor panels of geometric mosaics (fig. 8) flank a central figural composition. The figure panel depicts a mythological scene, maybe *Leda* and the swan, but only parts of a mosaic are preserved [7]. Notice, that a reclining river god (fig. 6) has the same curving patches of color as the *Romuliana Dionysus*. But the similarities between these *Mediana* and *Romuliana* mosaics make it unlikely because they are too far removed from each other in date.



Fig. 8: Mediana-villa with peristyle, north corridor mosaic (left). Sirmium, two layers of mosaic [7].

There is a pattern of a grid of diamonds with squares between their lateral points bordered by an organic vine scroll, eastern of the figure panel (fig. 8). The outlines of the diamonds are repeated and laid in 2 colors - shading. The filling motifs in the diamonds include grids, inscribed circles with crosslets, and irregular curvilinear elements [7]. The pattern is seen also in the Palace of *Galerius* in Thessaloniki (fig. 4), although the filling motifs of *Mediana* are more complex.

It is more than evident that the *triclinium* mosaics may have been laid by mosaicists who worked at *Sirmium*. The peristyle mosaics have coloristic effects comparable to mosaics of Thessaloniki and *Romuliana*. The river god from *Mediana* shows similarities in style to mosaics from *Romuliana* and Thessaloniki. Mosaic workshops in Thessaloniki played an influential role in mosaics farther inland.

In the place of the ambo of early Christian basilica a mosaic representation of Christ's monogram was found. There is a very unfavorable microclimate, which makes it completely inaccessible to visitors. Floor mosaics from *Naissus* are not adequately protected and presented. The only permanent shelter is built above a *triclinium* mosaics of the Villa with peristyle at *Mediana*, the temporary shelters are built above mosaics of early Christian basilica with the monogram of Christ. The rest of more than 900m² of floor mosaic is covered by sand and not presented in any way [9].

3.5 Sirmium

Various rulers, *Diocletian*, *Galerius*, *Licinius* and *Constantine* among others, resided at *Sirmium* (Sremska Mitrovica, Serbia; fig. 13) in the late 3rd and the early 4th centuries AD. In the Palace, in a hallway 50 m long, 2 layers of partially preserved mosaic have been discovered (fig. 8). The later mosaic is more homogenous and less complex in design than the earlier mosaic it replaced. This upper mosaic has a pattern of meanders and lozenges. The color scheme comprise black, red and light brown; the tesserae are coarse. It is possible that the floor dates to 308-316 AD, at the time when *Licinius* made his headquarters in *Sirmium* [7].

3.6 Caričin Grad

Caričin grad is actually *Iustiniana Prima* (Lebane, Serbia; fig. 13), built with the aim of raising the remote village of *Taurision* (the birthplace of *Justinian I*), into the rank of cities of the highest imperial dignity-the seat of the prefect of the *Illyricum* praetory and the newly established archbishopric with jurisdiction over *Dacia* and *Macedonia Secunda*. Caričin grad was populated during the 6th century. The early-Byzantine southern basilica (an area of 45x20 m) is a monumental three-nave building with a transept and an apse on the eastern side, as well as a open-type narthex, an atrium with an ablative well and two side parakleses on the western side (fig. 9). On the right column of the tribilon at the entrance from the narthex into the middle nave was discovered a monogram of Byzantine emperor *Justinian I* (527-565 AD) [10].

The floor mosaic (fig. 9) of the central nave is formed in the shape of three rectangular areas running in the east-west direction. The middle area is covered by a motif of stylized palmettos. The left rectangle make up a lunar and solar emblems - a personification of good and evil and their struggle with temptations, with the goal of saving the human soul, and through the ancient symbols to mark paganism as a sin, which wholly agrees with *Justinian's* policy of "introducing the only true faith". The right rectangle depicts birds, plants and communion chalices as "heaven on earth accessible to the believer." Next to the five-piece ambo a mosaic is depicting a young shepherd

driving three sheep in front of him toward a simple building in the higher right corner. The zone in front of the altar, is represented by a man is fighting a bear, and on the other side above the gentle shepherd is running a spear through a lion rearing on its hind legs [10]. David's battle with the bear, is the prototype of Christ's victory over the forces of darkness.

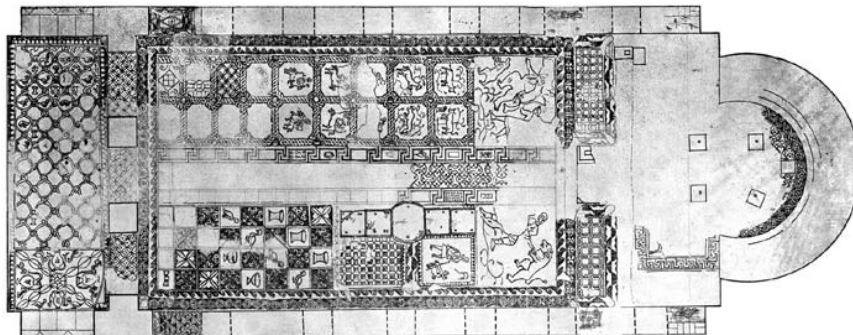


Fig. 9: Caričin grad, mosaic in the southern basilica [10].

By edict of *Theodosius II* of 427 AD, was forbidden to paint Christ and Saints on floors, which would expose them to desecration by the feet of faithful. The mosaic segment of the southern basilica represent a shepherd, but not the Good Shepherd Christ (fig. 10). In Christianity, the shepherd is a divinely anointed master and leader of the flock: the ruler, the priest or the representative of Christ. This shepherd is a prefiguration of the shepherd-king David - personification of a ruler and priest in the sense of a people's shepherd according to the will of God [10].



Fig. 10: Caričin grad, shepherd from the southern basilica (left). Rome, shepherd from Titulus' lamp (right) [10].

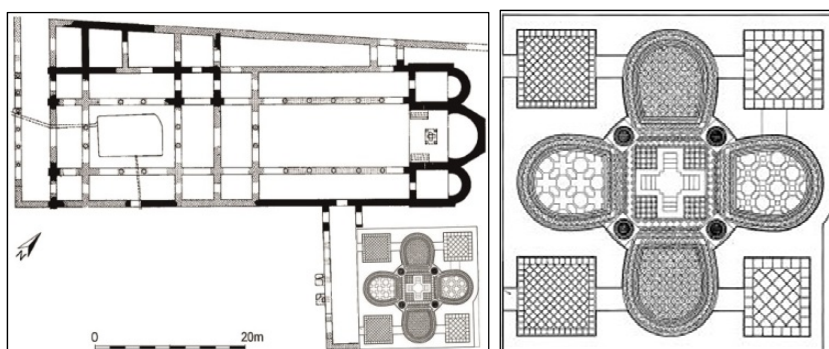


Fig. 11: Caričin grad, plan of the Episcopal Basilica (left) and plan of the baptistery (right) [3].

The baptistery in Caričin Grad was built along the southern wall of the episcopal basilica but was not organically connected to it (fig. 11). The connecting element was the portico, built along the western façade. The baptistery is a building on a square ground plan with slightly reduced dimensions in south-eastern compartment. The central inner space consisted of four conches shaped like horseshoes, with vaults in the upper zone. In the centre was a cruciform piscine. The floors were

covered with mosaics from glass paste [3]. In the northern and southern conches were geometrical ornaments and in the eastern and western conches, were plant and zoomorphic presentations - an octopus, a deer, a rabbit, a foal, a ram and a butterfly. Baptistry with a piscine was intended for baptising adult catechumens, which was performed by immersion.

3.7 Ulpiana-Justiniana Secunda

Ulpiana is the Roman and Early Byzantine settlement. Belonging to ancient *Dardania* and placed near the important via *Lissus – Naissus*, it became one of the main cities of the province *Moesia Superior*. *Ulpiana* (fig. 13) is located 9 km south-east from Prishtinë/Priština (Kosovo). In the 2nd century the city became a *municipium*. From the middle of the 4th century, *Ulpiana* was attacked by northern tribes and then again by the middle of the 5th century (Huns and Gets). In 472 AD it was destroyed by *Theodoric*. The city was destroyed also in 518 AD by an earthquake. Emperor *Justinian* the Great rebuilt it and renamed it *Iustiniana Secunda*. The *Ulpiana* complex is composed of fortress (*castrum*), city, northern, western and southern necropolis, tumulus „Arat e Cerkezit/Čerkesko Polje“ and tumulus „Cernica“. The *Ulpiana* mosaics are earlier date in comparison with the one from *Vindenis* (fig. 13). From the northern necropolis are parts of the floor of the memorial building with preserved traces of a votive inscription, while in the northern and southern parts of the town have been found floors of luxurious buildings. Their common feature is simple geometric ornamentation and poorer workmanship. An exception to this is the panel (in one of the rooms of the building in the southern part of the town) with representations of birds, a cock, a hen, and a peacock, in separate fields, very deftly depicted by means of multicoloured stone, glass and few gilded cubes [2].

3.8 Nerodimlje/Nerodime

In 1988, at the village of Nerodimlje/Nerodime (today's Kosovo; fig. 13) were discovered a villa complex with *thermae* that was constructed in the 4th century AD, and reconstructions were conducted during the 5th and 6th century AD [2]. The floor mosaic (fig. 12) from the 4th or at the beginning of the 5th century was discovered within a rectangular room with an apse (*triclinium*) [1]. In the western part the mosaic shows 7 arcades, and in all of them 7 figures together with inscriptions identifying them as the seven wise men of antiquity [4]. This mosaic is the most beautiful example of artistic creation in these areas during the Early Byzantine period. M. Berisha based on the floor mosaic composition looking the analogy with the floor mosaic of the *Heraclea Lyncestis martyrion* in Macedonia and the *Lin Basilica martyrion* in Albania [1]. The rest of room was decorated with mosaics in a square patchwork of rosetta and cross motifs. The *frigidarium* contained mosaics with figures of nude females (probably nymphs) and a head of a deity with a wreath in hand. According to M. A. Janković mosaics were made in the 6th century, long after the building of the baths [4].



Fig. 12: Nerodimlje/Nerodime, mosaic in triclinium (left [4], middle and right [1]).

3.9 Vindenis

The settlement and roman road station *Vindenis* is situated near the village Glavnik/Gillamnik (fig. 13), 5 km southeast of Podujevo/Podujevë (eastern Kosovo) on the right bank of Lab/Llap river. The ancient *Via Lissus-Naissus* roman road was a diagonal route, connecting the central Balkans region with the Adriatic coast, which passed through *Vindenis*. Archaeological investigations identified a geometrical mosaic with a rectangular field in the center, in which *Orpheus* (fig. 13) with

his flute is represented, surrounded by wild animals bewitched by the sound of the melody he is playing. This scene, executed in multicoloured cubes, confirms high artistry and workmanship of its author, it may have been the creation of an experienced mosaic maker who worked in one of the artistic centres in the eastern part of the Empire at the end of the 3rd and the beginning of the 4th century [14].

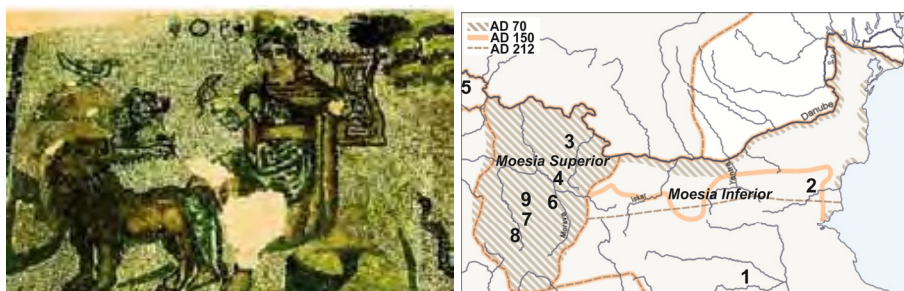


Fig. 13: Vindenis, mosaic of Orpheus (left [1]); Map of province Moesia with sites of interest: 1) villa Armira, 2) Marcianopolis, 3) Felix Romuliana, 4) Naissus, 5) Sirmium, 6) Caričin Grad, 7) Ulpiana, 8) Nerodimlje/Nerodime, 9) Vindenis (right)

4 CONCLUSION

This review contributes to the understanding of the origins of ideological patterns used on the floor mosaics in the province *Moesia*. The article demonstrates that under the patronage of the late 3rd and early 4th century AD rulers and their officials, mosaics with geometric patterns were adapted to monumental spaces. The geometric carpets that resulted reinforce the concept of a mosaic floor as a 2D surface, was dominate floor mosaic design in the later 4th, 5th and 6th centuries AD. Such allover designs had a long history in the western part of the Empire. The lack of previous tradition of floor mosaics in this region during the 2nd and early 3rd centuries AD, make these mosaics more significant. The location of the province between the eastern and western halves of the Empire also led to the influences of regional styles. There is a distinction between the floors with a western approach seen at Split, *Sirmium* and in the *triclinium* at *Mediana* and the eastern approach in Thessaloniki, *Felix Romuliana* and the peristyle at *Mediana*. The quality of the mosaics from *Sirmium*, *Felix Romuliana* and *Mediana* reflects the wealth and importance of the region during the Tetrarchy and decades under Constantine and his dynasty. The comparison of the floor mosaics at *Ulpiana* and at villas at *Vindenis* and *Nerodimlje/Nerodime* indicate that the aspect of artistic creativity was also represented in these areas - executed after established clichés and repeating 2D ornamental patterns composed after traditional ones, they do not differ much from other contemporary floor mosaics. This text was written under the cooperation of the author with German colleagues from Roman-Germanic Commission of German Archaeological Institute on the project „Die kaiserzeitlich-spätromische Stadt Ulpiana bei Gračanica, Kosovo“, which leads to revision of an earlier state of knowledge and new research provided answers to some previously neglected issues.

REFERENCES

- [1] BERISHA, M. *Arheološki vodič Kosova*. 1st ed. [online]. Priština: Ministarstvo Kulture, Omladine i Sporta and Arheološki Institut Kosova, 2012. 109 pp. [cit. 2. 9. 2013]. Proceedings: <http://www.mkrs-ks.org/repository/docs/drafti_i_guides_-_serbisht_final.pdf>
- [2] FIDANOVSKI, S. Римски и рановизантијски период. In: Tasić, N. (ed.) *Археолошко благо Косова и Метохије, од неолита до раног средњег века*. Београд: Српска Академија наука и уметности, 1998. pp. 258-349. ISSN 0586-4887.
- [3] ILIĆ, O. Early Christian baptisteries in northern Illyricum. *СТАРИНАР* [online]. 2006, LVI, Beograd, pp. 223-244. ISSN 0350-0241. [cit. 6. 9. 2013]. Proceedings: DOI:10.2298/STA0656223I.

- [4] JANKOVIĆ, M. A. The social role of Roman baths in the province of Moesia Superior. In: Zuchowska, M. (ed.) *The Archaeology of Water Supply. BAR International Series 2414*. Oxford: Archaeopress, 2012, pp. 27-39. ISBN 978-1-4073-1012-1.
- [5] КАБАКЧИЕВА, Г. За историята на антична вила “Армира” и нейните владетели. In: Stojanov, T. & Tonkova, M. & Preshlenov, Ch. & Попов, Ch. (eds.) *Heros hephaistos - Studia in honorem Liubae Ognenova-Marinova*, Велико Търново: Bulgarian Academy of Sciences, St. Kliment Ohridski University, 2005. pp. 393-407. ISBN 954-775-531-5.
- [6] КАВАКЧИЕВА, G. The Big Mound of the Family Necropolis of the Ancient Villa Armira. In: *Αλογα και αμαξες στον αρχαιο κοσμο. Πρακτικά επιστημονικης συναντησης ορεστιαδα 30 Σεπτεμβριου 2006* [online]. Ορεστιαδα: Νομαρχια Έβρου, 2010. [cit. 13. 8. 2013]. pp. 279-296. ISBN 978-960-89968-6-1. Proceedings: <<http://www.mikridoxiparazoni.gr/publications/PDF/HorsesAndWagons.pdf>>
- [7] KOLARIK, R. Late antique floor mosaics in the Balkans. *Niš and Byzantium, The Collection of scientific works IV*, 3. - 5. June 2005. Niš: Град Ниш, ИГП „Просвета“ Ад Ниш, 2006. pp. 159-178. ISBN 86-7455-680-9.
- [8] LEADBETTER, B. Galerius, Gamzigrad and the politics of abdication. In: *Open Access Australasian Society for Classical Studies 31*, 2. - 5. February 2010 [online]. Perth: University of Western Australia EJ, 2010. [cit. 1. 9. 2013]. Proceedings: <http://msc.uwa.edu.au/classics/_data/page/164060/Leadbetter.pdf>
- [9] MIRIĆ, A. & VASIĆ PETROVIĆ, E. Presentation opportunities of residential and public building's floor mosaics from late antique Naissus and its environment. In: *Phidac 2012, IV International symposium*, 27. - 28. September 2012 [online]. Nis: University of Nis, Faculty of Civil Engineering and Architecture, 2012. [cit. 27. 8. 2013]. pp. 186-192. ISBN 978-86-88601-05-4. Proceedings: <<http://www.academia.edu/2708500/>>
- [10] OGNJEVIĆ, T. The Shepherd as personification of Ruler and Priest. An iconographical analysis of a scene from an early-Byzantine floor mosaic in the southern basilica of Caričin Grad. *Niš and Byzantium, The Collection of scientific works VI*, 3. - 5. June 2007. Niš: Град Ниш, ИГП „Просвета“ Ад Ниш, 2008. pp. 137-148. ISBN 978-86-83505-76-0.
- [11] PETKOVIĆ, S. Crossbow Fibulae from Gamzigrad (Romuliana). *СТАРИНАР* [online]. 2010, LX, Beograd, pp. 111-136. ISSN 0350-0241. [cit. 10. 9. 2013]. Proceedings: DOI:10.2298/STA1060111P.
- [12] SHUKRIU, E. Two labyrinths and Dardanian, Greek and Roman relations by Dea Dardanica's monument. In: *5^{eme} colloque international sur l'Illyrie meridionale et l'Epire dans l'antiquité, Grenoble 8. - 11. Octobre 2008, Volume II* [online]. Paris: CRHIPA - De Boccard, 2010. [cit. 12. 8. 2013]. pp. 571-575. ISBN 9782951943339. Proceedings: <<http://www.academia.edu/1787671/>>
- [13] STARINIERI, V. *Study of materials and technology of ancient floor mosaics' substrate* [online]. Bologna: Università di Bologna, 2009. Tesi di dottorato. Università di Bologna, Scienze chimiche, Chimica dell'ambiente e dei beni culturali. [cit. 11. 9. 2013]. Proceedings: <<http://amsdottorato.cib.unibo.it/2263/>>
- [14] URBÁNKOVÁ, R. *Římské sídliště Vindenis (Glavnik) na jihu provincie Moesia Superior (Republika Kosovo)*. Projekt doktorské práce, Slezská univerzita v Opavě, Ústav archeologie, Opava, 2012. Nепубликованý materiál uložený v archivu autorky.
- [15] Музеят на мозайките в Девня [online]. © 2006-2012 Официален сайт на Община Девня. [cit. 5. 9. 2013]. Proceedings: <<http://www.devnya.bg/музеят-на-мозайките-в-девня/>>

Reviewers:

Mgr. Lucie Augustinková, Faculty of Civil Engineering, VŠB-Technical University of Ostrava.

Mgr. Ondřej Šedo, Ph.D., Archeologický ústav AV ČR, Brno, v. v. i.

Maksym GRZYWIŃSKI¹, Iwona POKORSKA²

SENSITIVITY ANALYSIS OF CYLINDRICAL SHELL

Abstract

The paper deals with some aspects of structural sensitivity analysis in shell structures. The finite element method has been used for modeling of cylindrical structure. The direct differentiation method has been applied in solution of the problem considered. The examples of sensitivity have been presented concerning displacement sensitivity to variations of thickness in cylindrical shell structural element clamped at boundaries under uniformly distributed pressure. The algorithms presented have been prepared and programmed in the POLSAP code system [1].

Keywords

Sensitivity analysis, shell structure, finite element method.

1 INTRODUCTION

In the sensitivity analysis a variability of chosen functionals is investigated that characterize the behavior of structural system and depend on a number of design variables. All the magnitudes which affect the structural behavior of a system under consideration can serve as the variables, for instance the cross-sectional areas and lengths of particular elements, Young's moduli of material etc. These functionals can in general depend on the current states of displacements and stresses as well as their admissible values called the design constraints. The first paper on the sensitivity analysis was written by Campbell and Zienkiewicz [2] followed over recent years by an increasing number of paper devoted to this subject. Relatively many papers have been published in the aeronautical periodicals (Haftka and Mróz [3], Aurora and Cardoso [4]). The literature on sensitivity analysis is broad. The recent works on this topic are presented in [9] for instance. In sensitivity analysis we can consider both deterministic and stochastic variables. In this paper only deterministic variables are discussed. The sensitivity analysis has found applications in solutions of optimization problems. The goal of this paper is to indicate suitability of analyses in the state-of-the-art structural design and inspection, in particular, of structural systems. In this paper a linear sensitivity analysis of a thin shell structure subjected to static load is presented under the constraints on nodal displacements. The comprehensive aspects of computer implementation are discussed. The algorithms used have been prepared and programmed in the POLSAP system (KLEIBER and HIEN [1]). An example is presented to analyze the sensitivity of a certain concrete structure. The approach is hoped to be useful for the structural designer of real civil systems.

2 FORMULATION OF THE PROBLEM

In the finite element method model a structure is represented by means of its stiffness matrix, loading vector, nodal displacements vectors and boundary conditions. In the sensitivity analysis is it,

¹ Maksym Grzywiński, Ph.D., Department of Building, Construction and Engineering, Faculty of Civil Engineering, Czestochowa University of Technology, ul. Akademicka 3, 42-200 Czestochowa, Poland, phone: (+48) 343 250 924, e-mail: mgrzywin@bud.pcz.czest.pl.

² Iwona Pokorska, Ph.D., Department of Theory of Structures, Faculty of Civil Engineering, Czestochowa University of Technology, ul. Akademicka 3, 42-200 Czestochowa, Poland, phone: (+48) 343 250 920, e-mail: pokorska@bud.pcz.czest.pl.

in addition, a function characterizing the structural behavior that enters with certain constraints imposed by the designer. These constraints can be expressed in terms of displacements or stresses and thus are related to the limit states of serviceability and load-carrying capacity of structures for given suitable design codes.

The structural response functional ϕ can be expressed as

$$\phi = G[q(h), h] \quad (1)$$

where $h = \{h^e\}$, $e = 1, \dots, E$ is the vector of design variables, $q(h) = \{q_\beta(h)\}$, $\beta = 1, \dots, N$ describes the vector nodal displacements. The displacement vector satisfies the equilibrium equations

$$K_{\alpha\beta}(h)q_\beta(h) = f_\alpha(h) \quad (2)$$

where $K_{\alpha,\beta}(h)$ and $f_\alpha(h)$, $\alpha = 1, \dots, N$ denote the stiffness matrix and load vector, respectively.

Since the stiffness and load are functions of design variables, the displacements are implicit functions of these variables (HAUG et al [4]). The objective of the sensitivity analysis is to determine changes in

structural response functional with variations of design parameters, i.e. to find $\frac{\partial\phi}{\partial h^e}$ - the sensitivity gradient of functional ϕ . Using the chain rule of differentiation we get

$$\frac{d\phi}{dh} = \frac{\partial G}{\partial h} + \frac{\partial G}{\partial q} \frac{dq}{dh} \quad (3)$$

where $\frac{dG}{dh}$ and $\frac{\partial G}{\partial q}$ describe the first partial derivatives with respect to the e -th design variable and

β -th nodal displacement, respectively. Since G is an explicit function of design variables and displacements, the $\frac{dG}{dh}$ and $\frac{\partial G}{\partial q}$ are known while $\frac{dq}{dh}$ remains to be calculated. Let $K_{\alpha,\beta}(h)$,

$f_\alpha(h)$ and consequently $\frac{dq}{dh}$ are continuously differentiable with respect to the design variable h .

Differentiating both sides of Eq. (2) with respect h^e we get

$$K_{\alpha\beta} \frac{dq_\beta}{dh} = \frac{\partial f_\alpha}{\partial h} - \frac{\partial K_{\alpha\beta}}{\partial h} q_\beta. \quad (4)$$

Since the stiffness matrix $K_{\alpha,\beta}(h)$ is nonsingular, Eq. (4) can be solved for $dq_\beta(h)/dh$ which substituted into Eq. (3) gives

$$\frac{dG}{dh} = \frac{\partial G}{\partial h} + \frac{\partial G}{\partial q} K_{\alpha\beta}^{-1} \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial h} - \frac{\partial K_{\alpha\beta}}{\partial h} q_\beta \right). \quad (5)$$

The procedure presented above is called the direct differentiation method.

3 EXAMPLE OF ANALYSIS

3.1 Description of structure

This example the response of a thin shell structure is considered. Fig. 1 shows the half of a cylindrical shell clamped at boundaries under uniformly distributed pressure $p = 15kN / m^2$. The remaining input data are: radius $R = 2,5 m$, length $L = 12 m$, thickness $t = 0,10 m$, Young modulus $E = 30 MPa$, Poisson ratio $\nu = 0,2$.

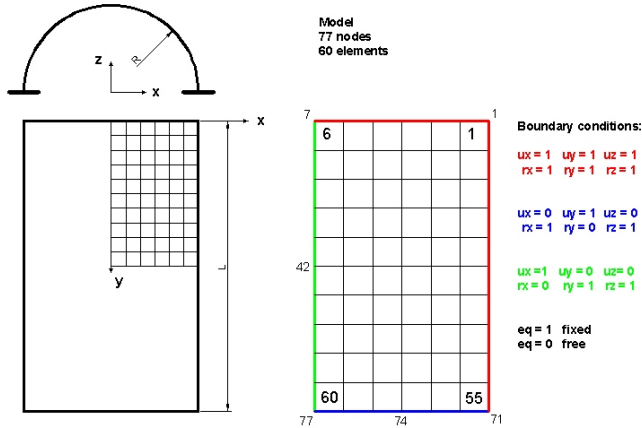


Fig. 1: Finite element model of 60-elements shell structure

3.2 Results

The problem is to choose the most appropriate thickness section of each member of the shell considering the displacement response sensitivity with respect to the thickness. The response functional is assumed as the displacement limit and can be expressed as

$$\frac{dG}{dh} = \frac{|q_\alpha|}{q_\alpha^A} \quad (6)$$

where $|q_\alpha|$ and $q_\alpha^A > 0$ are calculated and allowable of the α -th displacement component. Then the load vector for displacement constraints takes the form

$$\frac{dG}{dh} = \text{sign}(g_\alpha) \left(0 \dots 0 \frac{1}{q_\alpha^A} 0 \dots 0 \right) \quad (7)$$

With the displacement functional defined at node 42 (or 77) in z-direction, $q_\alpha^A = 0,01$.

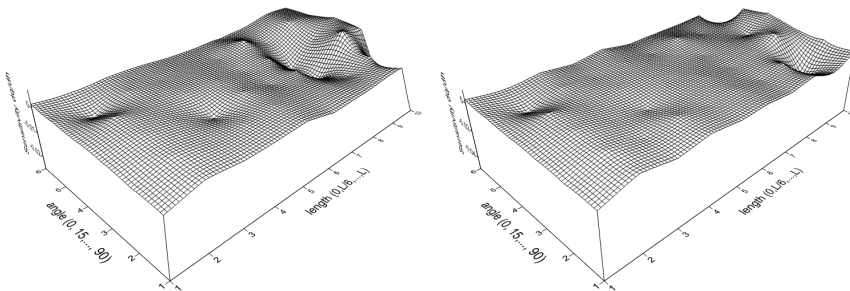


Fig. 2: Displacement sensitivity to variations of thickness at nodes 42 and 77

The displacement sensitivity to variations of thickness is presented in Fig.2. It is seen that for the case of the displacement constraint assumed a unit change in thickness of the element 9 has the largest effect on the vertical displacement at node 42. To decrease displacement effectively at node 42, we have increase the thickness of elements: 1 (-0,0251) and 2 (-0,0246) ; to increase, we have to decrease the thickness of elements: 9 (+0,0068) and 4 (+0,0048).

It is seen that for the case of the displacement constraint assumed a unit change in thickness of the element 4 has the largest effect on the vertical displacement at node 77. To decrease displacement effectively at node 77, we have increase the thickness of elements: 6 (-0,0486) and 8 (-0,0216) ; to increase, we have to decrease the thickness of elements: 4 (+0,0092) and 9 (+0,0060).

4 CONCLUSIONS

Static sensitivity analysis of 3D shell structure is presented in the paper under displacement constraints. The conclusions drawn are directed to structural designer and consulting expert. Thus the classical methods can be supplemented with the sensitivity analysis which has been treated as a tool in problems of structural optimization.

The numerical algorithms developed for sensitivity analysis problems can readily be adapted to existing finite element programs with no considerable modifications required. The numerical results obtained with the code POLSAP show that static sensitivity seems reliable and cost-effective alternatives in research and application environments. The paper can be the basis for subsequent works on design of cylindrical shells.

REFERENCES

- [1] KLEIBER, M., HIEN, T.D. The Stochastic Finite Element Method. Wiley, 1992. ISBN 047193626X. 322 p.
- [2] ZIENKIEWICZ, O.C., CAMPBELL, J.S. Shape optimization and sequential linear programming, In. GALLAGHER, R.H., ZIENKIEWICZ, O.C. eds. Optimum Structural Design. Wiley. 1973. ISBN 0471290505. 372 p.
- [3] HAFTKA, R.T., MRÓZ, Z. First- and second-order sensitivity analysis of linear and nonlinear structures. AIAA Journal, 1986, Vol. 24, No. 7, pp. 1187-1192 (6 p). ISSN 0001-1452
- [4] CARDOSO, J. B., ARORA J. S. Variational method for design sensitivity analysis nonlinear structural mechanics, AIAA Journal, 1988, Vol. 26, No. 5, pp. 595-603 (8 p). ISSN 0001-1452
- [5] HAUG, E.J., CHOI, K.K, KOMKOV, V. Design Sensitivity Analysis of Structural Systems. Academic Press, Inc., 1986. ISBN 0123329205. 381 p.
- [6] POKORSKA, I., KUBICKI, K., KYŚIAK, A. Design sensitivity of structures. Bulletin of the Czestochowa University of Technology, Civil Engineering Series, Czestochowa, 2005; Vol. 12, pp. 59–65 (6 p). ISSN 0526-5916.
- [7] GRZYWIŃSKI, M., HIEN, T.D. Static sensitivity analysis of bar structure. Bulletin of the Czestochowa University of Technology, Civil Engineering Series, Czestochowa, 2006; Vol. 13, pp. 19–28 (10 p). ISSN 0526-5916.
- [8] GRZYWIŃSKI, M., HIEN, T.D. Static and dynamic sensitivity analysis of bar structure. Bulletin of the Koszalin University of Technology, Mechanical Engineering Series, Koszalin, 2007; Vol. 40, pp. 113–120 (8 p). ISSN 1640-4572.
- [9] SALTELLI A., RATTO M., ANDREAS T., CAMPOLONGO F., CARIBONI J., GATELLI D., SAISANA G., TARANTOLA S., Global Sensitivity Analysis: The Primer, Wiley, 2008, 304 p. ISBN 978-0-470-05997-5

Reviewers:

Prof. Ing. Zdeněk Kala, Ph.D., Faculty of Civil Engineering, Brno University of Technology.

Ing. Miroslav Rosmanit, Ph.D., Faculty of Civil Engineering, VŠB-Technical University of Ostrava.

Táňa HOLUŠOVÁ¹, Stanislav SEITL², Alfonso FERNÁNDEZ-CANTELI³

**NUMERICKÁ PODPORA EXPERIMENTÁLNÍ ZKOUŠKY EXCENTRICKÝM TAHEM
NA VÁLCOVÝCH BETONOVÝCH TĚLESECH**

**NUMERICAL SUPPORT OF EXPERIMENTAL COMPACT TENSION TEST
ON CONCRETE CYLINDRIC SPECIMENS**

Abstrakt

Stanovení rychlosti šíření trhliny v kvazikřehkých materiálech je v posledních letech často studovanou problematikou lomové mechaniky. Článek je zaměřen na porovnání lomových parametrů získaných ze dvou tvarově velmi blízkých lomových zkoušek, a to zkoušky štípáním klínem a zkoušky excentrickým tahem, obě aplikované na cementový kompozit kruhového průřezu. Numerické studie obou zkušebních konfigurací jsou provedeny programem ATENA (MKP). Bylo porovnáno množství energie spotřebované při lomovém procesu u jednotlivých konfigurací.

Klíčová slova

Lomová energie, šíření trhlín, excentrický tah, klínové štípání, cementový kompozit.

Abstract

The assessment of crack growth speed in quasi-brittle materials is lately very often studied problem of fracture mechanics. This contribution is focused on comparison of fracture parameters obtained from two fracture tests with similar shape of specimen - wedge splitting test and compact tension test. Both tests are applied on cylindrical specimens made from cement based composite. Numerical simulations for both configurations are performed in software ATENA (FEM). The amount of fracture energy consumed during fracture process has been compared for particular configurations.

Keywords

Fracture energy, crack growth, compact tension, wedge-splitting test, cement-based composite.

1 ÚVOD

Moderní pojetí architektury je zaměřeno na stavby vysoké, lehké a efektivní. Tyto převážně betonové konstrukce jsou namáhány extrémním zatížením. Zejména jde o konstrukce silničních mostů, dálničních viaduktů a mostů vedených nad železnicí. Dále o konstrukce větrných elektráren nebo části energetických zařízení. U těchto konstrukcí může nastat situace, kdy dominantním zatížením není statické, ale zatížení únavové [11].

¹ Ing. Táňa Holušová, Ústav stavební mechaniky, Fakulta stavební, Vysoké učení technické v Brně, Veveří 331/95, 602 00 Brno, e-mail: holusova.t@fce.vutbr.cz.

² Ing. Stanislav Seitl, Ph.D., Ústav fyziky materiálů, Akademie věd České republiky, v. v. i., Žižkova 22, 616 62 Brno, tel.: (+420) 532 290 361, e-mail: seitl@ipm.cz.

³ Prof. Alfonso Fernández-Canteli, University of Oviedo, Dpt. of Construction and Manufacturing Engineering, Campus de Viesques, 332 03 Gijón, Spain, e-mail: afc@uniovi.es.

V těchto extrémně namáhaných konstrukcích vznikají během jejich životnosti tzv. únavové trhliny [16]. U takto poškozených konstrukcí je důležité stanovit zbytkovou životnost dané konstrukce, popřípadě stanovit interval pravidelných kontrol na základě předpokládané rychlosti šíření trhliny [9], [19].

Kvazikřehké materiály, k nimž patří i cementové kompozity, jsou samy o sobě vysoce heterogenní materiály. Procesy probíhající ve struktuře takovýchto materiálů při namáhání cyklickým zatížením jsou mnohem komplikovanější než například procesy v kovových materiálech [16].

Pro určování lomových parametrů kvazikřehkých materiálů bylo v průběhu předchozích desítek let navrženo hned několik možných konfigurací lomových zkoušek. Asi nejznámější jsou klasické zkoušky v tříbodovém (3PB) a čtyřbodovém (4PB) ohybu, například viz Karihaloo [7]. Na přípravu jednoho zkušební tělesa je však třeba velké množství materiálu, vzorek je poměrně těžký a v laboratorních podmínkách těžko manipulativní. Při zkoušení či numerických simulacích, zvláště u tříbodového ohybu, bylo zjištěno, že hlavní lomový proces probíhá jen v poměrně malém pruhu zkušební tělesa, tzv. lomové procesní zóně. Tato skutečnost dala vzniknout jiné lomové zkoušce, tzv. klínovému štípání. Tato zkouška je prováděna na vzorcích malého čtvercového či kruhového průřezu. Poprvé byla představena Linsbauerem et al. [12] a dále rozvinuta v práci Brühwiler et al. [3], parametrickou studii pro výpočet součinitele intenzity napětí publikoval Guinea et al. [5], over deterministic method (ODM, český ekvivalent – přeurtčitá metoda) pro výpočet vyšších členů Williamsovy řady použil Sobek et al. [15]. Rychlostí šíření trhliny způsobené únavovým procesem v cementových kompozitech se v minulosti zabývali například Bažant et al. [1] a [2], Lee et al. [11] nebo Seitzl et al. [13] a [14].

Parametry zjišťované na laboratorně vyrobených tělesech odpovídají reálně pouze do jistého stáří konstrukce, později je třeba pro lomové zkoušky odebrat vzorek přímo z reálné konstrukce, což se provádí jádrovým vývrtem. Vzniká tak válec, jenž se dá nařezat na několik zkušebních vzorků, jak pro klínové štípání, tak pro modifikovanou zkoušku excentrickým tahem na kruhových tělesech.

Cílem práce je posoudit vliv okrajových podmínek pro dvě zkušební konfigurace lomové mechanických zkoušek používaných pro určování lomových parametrů materiálů. První z nich je zkouška štípáním klínem (viz obr. 1) a druhou zkouška excentrickým tahem (viz obr. 2), která je používána a známá spíše ze zkoušek na kovových materiálech.

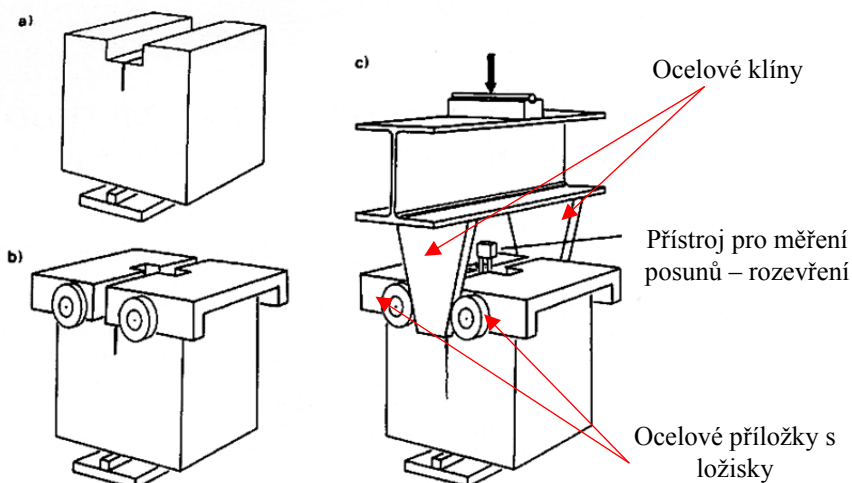
2 POUŽITÉ ZKUŠEBNÍ KONFIGURACE

Při numerické studii modifikované zkoušky se vychází ze znalostí již dříve používaných experimentů. Proto jsou v následujících odstavcích uvedeny základní údaje o zkušebních konfiguracích. Jedná se o tzv. klínové štípání (wedge-splitting test), která je již několik let předmětem výzkumu zkušebních konfigurací pro určování lomové mechanických parametrů kvazikřehkých materiálů, viz například Guinea et al. [5], Karihaloo et al. [8], Veselý et al. [17] a [18] nebo Holušová [6], a zkoušku excentrickým tahem (compact tension test) [10], obě zkoušky prováděné na tělesech kruhového průřezu.

2.1 Wedge-splitting test

Wedge-splitting test (WST), tedy klínové štípání, je standardní lomová zkouška pro určování lomové mechanických parametrů kvazikřehkých materiálů [7]. Je prováděna na tělesech čtvercového nebo kruhového průřezu, základní průměr nebo délka strany čtverce je 150 mm. Kruhová tělesa pak musí být oříznuta o kruhovou úseč pro dobré usazení ocelových příložek.

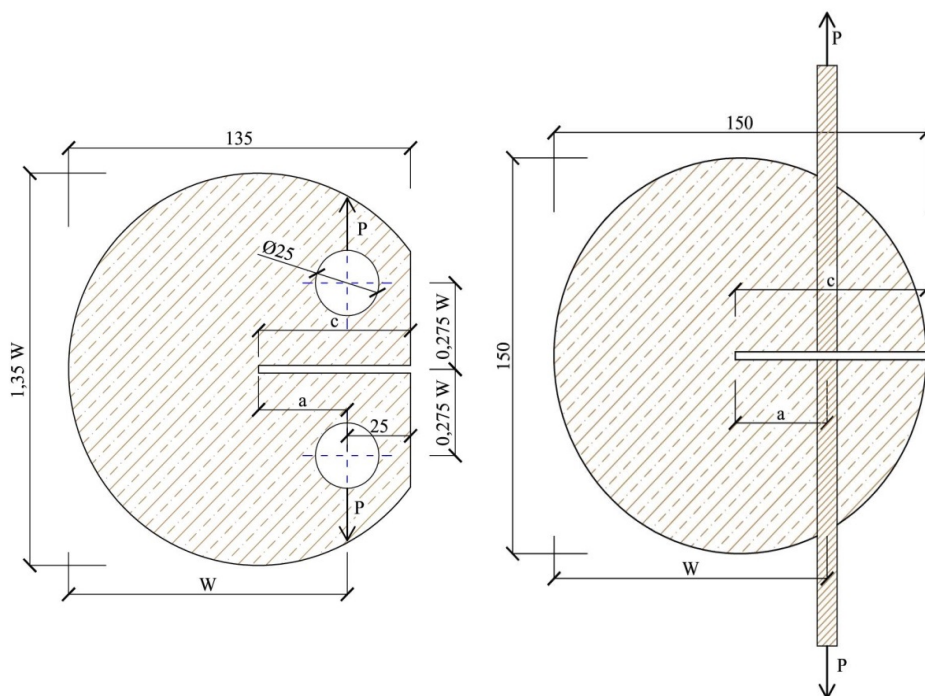
WST poprvé publikovali Linsbauer a Tschegg [12], kteří na krychlových tělesech určovali lomově-mechanické parametry betonu, zejména lomovou energii. Na jejich práci pak navázali Brühwiler a Wittmann [3], kteří tuto konfiguraci zařadili mezi standardní lomové mechanickou zkoušku. Konfigurace WST a způsob vnášení zatížení do tělesa jsou znázorněny na obr. 1. Ocelové klíny, umístěné vně tělesa, pojíždí po ocelových ložiscích, ukotvených na ocelových příložkách, umístěných v drážce vytvořené v tělese. Přes ložiska je do tělesa vnášeno zatížení a jezdící ocelový klín těleso postupně rozevírá a štípe na dvě části.



Obr. 1: Princip WST: a) zkušební těleso se zářezem; b) 2 ocelové příložky s ložisky; c) ocelové klíny vložené mezi ložiska pro rozdělení tělesa na dvě části (převzato z [3])

2.2 Compact tension test

Compact tension (CT) test je tzv. zkouška excentrickým tahem. Tato zkouška je využívána hlavně pro určování lomových parametrů kovových materiálů. Oproti WST, kdy je zatížení do tělesa vnášeno ocelovým klínem přes ložiska, kde se pak hlavní zátěžná síla v ložiscích dělí na horizontální a vertikální složku, je CT těleso opatřeno úchyty a je rozevíráno přímo horizontálními silami. Schéma a konfigurace zkoušky excentrickým tahem je uvedena na obr. 2.



Obr. 2: Standardní CT těleso pro zkoušku excentrickým tahem: a) pro kovové materiály; b) modifikované těleso pro cementové kompozity

3 NUMERICKÉ SIMULACE

Modely jsou vytvořeny v dvourozměrném prostředí v programu ATENA [4]. Pro modelování části z cementového kompozitu (betonu) byl použit implementovaný materiálový model 3D Nonlinear cementitious 2 v modifikaci pro rovinnou deformaci. Pro modelování podpory, ocelových příložek a ocelového klínu bylo využito materiálu Pružný - rovinná deformace. Parametry krychelné a tahové pevnosti betonu, modulu pružnosti betonu a oceli a objemové hmotnosti oceli jsou uvedeny v tab. 1.

Modely těles obou posuzovaných konfigurací jsou kruhového průřezu s průměrem 150 mm. Je využito shodných materiálových modelů implementovaných v programu ATENA 2D se zadanými charakteristikami z tab. 1. Tloušťka modelů je vždy 100 mm.

Tab. 1.: Charakteristiky betonu a oceli

	Krychelná pevnost f_c [MPa]	Tahová pevnost f_t [MPa]	Modul pružnosti E [GPa]	Objemová hmotnost ρ [kg/m ³]
Beton	30	2,568	32,29	2300
Ocel	-	-	210	7850

Základní tvar výpočtového modelu WST byl převzat z diplomové práce autorky, viz Holušová [6]. Je přepracována použitá síť konečných prvků, a model je podepřen jen jednou podporou, materiálové charakteristiky betonu jsou uvedeny v tabulce výše.

Monitorovací body horizontálních posunů u CT tělesa jsou umístěny tak, aby odpovídaly monitorovacím bodům posunů v ložiscích u WST tělesa, viz modré křížky na obr. 3 a obr. 5.

Pro parametrickou studii bylo zvoleno pět relativních délek zářezů, jež jsou u obou konfigurací shodné, liší se jen délkou počátečního zářezu, což vyplývá z konfigurace WST, kdy je těleso seříznuto o úseč vysokou 15 mm a opatřeno drážkou o výšce 20 mm.

Relativní délka tělesa α je bezrozměrné číslo a je definováno jako poměr délky zářezu od osy vnášeného zatížení a vzdálenosti parapsku zatížení od protějšího okraje tělesa:

$$\alpha = \frac{a}{W}, \quad (1)$$

kde:

α – je relativní délka zářezu [-],

a – délka zářezu měřená od osy ložiska [m] a

W – vzdálenosti osy ložiska od protějšího okraje tělesa [m].

Jednotlivé relativní a skutečné délky zářezu měřené od okraje – zobrazené pro těleso WST na obr. 3 a pro těleso CT na obr. 5 jsou uvedeny v následující tab. 2:

Tab. 2: Vybrané hodnoty relativních a skutečných délek zářezu pro použitá WST a CT tělesa

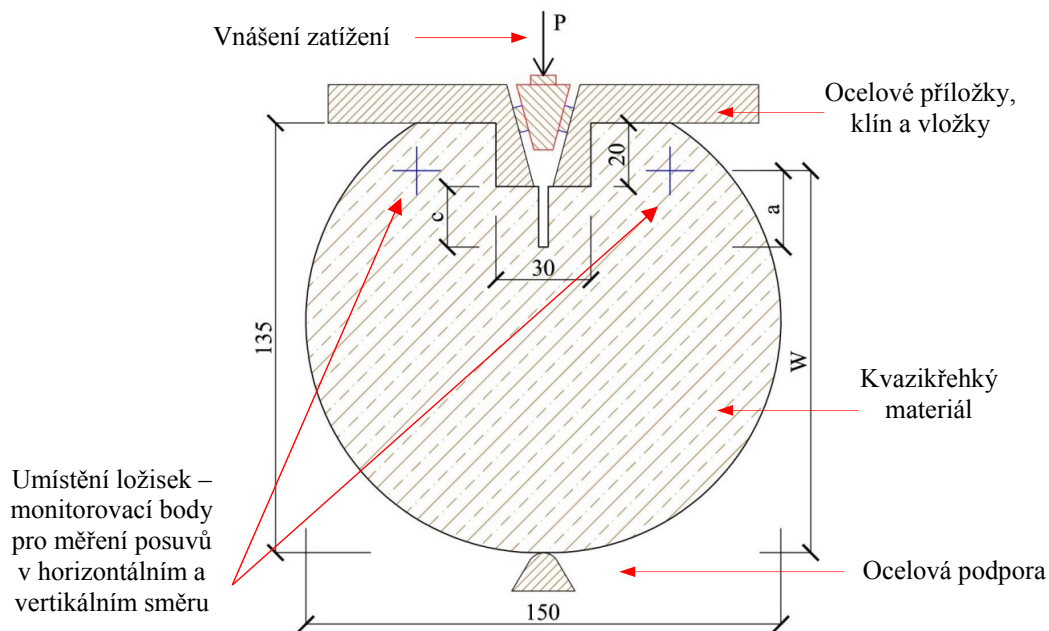
α		0,08	0,1	0,125	0,15	0,2
a		9,6	12	15	18	24
c	WST	4,6	7	10	13	19
	CT	39,6	42	45	48	54

Červenou barvou v zatěžovacích diagramech (viz níže) jsou označeny zatěžovací křivky pro zkoušku štípáním klínem (WST) a modrou barvou křivky pro modifikovanou zkoušku excentrickým tahem.

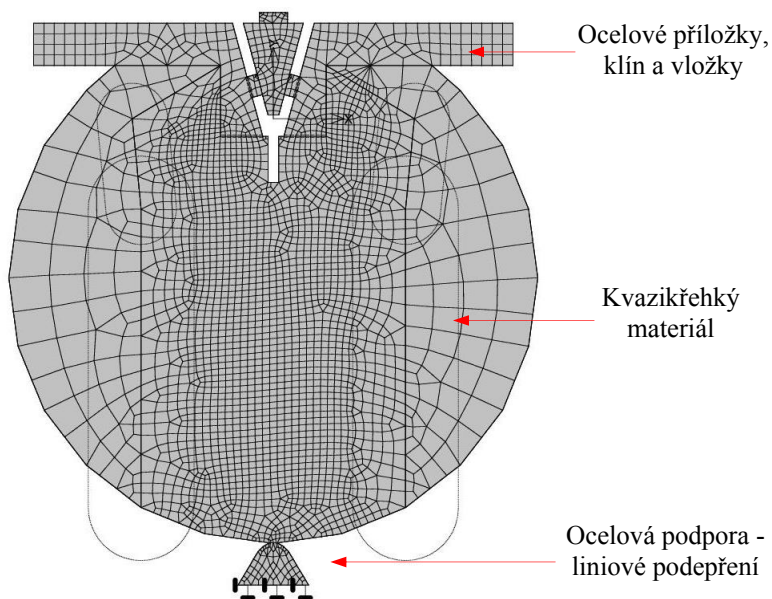
3.1 Model WST

Na obr. 3 je uveden model zkušebního tělesa zatěžovací zkoušky pro numerické simulace. Jedná se o těleso s kruhovým průřezem o průměru 150 mm. Těleso pro laboratorní zkoušky je třeba

seříznout na horní straně o úseč vysokou 15 mm. Poté je do něj vykrojena drážka o šířce 30 mm a hloubce 20 mm. Do drážky a na oříznuté plochy se osadí ocelové příložky, na jejichž koncích jsou z obou stran ložiska, po kterých jezdí ocelový klín. Zatížení je přes tyto ložiska vnášeno do tělesa, čímž ho rozevře a štípá ve dvě. Na obr. 3 jsou modrými křížky označeny osy ložisek, ve kterých jsou také umístěny monitorovací body posunů v horizontálním i vertikálním směru.



Obr. 3: Výpočtový model zkušebního kruhového tělesa pro WST (převzato a modifikováno z [6])



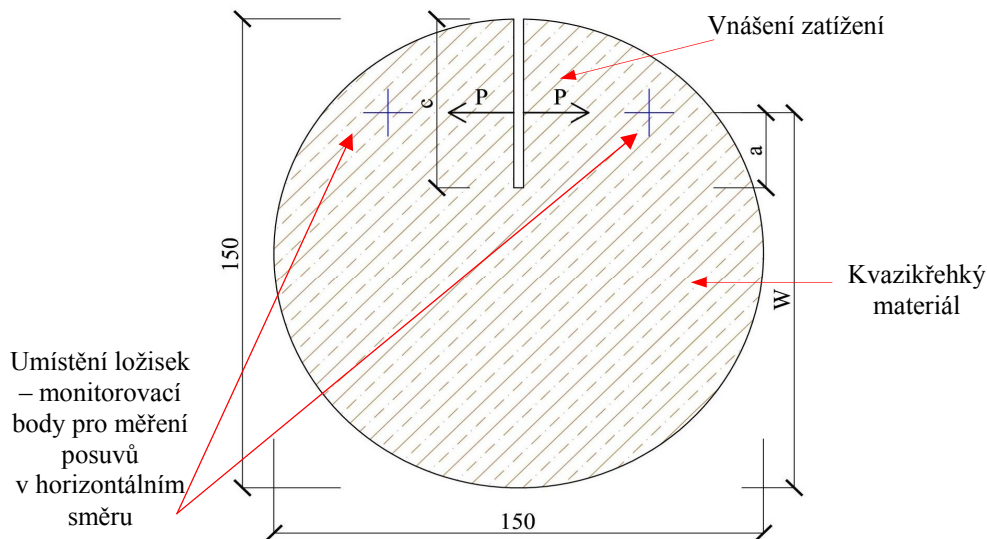
Obr. 4: Použitá síť konečných prvků a okrajové podmínky pro kruhové WST těleso

Na obr. 4 je zobrazena použitá výpočtová síť konečných prvků. Hlavní lomový proces probíhá směrem k dolní podpoře tělesa, proto zde byla síť zhuštěna na velikost prvku 2 mm. Stejná délka strany prvku byla použita i pro podporu a klín. Jedna podpora je použita s ohledem na budoucí

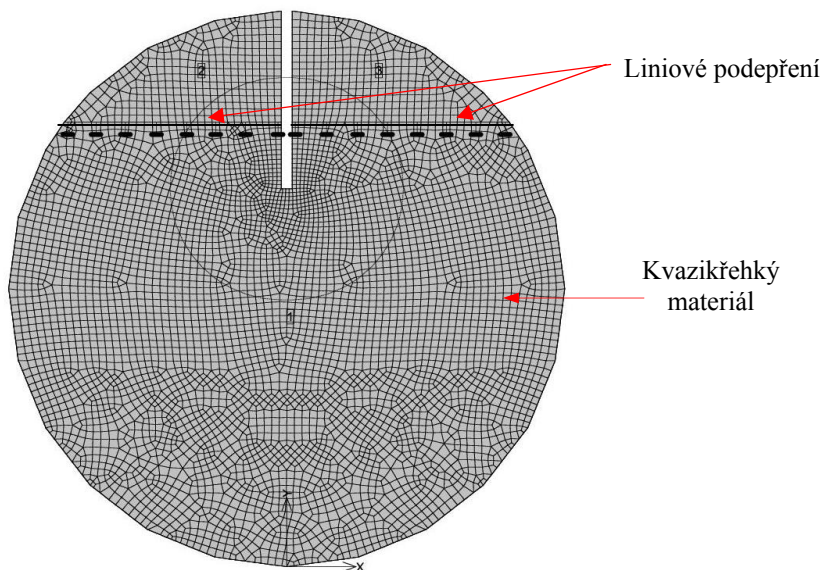
rozsáhlou experimentální studii WST těles na Ústavu stavební mechaniky Fakulty stavební Vysokého učení technického, kde je těleso podepřeno jen jednou podporou. Vliv okrajových podmínek na křehkých tělesech pro zkoušku štípáním klínem byl studován například v práci Veselý et al. [17].

3.2 Model CT

Na obr. 5 je zobrazen model zkušební tělesa pro modifikovanou zkoušku excentrickým tahem na kruhovém tělese.



Obr. 5: Modifikovaný výpočtový model zkušební kruhového tělesa pro CT



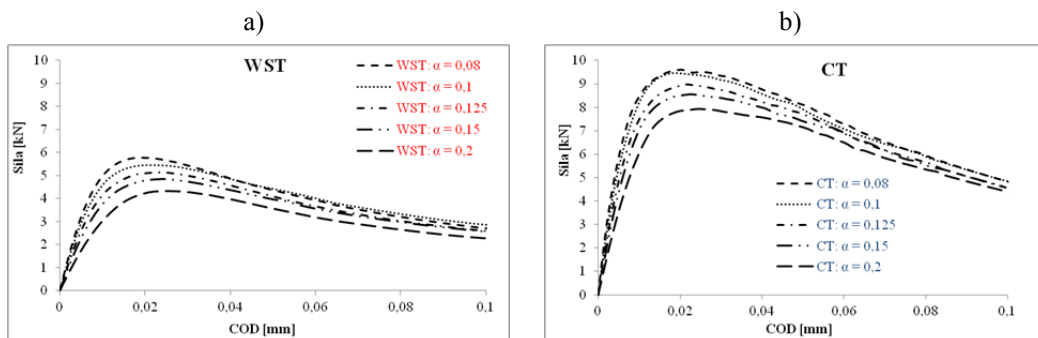
Obr. 6: Použitá síť konečných prvků a okrajové podmínky pro kruhové CT těleso

CT zkušební tělesa pro experimentální testování není třeba dále upravovat pro usazení zatěžovacího aparátu. Pouze se v nich vytvoří počáteční zářez, jenž slouží k inicializaci trhliny a dále se do něj musí po obou stranách vyvrtat díry, do kterých se osadí ocelové tyče, které se poté uchyty do protijedoucích čelistí, které následně samotné těleso budou rozevírat.

Aby bylo docíleno podobnosti se zkouškou WST, byly ocelové tyče v modelu nahrazeny liniemi, které byly také liniově podepřeny. Použitá síť konečných prvků a již zmíněná okrajová podmínka jsou uvedeny na obr. 6. Délka strany prvku je 2 mm, v okolí zářezu je síť zhuštěna na 1 mm.

4 VÝSLEDKY WST VS. CT A DISKUZE

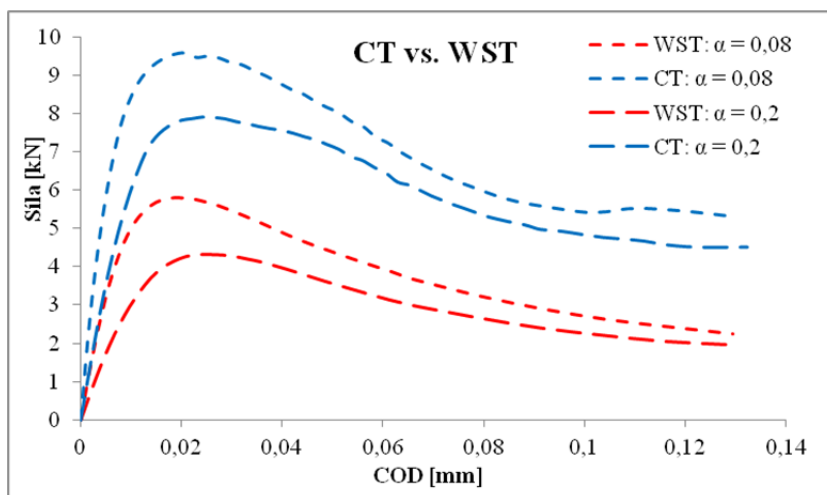
Při numerických simulacích byly monitorovány posuny na paprsku vnášené síly v místě ložisek u obou typů zkušebních konfigurací. Všechny výsledky jsou prezentovány zatěžovacími diagramy P – COD (Síla – rozevření trhliny).



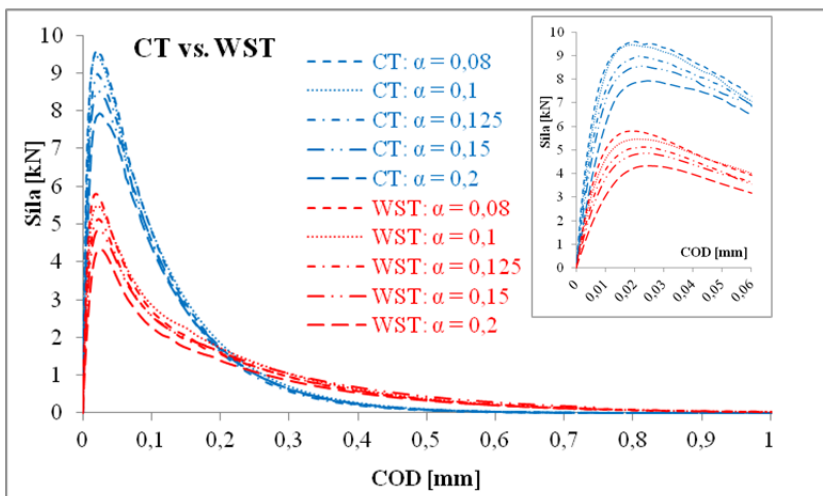
Obr. 7: Zatěžovací diagramy ze simulovaného zatěžovacího testu pro: a) WST konfiguraci; b) CT konfiguraci

V grafech na obr. 7 jsou uvedeny jednotlivé zatěžovací diagramy zvláště pro WST těleso (obr. 7a) a zvláště pro CT těleso (obr. 7b). Z diagramů vyplývá, že se zvětšující se relativní délkou zářezu, roste maximální zatěžovací síla, což platí u obou konfigurací. Okrajové podmínky modelů jednotlivých zkoušek vedou pro konfiguraci CT testu k větší odolnosti proti fatálnímu porušení než v případě WST testu, což lze snadno pozorovat v grafu na obr. 8, kde jsou pro srovnání uvedeny křivky pro relativní délky zářezu 0,08 a 0,2. Rozdíly mezi maximálními hodnotami zatížení jsou v intervalu (3,6 – 3,8) kN.

Srovnání celkových zatěžovacích diagramů pro obě konfigurace je uvedeno na obr. 9. V pravém horním rohu je zobrazen detail digramu v okolí maximálních sil. Tyto diagramy sloužily pro výpočet jednoho z nejdůležitějších lomových parametrů – lomové energie.



Obr. 8: Porovnání vybraných zatěžovacích křivek obou zkušebních konfigurací



Obr. 9: Srovnání celkových zatěžovacích diagramů obou zkušebních konfigurací a detail v okolí maximálních zatěžovacích sil

Lomová energie je parametr běžně používaný pro hodnocení kvality materiálu [7]. Proto v rámci studie WST a CT zatěžovacích zkoušek bylo provedeno vyhodnocení lomových energií, tedy množství energie potřebné pro šíření trhliny tělesem. Hodnota lomové energie G_f je dána vztahem:

$$G_f = \frac{W_f}{A_{lig}}, \quad (2)$$

kde:

G_f – lomová energie [J/m^2],

W_f – lomová práce [J] a

A_{lig} – obsah plochy ligamentu tělesa [m^2].

V tabulce níže jsou uvedeny hodnoty koncových lomových energií, vlevo pro štípané těleso, vpravo pro těleso zatěžované excentrickým tahem.

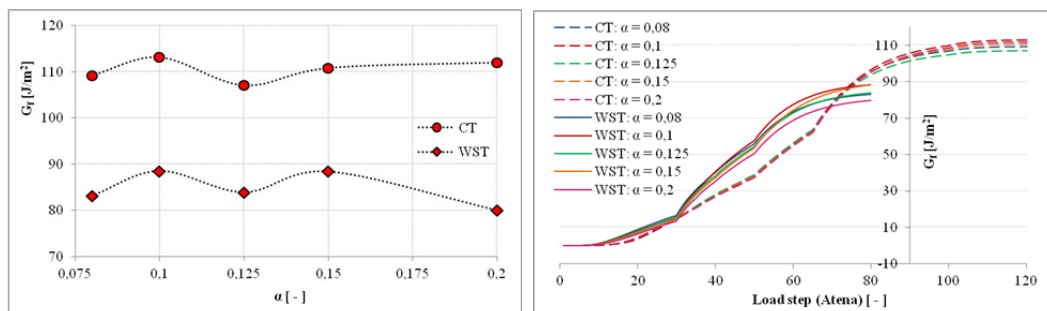
Tab. 3: Velikosti lomových energií obou zkušebních konfigurací

ø 150	WST těleso			CT těleso		
	Počáteční délka zářezu [mm]	Relativní délka zářezu α [-]	G_f [J/m^2]	Počáteční délka zářezu [mm]	Relativní délka zářezu α [-]	G_f [J/m^2]
1	24,6	0,08	83,1	39,6	0,08	109,1
2	27	0,10	88,5	42	0,10	113,1
3	30	0,125	83,9	45	0,125	107,0
4	33	0,15	88,4	48	0,15	110,8
5	39	0,20	79,9	54	0,20	112,0

Maximální a minimální hodnoty lomových energií se liší do 9,7 % pro WST konfiguraci, respektive do 5,4 % pro CT těleso. Průměrné hodnoty lomové energie jsou $84,7 \text{ J}/\text{m}^2$ pro WST konfiguraci, respektive $110,4 \text{ J}/\text{m}^2$ pro CT konfiguraci. Kvůli upevnění CT tělesa do čelistí bude hodnota lomové energie narůstat např. v důsledku zachycení vlastní hmotnosti tělesa, v důsledku neumožnění rotace jednotlivých částí tělesa a v neposlední řadě chybí tlakové zatížení na konci

tělesa. Z toho důvodu je potřeba provést korekci cca 24 % pro získání srovnatelných výsledků v případě použití modifikovaných CT těles pro únavové testy, aby bylo dosaženo hodnot odpovídajících WST testu.

V diagramech na obr. 10 jsou graficky znázorněny konečné hodnoty lomových energií (vlevo) a postupný růst lomové energie v průběhu zatěžovacího procesu (vpravo), kde lze pozorovat ustálení hodnoty lomové energie na konci zatěžovacího procesu.



Obr. 10: Grafické znázornění růstu lomové energie

5 ZÁVĚR

V uvedené práci byly představeny dvě tvarově velmi podobné konfigurace zatěžovacích zkoušek pro určování lomové mechanických parametrů, jmenovitě wedge-splitting test a compact tension test.

Hodnoty lomových energií při různé hloubce zářezu se pro konfiguraci WST liší do 9,7 % a pro konfiguraci CT do 5,4 % - tedy CT konfigurace je stabilnější. Z předchozích studií je známo, že lomová energie je parametr silně závislý na tvaru tělesa a konfiguraci zatěžovací zkoušky. Z představených výsledků vyplývá, že obě zkoušky vykazují stabilní lomový proces. V rámci připravených laboratorních zkoušek v laboratořích University Oviedo je třeba hodnoty získané z experimentálních prací upravit koeficientem $S_H = 0,76$.

Modifikovaná zkouška excentrickým tahem pro tělesa z cementových kompozitů představuje poměrně novou metodiku pro určování lomové mechanických parametrů kvazikřehkých materiálů, mezi něž se řadí i určování rychlosti šíření trhliny tělesem. Daná zkouška je výrazně jednodušší na přípravu experimentů v laboratorních podmínkách, vykazuje stabilní lomový proces, a výsledky získané během zatěžování se dají snadno transformovat (převést) na hodnoty odpovídající testu WST.

PODĚKOVÁNÍ

Příspěvek byl realizován za finančního přispění Grantové agentury ČR, projekt číslo P104/11/0833 a Juniorského specifického výzkumu FAST-J-13-2045.

LITERATURA

- [1] BAŽANT, Z., SCHELL, W. F. Fatigue Fracture of High-Strength Concrete and Size Effect, *ACI Materials Journal*, No. 90-M50, 1993, pp. 472-478, ISSN: 0889-325X.
- [2] BAŽANT, Z., XU, K. Size Effect in Fatigue Fracture of Concrete, *ACI Materials Journal*, No. 88-M46, 1991, pp. 390-399, ISSN: 0889-325X.
- [3] BRÜHWILER, E., WITTMANN, F. H. The Wedge Splitting test, a new method of performing stable fracture mechanics tests, *Engineering Fracture Mechanics Vol. 35*, 1990, pp. 117-125, ISSN: 0013-7944.
- [4] Červenka Consulting, www.cervenka.cz - ATENA Program Documentation, Theory and User Manual.

- [5] GUINEA, G. V., ELICES, M., PLANAS, J. Stress intensity factors for wedge-splitting geometry, *International Journal of Fracture*, Vol. 81, 1996, pp. 113–124, ISSN: 0376-9429.
- [6] HOLUŠOVÁ, T. Analýza napjatosti a porušení ve zkušebních tělesech používaných pro určování lomové mechanických parametrů kvazikřehkých materiálů, *Diplomová práce*, 2012, VUT Brno.
- [7] KARIHALOO, B. L. *Fracture mechanics of concrete*, 1995, Longman Scientific & Technical, New York, ISBN: 0-582-21582-X.
- [8] KARIHALOO, B. L., XIAO, Q. Z. Higher order terms of the crack tip asymptotic field for a wedge-splitting specimen, *International Journal of Fracture*, Vol. 112, 2001, pp. 129–137.
- [9] KLESNIL, M., LUKÁŠ, P. Šíření únavových trhlin v oceli, *Studie ČSAV*, 1973, Akademie, Praha, 1973, ISSN: 0577-3652.
- [10] KNĚSL, Z., BEDNÁŘ, K. Dvoupřímětová lomová mechanika: výpočet parametrů a jejich hodnoty, 1998, ÚFM AVČR, Brno.
- [11] LEE, M. K., BARR, B. I. G. An overview of the fatigue behaviour of plain and fibre reinforced concrete, *Cement & Concrete Composites*, Vol. 26, Issue 4, 2004, pp. 299–305, ISSN: 0958-9465.
- [12] LINSBAUER, H. N., TSCHEGG, E. K. Fracture energy determination of concrete with cube shaped specimens, *Zement und Beton*, Vol. 31, 1986, pp. 38–40, ISSN: 0514-2946.
- [13] SEITL, S., KERŠNER, Z., BÍLEK, V., KNĚSL, Z. Glass fibre reinforced cement based composite: fatigue and fracture parameters, *Applied and Computational Mechanics*, Vol. 3, No. 2, 2009, pp. 363–374, ISSN: 1835-680X.
- [14] SEITL, S., KNĚSL, Z., ŠIMONOVÁ, H., KERŠNER, Z. Fatigue crack growth in cement based composites: Experimental aspects, *Life-Cycle and Sustainability of Civil Infrastructure Systems*, London, 2013, pp. 1314–1317, ISBN 978-0-415-62126-7.
- [15] SOBEK, J., VESELÝ, V., ŠESTÁKOVÁ, L. Accuracy of approximation of stress and displacement fields in cracked body for estimation of failure zone extent, *Transaction of the VŠB – Technical University of Ostrava No. 2, Vol. XII, Civil Engineering Series*, 2012, pp. 361–370, ISSN: 1213-1962.
- [16] SURESH, S.: *Fatigue of Materials*, second edition, Cambridge University Press, 1998, ISBN: 0-521-57046-8.
- [17] VESELÝ, V., GROCHALOVÁ, E. *Numerická studie vlivu okrajových podmínek na průběh zkoušky WST pro určování lomových parametrů cementových kompozitů*, Konference Modelování v mechanice, Ostrava, 2010, CD, ISBN: 978-80-248-2234-1.
- [18] VESELÝ, V., ŘOUTIL, L., SEITL, S.: Wedge-Splitting Test – Determination of Minimal Starting Notch Length for Various Cement Based Composite, *Key Engineering Materials Vol. 452-453*, 2011, pp. 77–80.
- [19] VLK, M., FLORIAN, Z. Mezní stavy a spolehlivost, *Učební texty*, 2007, VUT Brno.

Oponentní posudek vypracoval:

Doc. Ing. Jiří Brožovský, Ph.D., Katedra stavební mechaniky, Fakulta stavební, VŠB-TU Ostrava.

Ing. Radomír Pukl CSc., Červenka Consulting s.r.o., Praha.

Anežka JURČÍKOVÁ¹, Miroslav ROSMANIT²

**DOPORUČENÍ PRO NUMERICKÉ MODELOVÁNÍ A ANALYTICKÉ
POSOUZENÍ ROVINNÉHO OCELOVÉHO STYČNÍKU Z CHS PROFILŮ**

**RECOMMENDATIONS FOR NUMERICAL MODELING AND
ANALYTICAL ASSESSMENT OF A PLANAR STEEL CHS JOINT**

Abstrakt

Předmětem této práce je určení únosnosti ocelového styčnicku příhradové konstrukce z CHS (kruhové duté profily), který se vymyká podmínkám pro použití normy ČSN EN 1993-1-8 a nelze jej tedy posoudit na základě normových vztahů pro výpočet únosnosti styčnicku. Posouzení tohoto styčnicku je provedeno pomocí numerického modelování v programu ANSYS a použitím analytické metody doporučené v publikaci CIDECT (Comité International pour le Développement et l'Étude de la Construction Tubulaire). Výsledky obou metod jsou na závěr porovnány. Příspěvek obsahuje doporučení pro tvorbu MKP modelu i pro výpočet únosnosti styčnicku z CHS.

Klíčová slova

CHS styčník, numerický model, únosnost, ANSYS, kontaktní okrajové podmínky.

Abstract

The subject of this paper is to determine the load-bearing capacity of the truss-type CHS (circular hollow section) joint which is beyond the scope of use of the ČSN EN 1993-1-8 and thus standardized formulas for calculations of joint's strength cannot be applied. Assessment of that joint is performed by using the numerical modeling in ANSYS program and the analytical method recommended in the CIDECT (Comité International pour le Développement et l'Étude de la Construction Tubulaire) publication. The results from both methods are then compared. This paper contains recommendations for the creation of the FEM model and for calculation of load-bearing capacity of the CHS joint.

Keywords

CHS joint, numerical model, load-bearing capacity, ANSYS, Multi-Point Constraints.

1 ÚVOD

V dnešní době se pro výstavbu halových objektů a pro překlenutí velkých rozponů stále s výhodou využívají příhradové vazníky i příhradové rámové konstrukce z dutých průřezů. Především pro jejich příznivé statické působení (dvojose symetrický průřez, zkrácení vzpěrných délek, dosažení požadované únosnosti při zachování subtilnosti konstrukce), ale také pro estetický vzhled těchto konstrukcí [1].

¹ Ing. Anežka Jurčíková, Katedra stavební mechaniky, Fakulta stavební, VŠB-Technická univerzita Ostrava, Ludvíka Podéště 1875/17, 708 33 Ostrava-Poruba, tel.: (+420) 597 321 391, e-mail: anezka.jurcikova@vsb.cz.

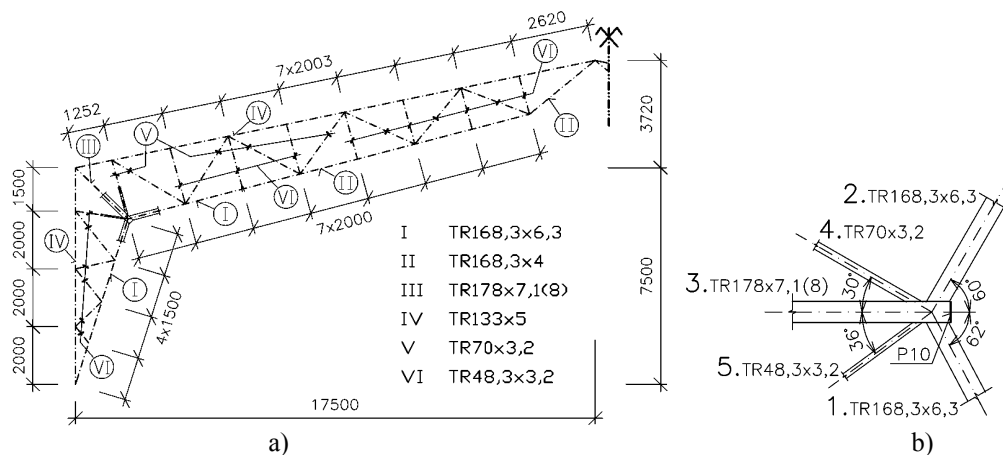
² Ing. Miroslav Rosmanit, Ph.D., Katedra konstrukcí, Fakulta stavební, VŠB-Technická univerzita Ostrava, Ludvíka Podéště 1875/17, 708 33 Ostrava-Poruba, tel.: (+420) 597 321 398, e-mail: miroslav.rosmanit@vsb.cz.

Při navrhování ocelových příhradových konstrukcí však může nastat praktický problém při řešení svařovaných styčníků. Návrhové postupy, které udává norma, jsou komplikované, obtížné kontrolovatelné a mají pouze omezené použití (geometrické podmínky, omezení materiálových charakteristik, pouze určité typy styčníků s danými způsoby zatížení) [2]. Stále častěji se proto objevuje potřeba ověřit chování styčníků, které nevyhovují některým omezením daných Eurokódem.

Tato práce je zaměřena na řešení styčnicku příhradové rámové konstrukce, který vzhledem k jeho geometrii nelze zařadit mezi základní typy styčníků, jejichž únosnost popisuje norma ČSN EN 1993-1-8, a nelze jej tedy přesně posoudit na základě normových vztahů pro výpočet únosnosti svařovaných styčníků z CHS. Pro popis chování tohoto styčnicku zde bylo využito jak numerického modelování (MKP program ANSYS), tak doporučených postupů uvedených v publikaci „Design guide for circular hollow section (CHS) joints under predominantly static loading“, vydavatelství CIDECT [3]. Tato publikace dává více možností pro posuzování CHS styčnicků než zmíněný Eurokód.

2 POPIS ŘEŠENÉ KONSTRUKCE

Předmětem této práce je řešení ocelového příhradového rámu, který je tvořen kruhovými dutými profily (CHS), přesněji řešení styčnicku v rámovém rohu (obr. 1. b)). Rám je osově souměrný a bylo na něm navrženo celkem šest různých průřezů (I – VI na obr. 1. a)). U průřezu č. III byly pro porovnání uvažovány různé tloušťky kruhového profilu, a to $t_{0,A} = 7,1$ mm a $t_{0,B} = 8,0$ mm. Tyto hodnoty byly zvoleny na základě posouzení uvedeného v kapitole 3, a to kvůli významně rozdílné únosnosti řešeného styčnicku.



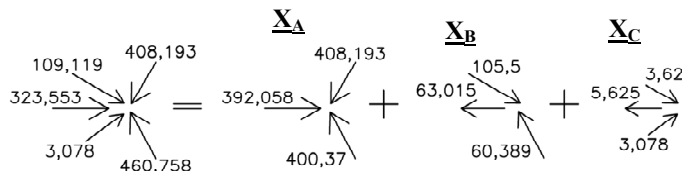
Obr. 1: a) Geometrie řešené konstrukce s vyznačenými typy profilů;
b) Detail zkoumaného styčnicku včetně číslování jednotlivých prutů.

Styčnick, na který je zde zaměřena pozornost, má v konstrukci významný vliv – je nejvíce namáhaný a oblast rámového rohu je navíc obecně kritickým místem. Kromě toho je tento styčnick zajímavý svou geometrií – vzhledem k nesymetrii jej nelze zařadit mezi základní typy styčnicků, jejichž únosnost popisuje norma ČSN EN 1993-1-8. Nastává tak problém s posouzením takového styčnicku, což je cílem této práce.

3 POSOUZENÍ STYČNÍKU PODLE DOPORUČENÍ CIDECT

Na rozdíl od Eurokódu [2], publikace CIDECT [3] klasifikuje základní typy styčnicků příhradových konstrukcí, tedy typ T (který zahrnuje typ Y), typ X nebo typ K (který zahrnuje typ N), na základě metody přenosu sil ve styčnicku, ne jen na základě vzhledu, resp. geometrie styčnicku. Definice X styčnicku pak zní takto: Jestliže je normálová složka síly přenášena přes pásový prvek a je vyrovnávána mezipásovým prvkem (či prvky) na opačné straně, jedná se o X styčnick. [3]

Podle výše uvedené definice byl řešený styčník rozdělen do kombinace tří jednoduchých X styčnicků tak, aby byla zachována rovnováha sil v jednotlivých styčnicích (obr. 2.). Návrhové únosnosti styčnicků byly vyjádřeny v podobě účinnosti připojeného mezipásového prutu, tedy poměrem osového zatížení mezipásového prutu – N_i – a návrhové únosnosti styčnicku pro příslušný prut $N_{i,Rd}$. Výsledná účinnost diagonál pak byla dána součtem účinností pro jednotlivé základní styčnický (X_A, X_B, X_C). Rozhodující vliv na únosnost celého styčnicku měla tlačena diagonála 1 (označení podle obr. 1. b)).



Obr. 2: Rozdělení rovinného styčnicku do kombinace tří základních X styčnicků podle [3] (hodnoty sil byly převzaty ze zjednodušeného prutového modelu rámu).

3.1 Obecný postup výpočtu únosnosti na porušení stěny pásu X-styčnicku podle [3]

Únosnost rovinného X styčnicku na porušení stěny pásu lze podle publikace „Design Guide“ určit z následujícího vztahu:

$$N_{i,Rd} = Q_u \cdot Q_f \cdot \frac{f_{y0} \cdot t_0^2}{\sin \theta_i} \quad (1)$$

kde:

$$Q_u = 2,6 \cdot \left(\frac{1 + \beta}{1 - 0,7\beta} \right) \cdot \gamma^{0,15} \quad (2)$$

$$Q_f = (1 - |n|)^{C_1}, \quad \text{kde } \dots n = \frac{N_0}{N_{pl,0}} + \frac{M_0}{M_{pl,0}} \quad (3)$$

$C_1 = 0,45 - 0,25 \cdot \beta$... pro tlačenný pás $C_1 = 0,2$... pro tažený pás

$$\beta = \frac{d_1 + d_2}{2 \cdot d_0} \quad (4)$$

$$\gamma = \frac{d_0}{2 \cdot t_0} \quad (5)$$

kde:

d_i – vnější průměr prutu ($i = 0, 1, 2$) [mm],

t_0 – tloušťka pásu [mm],

θ_i – úhel mezi mezipásovým prutem i a pásem ($i = 1, 2$) [°],

f_{y0} – mez kluzu pásu [MPa],

$N_0; M_0$ – hodnota vnitřní osově síly, resp. ohybového momentu v místě styčnicku [kN]; [kNm] a

$N_{pl,0}; M_{pl,0}$ – návrhová plastická únosnost v tahu, resp. v ohybu [kN]; [kNm].

3.2 Výsledné únosnosti

Řešený styčník byl rozdělen na tři základní styčnický X_A, X_B, X_C (podle obr. 2), jejichž výsledné únosnosti, resp. účinnosti jsou uvedeny v tabulkách 2 a 4. Geometrie styčnicku a označení diagonál vychází z detailu styčnicku na obr. 1. b). Mez kluzu pásu je $f_{y,0} = 355$ MPa.

Tab. 1: Vstupní hodnoty pro výpočet únosností jednotlivých X styčnicků při tloušťce $t_{0,A} = 7,1$ mm

$\gamma = 12,535$ $A_0 = 3812 \text{ mm}^2$	N_i [kN]	N_0 [kN]	β [-]	Q_u [-]	n [-]	C_1 [-]	Q_f [-]
X_A	$N_1 = 400,37$	-392,06	0,946	21,859	-0,2897	0,214	0,9295
	$N_2 = 408,193$						
X_B	$N_1 = 60,389$	63,015	0,669	11,934	0,0466	0,2	0,9905
	$N_4 = 105,5$						
X_C	$N_4 = 3,62$	5,625	0,332	6,596	0,0042	0,2	0,9992
	$N_5 = 3,078$						

Tab. 2: Výsledné únosnosti a účinnosti diagonál v jednotlivých styčnicích pro hodnotu $t_{0,A} = 7,1$ mm

	$N_{Rd,i}$ [kN]	$N_i/N_{Rd,i}$
X_A	$N_{Rd,1} = 411,807$	0,9722
	$N_{Rd,2} = 419,854$	0,9722 < 1,0 ... VYHOVUJE
X_B	$N_{Rd,1} = 239,59$	0,2521
	$N_{Rd,4} = 423,091$	0,2494
X_C	$N_{Rd,4} = 235,882$	0,0153
	$N_{Rd,5} = 200,653$	0,0153 < 1,0 ... VYHOVUJE

Výsledné účinnosti diagonál 1 a 4 pro původní styčnick jsou dány součtem účinností v jednotlivých stavech:

$$\frac{N_1}{N_{1,Rd}} = \frac{N_{1,XA}}{N_{1,Rd,XA}} + \frac{N_{1,XB}}{N_{1,Rd,XB}} = 0,972 + 0,252 = \underline{\underline{1,224}} > 1,0 \quad \dots \text{NEVYHOVUJE}$$

$(N_{Rd,1} = 376 \text{ kN})$

$$\frac{N_4}{N_{4,Rd}} = \frac{N_{4,XB}}{N_{4,Rd,XB}} + \frac{N_{4,XC}}{N_{4,Rd,XC}} = 0,249 + 0,0153 = \underline{\underline{0,265}} < 1,0 \quad \dots \text{VYHOVUJE}$$

Tab. 3: Vstupní hodnoty pro výpočet únosností jednotlivých X styčnicků při tloušťce $t_{0,B} = 8,0$ mm

$\gamma = 11,125$ $A_0 = 4273 \text{ mm}^2$	N_i [kN]	N_0 [kN]	β [-]	Q_u [-]	n [-]	C_1 [-]	Q_f [-]
X_A	$N_1 = 400,37$	-392,06	0,946	21,471	-0,258	0,214	0,9381
	$N_2 = 408,193$						
X_B	$N_1 = 60,389$	63,015	0,669	11,723	0,0416	0,2	0,9916
	$N_4 = 105,5$						
X_C	$N_4 = 3,62$	5,625	0,332	6,479	0,0037	0,2	0,9993
	$N_5 = 3,078$						

Tab. 4: Výsledné únosnosti a účinnosti diagonál v jednotlivých styčnicích pro hodnotu $t_{0,B} = 8,0$ mm

	$N_{Rd,i}$ [kN]	$N_i/N_{Rd,i}$
X_A	$N_{Rd,1} = 518,292$	0,7725
	$N_{Rd,2} = 528,42$	0,7725 < 1,0 ... VYHOVUJE
X_B	$N_{Rd,1} = 299,098$	0,2019
	$N_{Rd,4} = 528,176$	0,1997
X_C	$N_{Rd,4} = 294,186$	0,0123
	$N_{Rd,5} = 250,25$	0,0123 < 1,0 ... VYHOVUJE

Výsledné účinnosti diagonál 1 a 4 pro původní styčník:

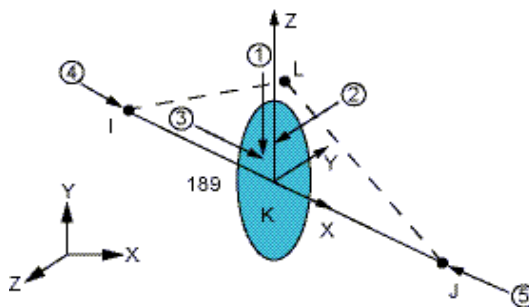
$$\frac{N_1}{N_{1,Rd}} = \frac{N_{1,XA}}{N_{1,Rd,XA}} + \frac{N_{1,XB}}{N_{1,Rd,XB}} = 0,7725 + 0,2019 = \underline{\underline{0,974}} < 1,0 \quad \dots \text{VYHOVUJE}$$

$(N_{Rd,1} = 473 \text{ kN})$

$$\frac{N_4}{N_{4,Rd}} = \frac{N_{4,XB}}{N_{4,Rd,XB}} + \frac{N_{4,XC}}{N_{4,Rd,XC}} = 0,1997 + 0,0123 = \underline{\underline{0,212}} < 1,0 \quad \dots \text{VYHOVUJE}$$

4 TVORBA MKP MODELU

Numerický model byl vytvořen v MKP programu ANSYS 12.0 s využitím konečných prvků umožňující nelineární výpočty (plastické chování materiálu i vliv velkých deformací). Pro modelování CHS profilů byl použit skořepinový konečný prvek SHELL 43 – definován čtyřmi uzly, čtyřmi tloušťkami a ortotropními materiálovými vlastnostmi. Pro model konstrukce příhradového rámu byly použity prostorové 1D liniové prvky BEAM 189, které jsou definovány třemi uzly a průřezem, jehož rovinu je možné definovat orientačním uzlem (uzel L na obr. 3). Pro vzájemné propojení elementů BEAM a SHELL bylo využito kontaktních prvků TARGE 170 (pro řídicí uzel v prostoru) a CONTA 175 (uzly na hranici skořepiny) – viz [4].

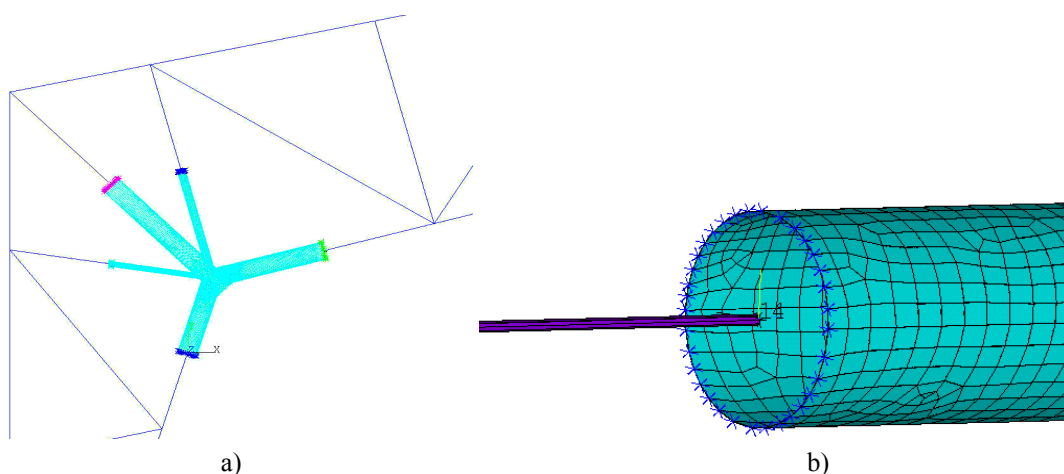


Obr. 3: Geometrie elementu BEAM 189 [5].

Konečným prvkům byly zadány následující materiálové vlastnosti (podobně jako [6], [7]): Youngův modul pružnosti $E = 210$ GPa a Poissonův součinitel $\nu = 0,3$. Liniovým prvkům byly přiřazeny průřezy číslo I – VI podle obr. 1 - a). Při výpočtu byly uvažovány fyzikální i geometrické nelinearity (plastický výpočet s uvážením velkých deformací). Pružno-plastické chování materiálu bylo vyjádřeno bilineárním pracovním diagramem (viz např. [8]) s mezí kluzu $f_y = 355$ MPa a 5% zpevněním (tedy s hodnotou modulu zpevnění $E_2 = 10$ GPa).

Pro zadávání okrajových podmínek byl zvolen přístup propojení 3D detailu styčnicku s jednoduchými prutovými prvky, pomocí kterých byla vymodelována celá konstrukce příhradového rámu (obr. 4. a)). Hlavním problémem tohoto postupu je propojení různých typů konečných prvků – prutových konečných prvků (BEAM 189) s plošnými konečnými prvky (SHELL 43). Pro tato spojení byly použity výše zmíněné kontaktní prvky CONTA 175 a TARGE 170 s využitím MPC (Multi-Point Constraints) algoritmu (podobně jako v [9]). Tato metoda umožňuje poměrně jednoduše spojit konečné prvky různých typů a její použití má mnoho výhod, např.:

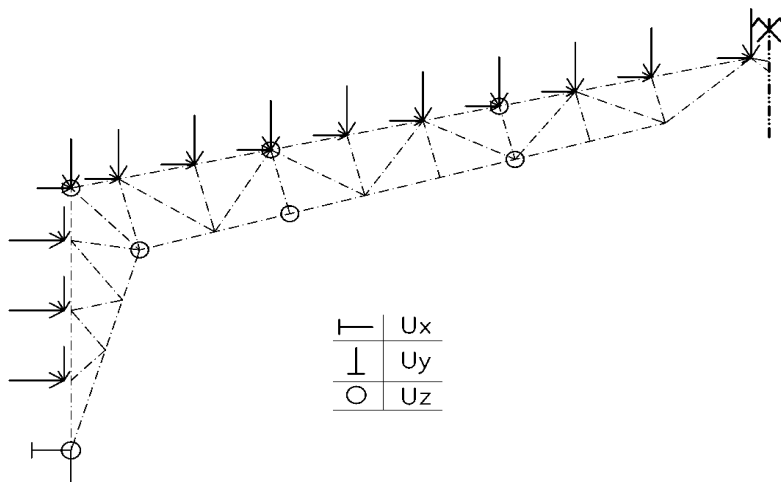
- pomocí MPC je možné řešit také problém velkých deformací,
- není třeba zadávat tuhost kontaktu,
- lze uvažovat jak tuhé chování hranice kontaktu, tak její deformovatelnost,
- další výhodou je také úspora strojového času potřebného k výpočtu a především jednoduché zadávání prostřednictvím funkce „Contact Wizard“.



Obr. 4: a) Propojení prutového a 3D modelu; b) Detail kontaktu „Beam to Shell“

Princip MPC kontaktu „Beam to Shell“ spočívá ve vytvoření kontaktního páru „node-to-surface“. Jako řídicí uzel se volí koncový uzel elementu BEAM, který se napojuje na element typu SHELL. Dále je třeba zvolit kontaktní hranu skořepinového (SHELL) modelu. V posledním kroku před vytvořením kontaktu je možné upřesnit typy okrajových podmínek kontaktu (jaké deformace bude kontakt přenášet), a také chování hrany kontaktu – zda se bude chovat jako tuhá, nebo bude deformovatelná. Detail kontaktu je na obr. 4. b).

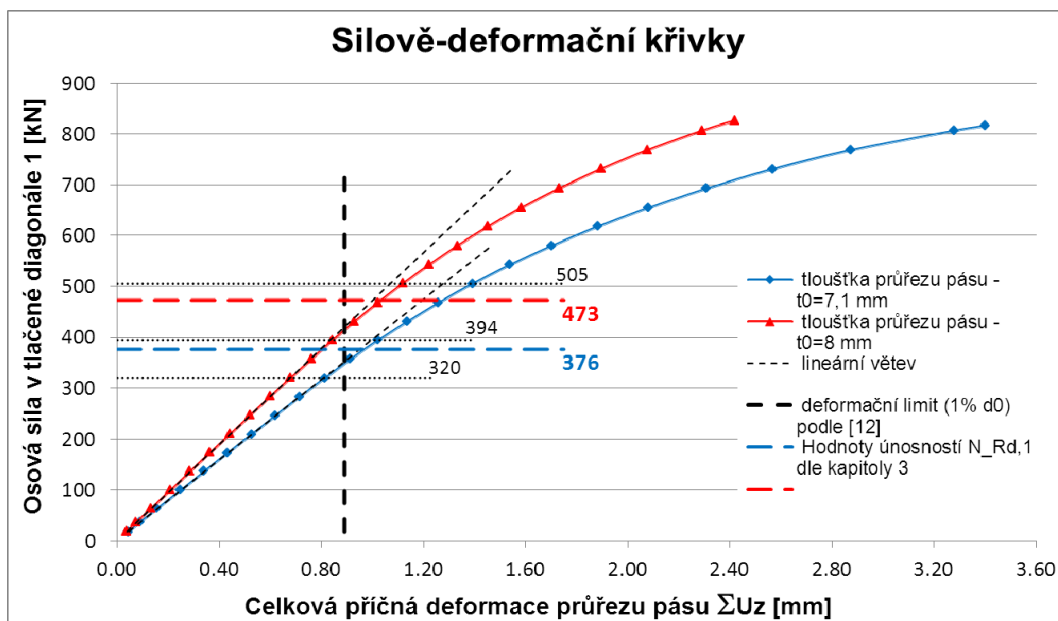
Díky tomuto propojení různých typů konečných prvků – BEAM 189 a SHELL 43 – bylo možné zadávat okrajové podmínky (podpory a zatížení) přímo na model příhradového rámu (obr. 5). Chování sledovaného styčnicku tak bylo vyvozeno vzájemným působením jednotlivých prvků konstrukce, což je blízké skutečnému chování, a nebylo tedy zapotřebí hledat vhodné okrajové podmínky pro samostatný detail (jako například v [10], [11]). Síly, kterými byl příhradový rám zatěžován, vycházely z kritické kombinace předpokládaných zatěžovacích stavů.



Obr. 5: Schéma zadaných okrajových podmínek – podpory, zatížení

5 VYHODNOCENÍ VÝSLEDKŮ

Řešeny byly dva numerické modely, které se lišily pouze zadanou tloušťkou průřezu pásu ($t_{0,A} = 7,1$ mm a $t_{0,B} = 8$ mm). Na modelech byla sledována závislost příčné deformace profilu pásu na síle v tlačené diagonále 1 (nejvíce namáhaný prut ve styčnicku) – obr. 6. Průběh těchto silově-deformačních křivek byl porovnáván s únosnostmi určenými analyticky (viz kapitola 3) a s deformačním limitem podle [12], který je $0,01 \cdot d_0$ (kde d_0 je průměr profilu pásu) – odpovídá meznímu stavu použitelnosti. Na základě tohoto kritéria byly určeny hodnoty únosností styčnicku $N_{Rd,1,A,def} = 348$ kN (pro tloušťku $t_{0,A} = 7,1$ mm), resp. $N_{Rd,1,B,def} = 414$ kN (pro tloušťku $t_{0,B} = 8,0$ mm). Tyto hodnoty odpovídají průniku silově-deformačních křivek na obr. 6 s deformačním limitem.

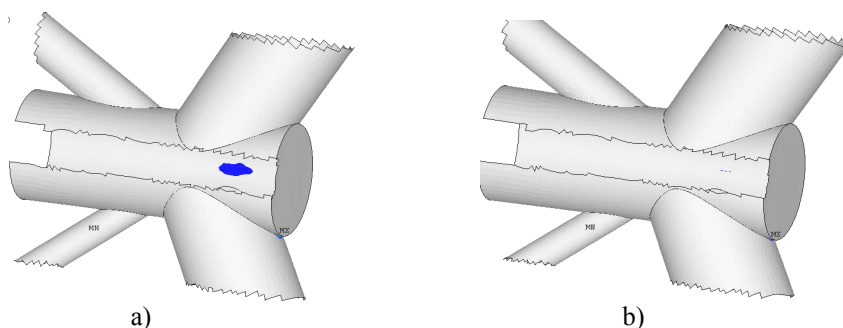


Obr. 6: Silově-deformační křivky pro různé tloušťky průřezu pásu s vyznačením hodnoty deformačního limitu $0,01d_0$ a s hodnotami únosností $N_{Rd,1}$ podle kapitoly 3

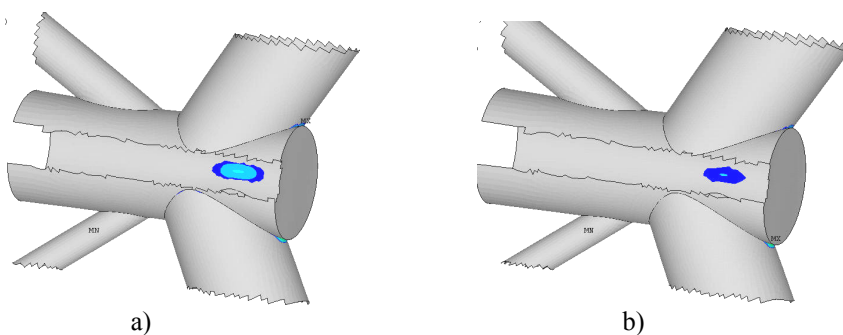
Na obr. 7 až 9 lze sledovat rozvoj napětí za mezí kluzu ve třech krocích (viz obr. 6) – síla v tlačené diagonále 1 nabývá hodnot 320 kN, 394 kN a 505 kN. Tyto kroky představují body před a po dosažení deformačního limitu $0,01d_0$:

- 320 kN – styčnick s hodnotou $t_{0,A} = 7,1$ mm před dosažením deformačního limitu;
- 394 kN – styčnick s hodnotou $t_{0,B} = 8$ mm před dosažením deformačního limitu;
- 505 kN – oba styčnický jsou za hranicí deformačního limitu.

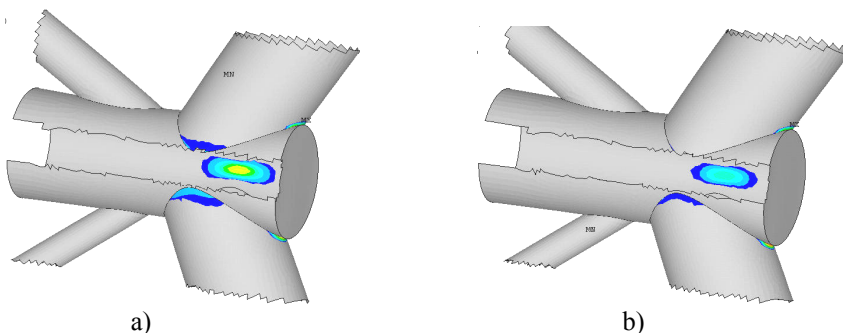
V tab. 5 jsou pak zaznamenány hodnoty příčných deformací (U_z) průřezu pásu (podle obr. 10) v uvedených krocích.



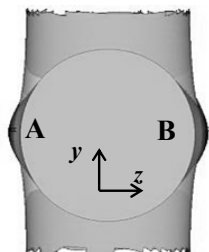
Obr. 7: Rozvoj napětí (von Mises) za mezí kluzu při síle 320 kN v tlačené diagonále 1
a) tloušťka pásu 7,1 mm; b) tloušťka pásu 8,0 mm



Obr. 8: Rozvoj napětí (von Mises) za mezí kluzu při síle 394 kN v tlačené diagonále 1
a) tloušťka pásu 7,1 mm; b) tloušťka pásu 8,0 mm



Obr. 9: Rozvoj napětí (von Mises) za mezí kluzu při síle 505 kN v tlačené diagonále 1
a) tloušťka pásu 7,1 mm; b) tloušťka pásu 8,0 mm



Obr. 10: Příčná deformace průřezu pásu (zvětšené měřítko)

Tab. 5: Hodnoty příčných deformací průřezu pásu (viz obr. 10)

t_0 [mm]	N_1 [kN]		U_z [mm]	$\Sigma U_z $ [mm]
7,1	320	A	-0,404	0,814
		B	+0,410	
	394	A	-0,508	1,022
		B	+0,514	
	505	A	-0,694	1,394
		B	+0,700	
8,0	320	A	-0,338	0,681
		B	+0,343	
	394	A	-0,421	0,846
		B	+0,425	
	505	A	-0,559	1,112
		B	+0,561	

6 ZÁVĚR

Byl vytvořen funkční numerický model 3D detailu styčnicku, jehož chování bylo díky kontaktním prvkům (CONTA 175 a TARGE 170) odvozeno z chování konstrukce jako celku, což odpovídá skutečnému působení. Způsob deformace styčnicku a rozvoj plastických napětí odpovídá předpokládanému způsobu porušení, tedy *porušení stěny pásu*. Ze silově deformačních křivek na obr. 6 je patrné, při jakém zatížení (síle v tlačené diagonále 1) začínají jednotlivé modely styčnicků plastizovat, tedy kdy se křivky začínají odklánět od lineární větve. Tyto hodnoty jsou téměř shodné s hodnotami zatížení pro deformační limit $0,01 \cdot d_0$ podle [12].

Z analytického posouzení podle publikace [3] je zřejmé, že ne příliš významnou změnou tloušťky stěny pásu lze dosáhnout významné změny v únosnosti styčnicku (navýšení o 25%). Použitá analytická metoda není nová (rok vydání publikace – 2008), avšak není zavedená v normě a v praxi není rozšířená. Získané výsledky jsou v dobré shodě s výsledky z MKP modelu, jehož výhodou je především získání přesnější představy o celkovém chování styčnicku. Přesto je pro praxi lépe využitelná metoda analytická, hlavně kvůli časové náročnosti numerických modelů a vysokým nárokům na znalost softwaru.

Nesoulad mezi hodnotami únosností vypočítaných na základě numerického a analytického modelu je asi 10%. Tento rozdíl může být způsoben komplexností MKP modelu (např. vliv přidavných momentů ve styčnicku, které jsou způsobeny polotuhým spojením jednotlivých prvků). Rovněž je sporné, zda je mez prvního zplastizování ve styčnicku rozhodující pro jeho celkovou únosnost. Nicméně bylo potvrzeno, že doporučený deformační limit je dobrou aproximací počátku nelineárního chování spoje. Problematika numerického modelování a posuzování ocelových svařovaných styčnicků bude dále rozvíjena a podrobněji zpracovávána.

PODĚKOVÁNÍ

Příspěvek byl realizován za finanční podpory projektu MŠMT číslo SP2013/169 (Studentská grantová soutěž VŠB-TUO).

LITERATURA

- [1] Wardenier, J. *Hollow Sections in Structural Applications*. CIDECT, 2001. ISBN 0-471-49912-9
- [2] ČSN EN 1993-1-8, Eurokód 3: Navrhování ocelových konstrukcí - Část 1-8: Navrhování styčníků. Český normalizační institut, 2006. 126s.
- [3] Wardenier, J., Kurobane, Y., Packer, J. A., van der Vegte, G. J., Zhao, X. - L.: *Design guide for circular hollow section (CHS) joint under predominantly static loading*. 2nd. CIDECT, Construction with hollow steel sections, 2008. ISBN 978-393-8817-032.
- [4] *Training Manual – Advanced Contact & Fasteners for ANSYS 11.0*. First Edition, Inventory number: 002580, Published: September 22, 2008.
- [5] *Release 11.0 Documentation for ANSYS* [online]. [cit. 2013-7-15]. Dostupné z <<http://www.kxcad.net/ansys/ANSYS/ansyshelp>>
- [6] Salem, A. H., Soliman, E. A., Ibrahim, S. A. and Fakhry, K. F. Strength of hollow section T-joints under bending moments. In *Proceedings of Twelfth International Colloquium on Structural and Geotechnical Engineering*. Cairo – Egypt, 2007.
- [7] Jurčíková, A., Rosmanit, M.: FEM Model of Joint Consisting RHS and HEA Profiles. In: *STEEL STRUCTURES AND BRIDGES 2012: 23rd Czech and Slovak International Conference*. Podbanské, září 2012. Procedia Engineering, Volume 40, 2012, s. 6. ISSN 1877-7058.
- [8] Bittencourt, M. C. , de Lima, L. R. O., Vellasco, P. C. G. da S., da Silva, J. G. S., Neves, L. F. da C.: A numerical analysis of tubular joints under static loading. In *Proceedings of APCOM'07 in conjunction with EPMESC XI*, Kyoto, Japan. December 3-6, 2007.
- [9] Jurčíková, A., Rosmanit, M.: Propojení 3D detailu styčnicku s prutovým modelem konstrukce s využitím MPC algoritmu. *Modelování v mechanice 2013: [mezinárodní konference]*, Ostrava, květen 2013. Ostrava: VŠB - Technická univerzita Ostrava, 2013. ISBN 978-80-248-2694-3.
- [10] Vegte, G. J. van der, Makino, Y., Wardenier, J. The influence of boundary conditions on the chord load effect for CHS gap K-joints. In *Connections in Steel Structures*. Amsterdam. June 3-4, 2004.
- [11] Choo, Y. S., Qian, X. D., Wardenier, J. Effects of boundary conditions and chord stresses on static strength of thick-walled CHS joints. In *Journal of Constructional Steel Research*. April 2006, Volume 62, Issue 4, Pages 316–328. ISSN 0143-974X.
- [12] Lu, L. H., Winkel, G. D. de, Yu, Y., and Wardenier, J.: Deformation limit for the ultimate strength of hollow section joints. In: *Proceedings 6th International Symposium on Tubular Structures*, Melbourne, Australia, 1994.

Oponentní posudek vypracoval:

Prof. Ing. Stanislav Kmeť, PhD., Katedra kovových a dřevěných konstrukcí, Stavební fakulta, TU v Košiciach.

Doc. Ing. Jiří Kala, Ph.D., Ústav stavební mechaniky, Fakulta stavební, VUT v Brně.

Maciej MAJOR¹, Izabela MAJOR²ACCELERATION WAVE PROPAGATING IN HYPERELASTIC MOONEY-RIVLIN
AND ZAHORSKI MATERIALS**Abstract**

The paper presents the problems of propagation of the acceleration wave in a cylinder made of hyperelastic incompressible Mooney – Rivlin and Zahorski materials. The study analysed the velocity of acceleration wave propagation and the shape of the front of propagating surface of discontinuities. The analytical results obtained in the study were presented graphically.

Keywords:

Acceleration wave, hyperelastic materials, rubber.

1 INTRODUCTION

Let us consider a circular cylinder made of an incompressible elastic material with the initial radii R and R_1 , with $R < R_1$. We use a cylindrical coordinate system of $\{X^\alpha\} = \{R, \Theta, Z\}$ with the axis X^3 coinciding with the cylinder axis. For the present configuration, we also use a circular coordinate system of $\{x^i\} = \{r, \vartheta, z\}$. The initial deformation is given by the following formulas [3]:

$$r = \sqrt{R^2 + c}; \quad \vartheta = \Theta; \quad z = Z \quad (1)$$

where c is a parameter that describes the deformation.

Equations (1) describe a cylinder's inflation where its length remains invariable whereas the incompressibility condition is met with an identity.

For the deformation (1), we know the deformation gradient and the left B^{ik} and right $C_{\alpha\beta}$ deformation tensors:

$$[x^i{}_\alpha] = \begin{bmatrix} \frac{R}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; [B^{ik}] = \begin{bmatrix} \frac{R^2}{r^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; [C_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} \frac{R^2}{r^2} & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

The invariants of the deformation tensor are:

$$I_1 = \frac{R^2}{r^2} + \frac{r^2}{R^2} + 1; \quad I_2 = I_1; \quad I_3 = \frac{R^2}{r^2} \cdot \frac{r^2}{R^2} \cdot 1 = 1 \quad (3)$$

¹ DSc. eng. Maciej Major, Czestochowa University of Technology, Faculty of Civil Engineering, ul. Akademicka 3, 42-200 Czestochowa, Poland, e-mail: mmajor@pcz.czest.pl.

² DSc. eng. Izabela Major, Czestochowa University of Technology, Faculty of Civil Engineering, ul. Akademicka 3, 42-200 Czestochowa, Poland, e-mail: admin@major.strefa.pl.

The equation of motion for the initial deformation (1) of an incompressible material is given by (see [3])

$$A_i^{\alpha\beta} x^k \Big|_{\alpha\beta} + p \Big|_{\alpha} X^{\alpha}_{,i} = 0 \quad (4)$$

In this case, the covariant derivative of the scalar reduces to a partial derivative. Neither the scalar nor absolute derivative depends on the spatial basis. After transformation, the equation is given by:

$$A_i^{\alpha\beta} x^k \Big|_{\alpha\beta} + p_{,i} = 0 \quad (5)$$

The equation (5) is a basic equation which should be met by the deformation (1). The first-order tensor for the elastic material function has the coordinates (see [4]):

$$A_i^{\alpha\beta} = 2\sigma_1 g_{ik} g^{\alpha\beta} + 2\sigma_2 \left[2x_i^{\alpha} x_k^{\beta} - g_{ik} C^{\alpha\beta} - x_i^{\alpha} x_k^{\beta} + (I_1 g_{ik} - B_{ik}) g^{\alpha\beta} \right] + 4\sigma_{11} x_i^{\alpha} x_k^{\beta} \quad (6)$$

For further calculations, we adopt the Zahorski's material characterized by the elastic constants of C_1, C_2, C_3 , [1]

$$W(I_1, I_2) = \sigma \rho_R = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3) + C_3(I_1^2 - 9) \quad (7)$$

For that material, the values of the derivatives $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_{11}$ are:

$$\sigma_1 = \frac{1}{\rho_R} (C_1 + 2C_3 I_1); \quad \sigma_2 = \frac{C_2}{\rho_R}; \quad \sigma_{11} = \frac{2C_3}{\rho_R} \quad (8)$$

An ordinary differential equation for the function p is:

$$\frac{dp}{dR} = 2(C_1 + C_2) \left[-\frac{R(R^2 + 2c)}{(R^2 + c)^2} + \frac{1}{R} \right] - 4C_3 \left[\frac{2R}{R^2 + c} + \frac{3R^3 c}{(R^2 + c)^3} - \frac{2}{R} - \frac{c}{R^3} \right] \quad (9)$$

Solving the above equation yields an equation of pressure p (see [2]):

$$p = p_o + c(C_1 + C_2) \left[\frac{1}{R^2 + c} - \frac{1}{R_o^2 + c} \right] + C_3 c \left[3 \left(\frac{c + 2R^2}{(R^2 + c)^2} - \frac{c + 2R_o^2}{(R_o^2 + c)^2} \right) - 2 \left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{R_o^2} \right) \right] + \ln \left(\frac{R^2 (R_o^2 + c)}{R_o^2 (R^2 + c)} \right)^{(C_1 + C_2 + 4C_3)} \quad (10)$$

Assuming that $C_3 = 0$ gives an equation of p for the Mooney – Rivlin material (see [4]).

2 THE CONDITION OF PROPAGATION OF THE DISTURBANCE IN THE FORM OF AN ACCELERATION WAVE

We limit our considerations to an axially symmetric surface of discontinuities Σ . The equation for this surface is given by (see [4]):

$$t = \psi(r, z) \quad (11)$$

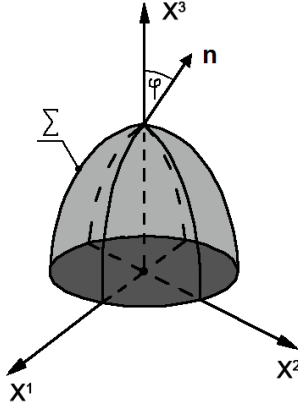


Fig. 1: Axially symmetric surface of discontinuities Σ in the $\{x^i\}$ coordinate system and a normal vector \mathbf{n} with a slope angle φ

According to [4], the acoustic tensor q_{ik} depends on the direction of propagation \mathbf{n} :

$$q_{ik} = A_i^{\alpha} k^{\beta} x^r_{\alpha} x^s_{\beta} n_r n_s \quad (12)$$

The reduced acoustic tensor q_{ik}^* is given by the relation (see [4]):

$$q_{ik}^* = q_{ik} - q_{rk} n_i n^r \quad (13)$$

The acoustic tensor q_{ik} and reduced acoustic tensor q_{ik}^* are:

$$[q_{ik}] = \begin{bmatrix} q_{11} & 0 & q_{13} \\ 0 & q_{22} & 0 \\ q_{31} & 0 & q_{33} \end{bmatrix}; [q_{ik}^*] = \begin{bmatrix} q_{11}^* & 0 & q_{13}^* \\ 0 & q_{22}^* & 0 \\ q_{31}^* & 0 & q_{33}^* \end{bmatrix} \quad (14)$$

Non-zero coordinates of both the acoustic tensor and reduced acoustic tensor are:

$$\begin{aligned} q_{11} &= 2 \cos^2 \varphi (\Psi_6 + \Psi_1) + \frac{2R^2 \sin^2 \varphi}{r^2} (\Psi_2 + \Psi_1) \\ q_{22} &= 2R^2 \sin^2 \varphi (\Psi_9 + \Psi_1) + 2r^2 \cos^2 \varphi (\Psi_8 + \Psi_1) \\ q_{33} &= \frac{2R^2 \sin^2 \varphi}{r^2} (\Psi_6 + \Psi_1) + 2 \cos^2 \varphi (\Psi_7 + \Psi_4) \\ q_{13} &= q_{31} = \frac{R^2}{r^2} \Psi_5 \sin 2\varphi \\ q_{11}^* &= \frac{2 \cos^2 \varphi}{r^2} [R^2 (\Psi_2 + \Psi_3) \sin^2 \varphi - R^2 \Psi_5 \sin^2 \varphi + r^2 (\Psi_6 + \Psi_1) \cos^2 \varphi] \\ q_{22}^* &= 2 [R^2 (\Psi_9 + \Psi_1) \sin^2 \varphi + r^2 (\Psi_8 + \Psi_1) \cos^2 \varphi] \\ q_{33}^* &= \frac{2 \sin^2 \varphi}{r^2} [R^2 (\Psi_6 + \Psi_1) \sin^2 \varphi + r^2 (\Psi_7 + \Psi_4) \cos^2 \varphi - R^2 \Psi_5 \cos^2 \varphi] \end{aligned} \quad (15)$$

$$q_{13}^* = -\frac{\sin 2\varphi}{r^2} \left[R^2(\Psi_6 + \Psi_1) \sin^2 \varphi + r^2(\Psi_7 + \Psi_4) \cos^2 \varphi - R^2 \Psi_5 \cos^2 \varphi \right]$$

$$q_{31}^* = -\frac{\sin 2\varphi}{r^2} \left[R^2(\Psi_2 + \Psi_3) \sin^2 \varphi - R^2 \Psi_5 \sin^2 \varphi + r^2(\Psi_6 + \Psi_1) \cos^2 \varphi \right]$$

where:

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= 2C_3 \left(\frac{R^2}{r^2} + \frac{r^2}{R^2} + 1 \right); \quad \Psi_2 = C_1 + C_2 \left(\frac{r^2}{R^2} + 1 \right); \quad \Psi_3 = 2C_3 \left(\frac{3R^2}{r^2} + \frac{r^2}{R^2} + 1 \right) \\ \Psi_4 &= C_3 \left(\frac{R^2}{r^2} + \frac{r^2}{R^2} + 5 \right); \quad \Psi_5 = C_2 + 4C_3; \quad \Psi_6 = C_1 + C_2 \frac{r^2}{R^2} \\ \Psi_7 &= C_1 + C_2 \left(\frac{R^2}{r^2} + \frac{r^2}{R^2} \right); \quad \Psi_8 = C_1 + C_2 \frac{R^2}{r^2}; \quad \Psi_9 = C_1 + C_2 \end{aligned} \quad (16)$$

The propagation velocities are given by:

$$u_1 = \sqrt{\frac{2}{\rho r^2} \left\{ \cos^2 \varphi \left[R^2(\Psi_2 + \Psi_3) \sin^2 \varphi - R^2 \Psi_5 \sin^2 \varphi + r^2(\Psi_6 + \Psi_1) \cos^2 \varphi \right] + \sin^2 \varphi \left[R^2(\Psi_6 + \Psi_1) \sin^2 \varphi - R^2 \Psi_5 \cos^2 \varphi + r^2(\Psi_7 + \Psi_4) \cos^2 \varphi \right] \right\}}$$

$$u_2 = 0 \quad (17)$$

$$u_3 = \sqrt{\frac{2 \left[R^2(\Psi_9 + \Psi_1) \sin^2 \varphi + r^2(\Psi_8 + \Psi_1) \cos^2 \varphi \right]}{\rho r^2}}$$

3 THE FRONT OF THE ACCELERATION WAVE IN THE ZAHORSKI MATERIAL

In our case, the reduced acoustic tensor $(14)_2$ is symmetrical. Substitution of the coordinate values q_{ik}^* to the propagation condition for the velocity of the acceleration wave in an incompressible material yields (see [4]):

$$\left(q_{ik}^* - \rho u^2 g_{ik} \right) a^k = 0 \quad (18)$$

Note that there are two possible amplitudes (see [4])

$$a^k = \left[0, \frac{1}{r}, 0 \right]; \quad a^k = [\cos \varphi, 0, -\sin \varphi] \quad (19)$$

determined with the accuracy to the scalar multiplier. These amplitudes are mutually orthogonal and orthogonal with respect to the vector normal to the surface of discontinuities Σ . Both amplitudes represent transverse waves (which are the only waves possible in an incompressible material). By substituting vector coordinates \mathbf{n} and (16) to (17)₃, we obtain the differential equation for the function $\psi(r, z)$ that represents the wave front. With $C_3 = 0$ we obtain an expression for a Mooney – Rivlin material that has been widely used in the literature [4]

$$\frac{2}{\rho r^2} \left[R^2 \left[C_1 + C_2 + 2C_3 \left(\frac{R^2}{r^2} + \frac{r^2}{R^2} + 1 \right) \right] \psi_r^2 + r^2 \left(C_1 + \frac{R^2}{r^2} C_2 + 2C_3 \left(\frac{R^2}{r^2} + \frac{r^2}{R^2} + 1 \right) \right) \psi_z^2 \right] = 1 \quad (20)$$

If there is no initial deformation ($c = 0$), then $R = r$ and the equation (17)₃ reduces to

$$c_o^2 = \frac{2}{\rho}(C_1 + C_2 + 6C_3) \quad (21)$$

This demonstrates that the propagation velocity depends neither on the point nor on the direction of propagation. The initial deformation gives priority to certain directions and favours certain points in the space. If $c < 0$ (radial compression $r < R$), then, for each φ , we obtain $u_3 > c_o$ while u_3 is a monotonically decreasing function of r . If $c > 0$ (radial extension $r > R$) then, for each φ , we obtain $u_3 < c_o$ while u_3 is a monotonically increasing function of r . For a given r , the extreme value of c (maximum) corresponds to $\varphi = \frac{\pi}{2}$. We introduce the following denotations:

$$M_1 = \frac{2C_3}{C_1 + C_2 + 6C_3}; \quad M_2 = \frac{C_2}{C_1 + C_2 + 6C_3} \quad (22)$$

By substituting (22) to (20) and given that $R^2 = r^2 - c$ and (21), we obtain a non-linear partial differential equation of the first order:

$$c_o^2 \left[\left(1 - \frac{c}{r^2}\right) \left[1 + M_1 \left(\frac{c^2}{r^2(r^2 - c)} \right) \right] \psi_r^2 + \left[1 - M_2 \frac{c}{r^2} + M_1 \frac{c^2}{r^2(r^2 - c)} \right] \psi_z^2 \right] = 1 \quad (23)$$

We solve this equation using the small parameter method by limitation to the first two approximations, and assuming that the constant c represents the small parameter describing the basic deformation (1):

$$\psi(r, z) = \overset{o}{\psi}(r, z) + c \overset{1}{\psi}(r, z) \quad (24)$$

By substituting (24) to the equation and equating the coefficients of the respective powers of the parameter c to zero, we obtain:

$$c_o^2 \left(\overset{o}{\psi}_r^2 + \overset{o}{\psi}_z^2 \right) = 1; \quad 2 \left(\overset{o}{\psi}_r \overset{1}{\psi}_r + \overset{o}{\psi}_z \overset{1}{\psi}_z \right) = \frac{1}{r^2} \left(\overset{o}{\psi}_r^2 + M_2 \overset{o}{\psi}_z \right) \quad (25)$$

We are interested in the surface area Σ which, at the instant $t = 0$ is a plane with $z = 0$, that propagates towards the cylinder axis. As shown by the numerical analysis, this surface is gradually deformed as it moves towards the axis (see [4]).

According to the above assumption $\left(\overset{o}{\psi}_r = 0 \right)$ and the equation (9), $\overset{o}{\psi}$ for zero approximations is:

$$\overset{o}{\psi} = \frac{1}{c_o} z \quad (26)$$

Substitution of (26) to the equation (25)₂ yields a linear equation for the approximation $\overset{1}{\psi}$. The solution to this equation is

$$\overset{1}{\psi} = \frac{1}{c_o} \left(\frac{M_2}{2r^2} \right) z + g(r) \quad (27)$$

where $g(r)$ is arbitrary. For the surface of discontinuities Σ represents the plane $z=0$, hence $g(r)=0$. With the accuracy to the linear expressions with respect to c the surface of discontinuities $\psi(r,z)$ is given by the function

$$\psi(r,z) = \frac{1}{c_o} \left(1 + \frac{M_2 c}{2r^2} \right) z \quad (28)$$

This represents the equation of the front of acceleration wave for the Zahorski material.

4 NUMERICAL ANALYSIS

For the purposes of the numerical analysis, we assume a radial extension as a parameter that describes the deformation of $c = 0,3 \text{ cm}^2$, and rubber density of $\rho = 1190 \text{ kg/m}^3$.

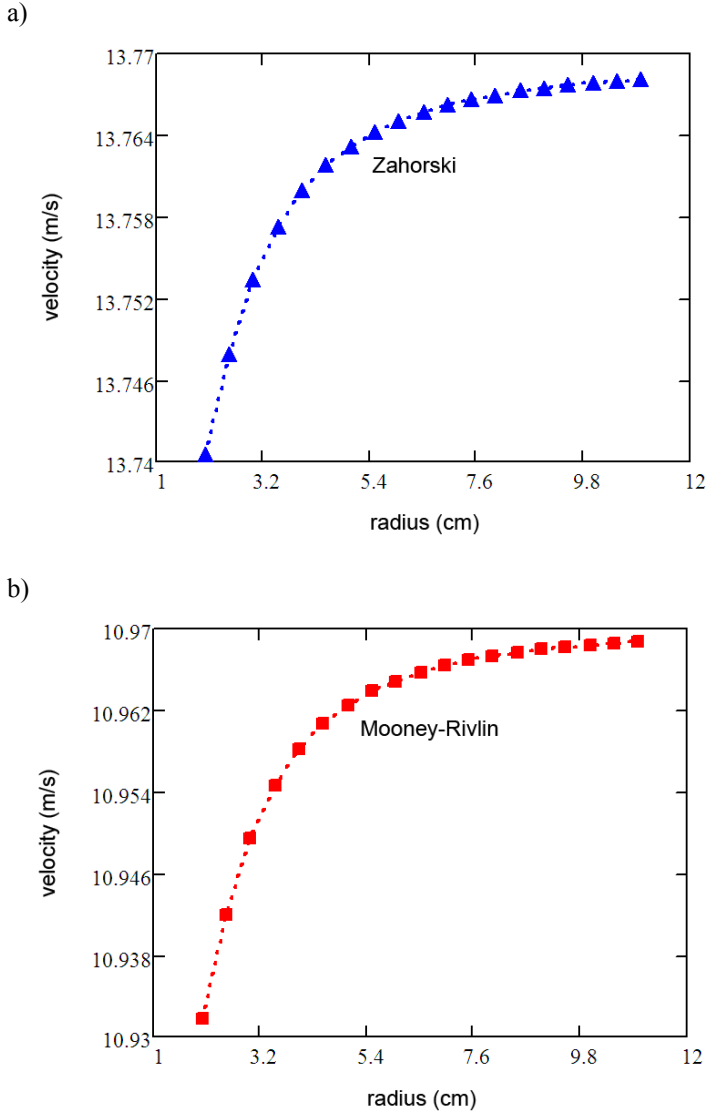


Fig. 2: Distribution of the velocity u_3 : a) Zahorski's material, b) Mooney – Rivlin material

The following constants C_1, C_2, C_3 were adopted from [5] for the rubber A (if $C_3 = 0$, we obtain the Mooney – Rivlin material):

$$C_{1,A} = 6,278 \cdot 10^4 \text{ Pa}; C_{2,A} = 8,829 \cdot 10^3 \text{ Pa}; C_{3,A} = 6,867 \cdot 10^3 \text{ Pa};$$

The velocities of propagation u_3 are given by the formulae (17)₃, the radius of the cylinder ranges from 2 cm to 11 cm and its height was adopted as 10 cm. The diagrams that illustrate the relationship between the velocity and the radius for the Zahorski and Mooney – Rivlin materials are shown in Fig. 2. There are noticeable differences in the velocity of wave propagation between both materials.

Fig.3 illustrates the next location of the wave front for the velocity u_3 , the range $R \in \langle 2;11 \rangle$ cm and deformation of $c = 0,3 \text{ cm}^2$ for two instants: $t = 1 \text{ s}$ and $t = 5 \text{ s}$. The front of the acceleration wave is given by the above equation (28). With $C_3 = 0$, we obtain the Mooney – Rivlin material.

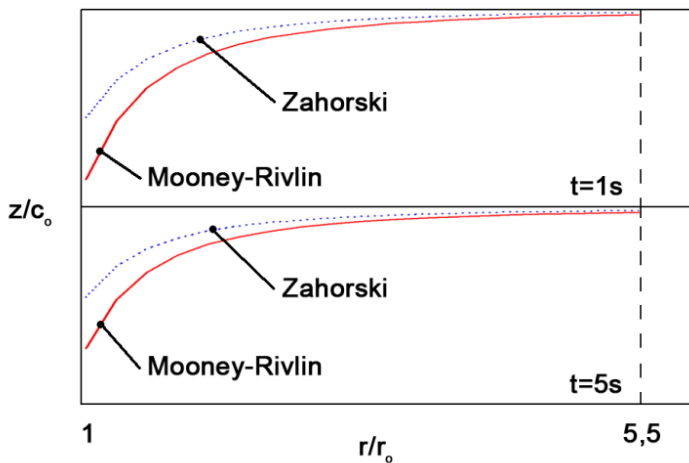


Fig. 3: The next location of the wave front for the velocity u_3 in the range $R \in \langle 2;11 \rangle$ cm, $c = 0,3 \text{ cm}^2$ for two instants: $t = 1 \text{ s}$ and $t = 5 \text{ s}$.

5 CONCLUSIONS

The numerical analysis showed the differences in the distribution of the velocity u_3 between Zahorski and Mooney – Rivlin materials. This results from a non-linear dependence of the tensor I_1 on the invariant in the elastic Zahorski potential.

Also, the determination of the shape of the front of the propagating surface of discontinuities revealed specific quantitative differences, which were characterized by a greater curvature of the propagating wave front in the cylinder made of the Zahorski material compared to the Mooney – Rivlin material. The curvature of the wave front increases with time in both materials studied.

We found that, compared to the Mooney-Rivlin material, the Zahorski material adopted for the calculations shows significant differences in the velocity of propagation and curvature of the front of the acceleration wave.

The practical implications of using hyperelastic materials described with Zahorski potential concern rubber or rubber-like products which have been widely used in different branches of industry. While demonstrating the differences in the values of analytical solutions presented in this paper it is worth noting that the non-linear term present in the Zahorski potential (which is not

considered in the widely adopted Mooney-Rivlin potential) affects the analysis of wave phenomena that occur in rubber and rubber-like materials, which undoubtedly improves the quality of rubber mixtures used for specific purposes.

REFERENCES

- [1] MAJOR M., *Velocity of acceleration wave propagating in hyperelastic Zahorski and Mooney-Rivlin materials*, J. Theor. Appl. Mech., 43, 4, 2005, pp. 777-787s, ISSN 1429-2955.
- [2] MAJOR M. & MAJOR I., *Fala przyspieszenia w cienkim warstwowym hipersprężystym przecie*, IV Sympozjon Kompozyty Konstrukcje warstwowe Referaty Wrocław-Karpacz, 105-112, 2006, ISBN 83-7125-149-1.
- [3] WESOŁOWSKI Z., *Fala akustyczna w cylindrze odkształconym w sposób skończony*, Rozprawy inżynierskie, 20, (4) 613-628, IPPT PAN, Warszawa, 1972.
- [4] WESOŁOWSKI Z., *Zagadnienia dynamiczne nieliniowej teorii sprężystości*, PWN, Warszawa, 1974.
- [5] ZAHORSKI S., *Doświadczalne badania niektórych własności mechanicznych gumy*, Rozprawy Inżynierskie. Tom 10, (1), 193-207, 1962.

Reviewers:

Prof. Ing. Jiří Šejnoha, DrSc., FEng., Department of Mechanics, Faculty of Civil Engineering, Czech Technical University in Prague.

Doc. Ing. Eva Kormaníková, PhD., Department of Structural Mechanics, Faculty of Civil Engineering, Technical University of Košice.

Vladimíra MICHALCOVÁ¹, Sergej KUZNETSOV², Stanislav POSPÍŠIL³

MODELÝ ZATÍŽENÍ OBJEKTU OD ÚČINKŮ PROUDOVÉHO POLE

MODELS OF LOAD ON BULDINGS FROM THE EFFECTS OF THE FLOW FIELD

Abstrakt

Článek popisuje vzájemné porovnání dvou rozdílných řešení standardní úlohy stavební aerodynamiky, tj. zatížení objektu tvaru krychle vystaveného účinkům proudového pole vzduchu. Fyzikální modelování probíhá v aerodynamickém klimatickém tunelu Ústavu teoretické a aplikované mechaniky AVČR v Telči, numerické modelování je řešeno na Stavební fakultě VŠB-TU Ostrava pomocí software Ansys Fluent.

Klíčová slova

Aerodynamika, větrný tunel, CFD.

Abstracts

Article describes two different approaches of the solution of benchmark solution of bluff aerodynamic, which is the solution of wind pressures upon the cube exposed to the effects of air flow field. Physical modeling is carried out at the wind tunnel of the Institute of Theoretical and Applied Mechanics in Telč whereas numerical modeling is performed at the Faculty of Civil Engineering, VSB Technical University of Ostrava of software using Ansys Fluent.

Keywords

Aerodynamics, wind tunnel, CFD.

1 ÚVOD

Modelování proudění kolem nízkých objektů neaerodynamických tvarů přináší řadu problémů [3], [4] a platí to jak pro numerické tak i fyzikální simulace. Článek má za cíl porovnat výsledky fyzikálního a matematického modelování proudění vzduchu kolem objektu tvaru krychle o hraně 0,24 m. Představuje tzv. Silsoe krychli v měřítku 1:25, která se postupně stala standardizovaným experimentálním prvkem v oboru stavební aerodynamiky. Důvodem této volby je možnost využití vypovídajících dat z měření v tunelu pro posouzení konečných výsledků obou přístupů [1].

V rámci fyzikálního experimentu bylo na pracovišti CET <http://cet.arcchip.cz/> modelováno hladké proudové pole s konstantním vertikálním rychlostním profilem $13,5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ a s intenzitou turbulence cca 1 %. Předmětem vyhodnocení je tlakové zatížení modelu od účinků proudového pole. Je zde definováno bezrozměrným součinitelem vnějšího tlaku c_{pe} , který je dán poměrem statického a dynamického tlaku vztažených k referenčnímu bodu:

¹ Ing. Vladimíra Michalcová, Ph.D., Katedra stavební mechaniky, Fakulta stavební, VŠB-Technická univerzita Ostrava, Ludvíka Poděště 1875/17, 708 33 Ostrava-Poruba, e-mail: vladimira.michalцова@vsb.cz.

² Prof. Ing. Sergej Kuznetsov, Ph.D., ÚTAM AV ČR, v.v.i. Centrum excelence Telč, Batelovská 485, 588 56 Telč, e-mail: kuznetsov@itam.cas.cz.

³ Doc. Ing. Stanislav Pospíšil, Ph.D., ÚTAM AV ČR, v.v.i. Prosecká 809/76, 190 00 Praha 9, e-mail: pospilis@itam.cas.cz.

$$c_{pe,i} = \frac{P_i}{P_{dyn}} = \frac{P_{ci} - P_{ref}}{1/2 \cdot \rho \cdot u_{ref}^2}, \quad (1)$$

kde:

P_{ref} – je statický tlak v referenčním bodu, nejčastěji ve výšce objektu (tady 0,24 m) [Pa],
(zde vyhodnocený 0,74 metrů před objektem),

P_{ci} – výsledný statický tlak na povrchu objektu v i-tem bodu [Pa],

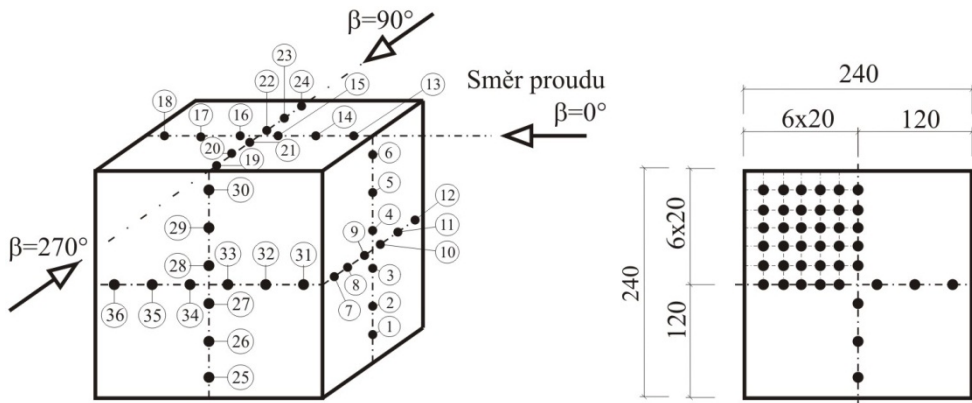
P_i – statický tlak na povrchu objektu v i-tem bodu přepočtený k referenčnímu tlaku [Pa],

u_{ref} – x-ová složka rychlosti v referenčním bodě, nejčastěji ve výšce objektu (tady 0,24 m) [m.s⁻¹],
(zde vyhodnocená 0,74 metrů před objektem),

ρ – hustota vzduchu, $\rho = 1,225$ [kg.m⁻³],

$\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot u_{ref}^2$ – dynamický tlak větru v referenční výšce, nejčastěji ve výšce objektu [Pa].

Součinitel vnějšího tlaku c_{pe} byl změřen, vypočítán a vyhodnocen ve dvou vzájemně kolmých řezech a ve vodorovném řezu. Schéma modelu s 36 odběrovými místy je na obrázku 1.



Obr. 1: Schéma modelu

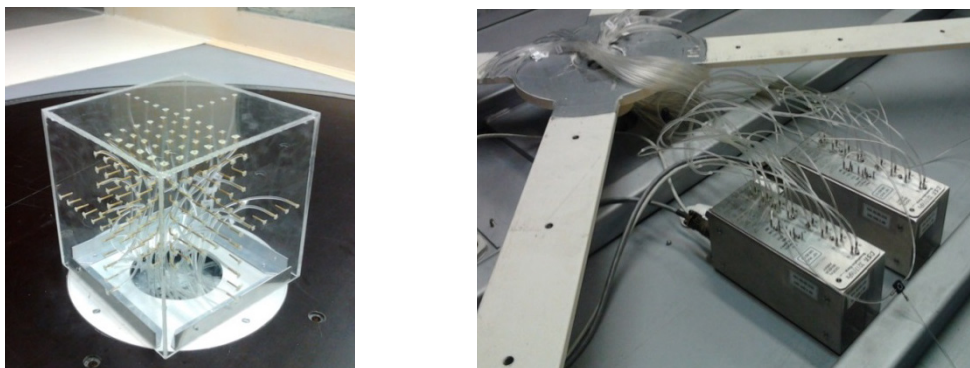
2 FYZIKÁLNÍ EXPERIMENT

Experimenty byly provedeny v klimatickém větrném tunelu Centra Excellence Telč, Ústavu teoretické a aplikované mechaniky AV ČR. Pracovní prostor aerodynamické sekce je obdélníkového průřezu 1,9 m (šířka) × 1,8 m (výška). Celková délka proudovodu aerodynamické části je 11,0 m včetně části pro vývoj turbulentní mezní vrstvy. Je-li potřeba, je simulace mezní vrstvy atmosféry s požadovanými charakteristikami modelována za použití prvků, jako jsou sítě, tzv. Counihanovy generátory, bariéry a podlahové desky s různou drsností.

Model krychle byl umístěn ve středu otočného stolu (průměr 1,76 m) v pracovní části aerodynamické sekce tunelu. Krychle byla vyrobena z průhledného plexiskla s tloušťkou stěny 5 mm, drenážní body mají průměr 0,5 mm a jsou vybaveny konektory tvaru kovové trubičky s vnitřním průměrem 1 mm. Všechny konektory drenážních bodů jsou spojené silikonovou trubičkou (délky 1 m a průměru 2 mm) s měřicím zařízením „Scanivalve Corp DSA 3217“ pro snímání tlaku (obr. 2). Data a převod na digitální hodnoty byly sbírány v systému "DEWETRON" se vzorkovací frekvencí 1 kHz.

Výsledky tlakových součinitelů jsou uváděny jako funkce směru proudění vzduchu $\beta = 0$ až 360° a lze je zapsat jako $c_{pe,i} = f(\beta)$. Interval otáčení modelu kolem svislé osy $\Delta\beta$ byl 10° . Experimenty byly provedeny při Reynoldsově čísle $Re = 2,1 \cdot 10^5$ [-], které odpovídalo rychlosti proudění vzduchu $13,5$ m.s⁻¹.

Data z měření statického tlaku vzduchu, přeměna na elektrický signál i vyhodnocení a zobrazení automatizovaných výsledků bylo zpracováno pomocí vysoce akvizičního systému "DEWETRON". Vzorkovací frekvence senzoru činila 1kHz.



Obr. 2: Model objektu v měřící sekci a detail měřící sekce

3 MATEMATICKÉ MODELOVÁNÍ

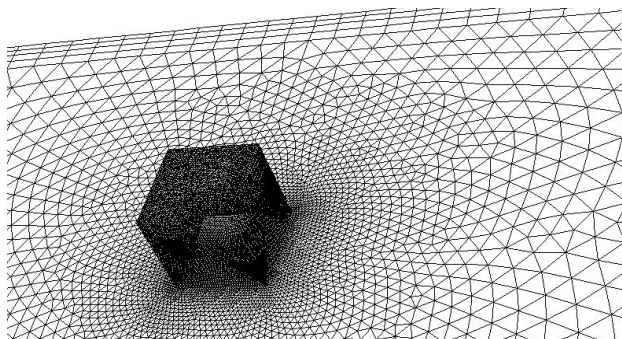
Matematické modely vhodné pro tento typ úlohy lze rozdělit do dvou kategorií:

- RANS modely,
- Modely pro anizotropní turbulenci – RSM, LES a jeho kombinace s RANS modely.

3.1 RANS modely

Jedná se o statistické modely turbulence, které jsou založeny na metodě časového středování (Reynolds Averaged Navier-Stokes equations) veličin turbulentního proudění a na následující proceduře časového středování bilančních rovnic popisujících turbulentní proudění. Využívají tzv. Boussinesquovy hypotézy, která hledá zjednodušené vyjádření Reynoldsových napětí. Pro výpočet úlohy byly použity modely Spalart Allmaras, Standardní k- ϵ , RNG k- ϵ a SST k- ω , které jsou založeny na modelování izotropní turbulence. Vzájemně se od sebe liší v definování tzv. turbulentní dynamické viskozity, veličiny vyjadřující složité funkční závislosti stavu proudící tekutiny a polohy uvažovaného bodu. Výhodou RANS modelů jsou menší nároky na hustotu mřížky výpočtové oblasti, možnost modelování stacionární úlohy a schopnost rychlého výpočtu.

Bohužel pro řešení obtékání konstrukcí neaerodynamických tvarů jsou méně vhodné, neboť v okolí objektu vzniká silná anizotropní turbulence. Výpočtová oblast pro RANS modely byla vytvořena o velikosti 1,9 m (šířka) \times 1,8 m (výška) \times 4,5 m (délka). Sledovaný objekt byl umístěn ve vzdálenosti 1 metr od vstupu do oblasti. K tvorbě sítě zkoumané oblasti se využívá $1 \cdot 10^6$ tetra buněk podle obr. 3, na kterém je zřetelné silné zahuštění v okolí objektu i rovnoměrný podélný pás potřebný pro správné řešení okrajové podmínky na bočních stěnách.

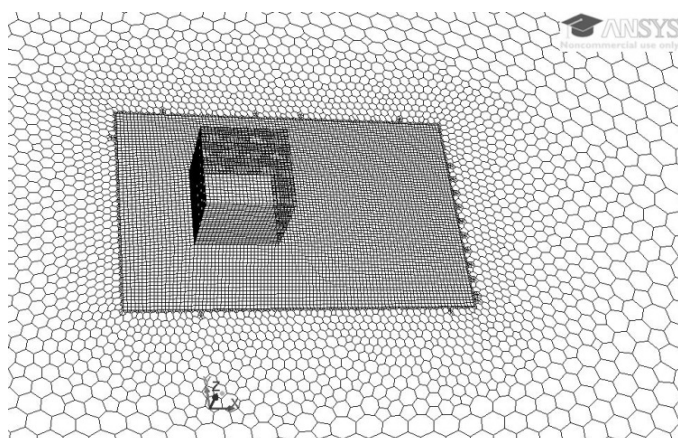


Obr. 3: Tetra mřížka pro RANS a SAS modely - vodorovná rovina v polovině výšky objektu

3.2 Modely pro anizotropní turbulenci

Jsou založeny na principu modelování anizotropní turbulence, což lépe odpovídá zkoumanému ději. Kladou však větší nároky na kvalitu a hustotu sítě, úlohy je nutno řešit nestacionárně a výpočtové časy jsou nesrovnatelně delší. Výjimkou je RSM model. Umožňuje řešit úlohu stacionárně, je však velice citlivý a při jeho používání se vyskytují časté problémy s konvergencí. Pro zde prezentované výpočty nebyl použit. Pro řešení úlohy byly použity nově vyvinuté hybridní modely, které jsou kombinací LES [2], [3] a RANS metody, konkrétně SAS a ELES modely. Správnou kombinací umožňují podstatně snížit počet buněk ve výpočtové oblasti a tím znatelně zrychlit výpočtový čas, přestože předávání veličin na rozhraní oblastí částečně také prodlužuje dobu výpočtu.

ELES modeluje v oblasti neuspořádaného proudového pole (v tomto případě okolí obtékaného objektu) velké vírové struktury přímou simulací (LES), v oblasti, kde lze již očekávat uspořádané izotropní proudění pak RANS metodou. Vyžaduje přesné definování rozhraní, což umožňuje lépe připravit síťování. Pro tento výpočet byla vytvořena nová výpočtová oblast o velikosti 1,9 m (šířka) × 1,8 m (výška) × 5,0 m (délka) s kombinovaným mřížkováním (obr. 4). Základ tvoří polyhedrické buňky. Definovaná oblast v okolí objektu pro přímou simulaci LES metodou je pak tvořena hustým mřížkováním hexagonálními buňkami. Tato oblast o délce 1 m začíná 0,2 m před objektem, její příčné rozměry převyšují obvod obtékané kostky 0,2 m na každé její stěně. Na obrázku 5 je názorný rozdíl v hustotě mřížkování i pozvolný nárůst velikostí polyhedrických buněk s rostoucí vzdáleností od objektu.



Obr. 4: Kombinovaná mřížka pro ELES model

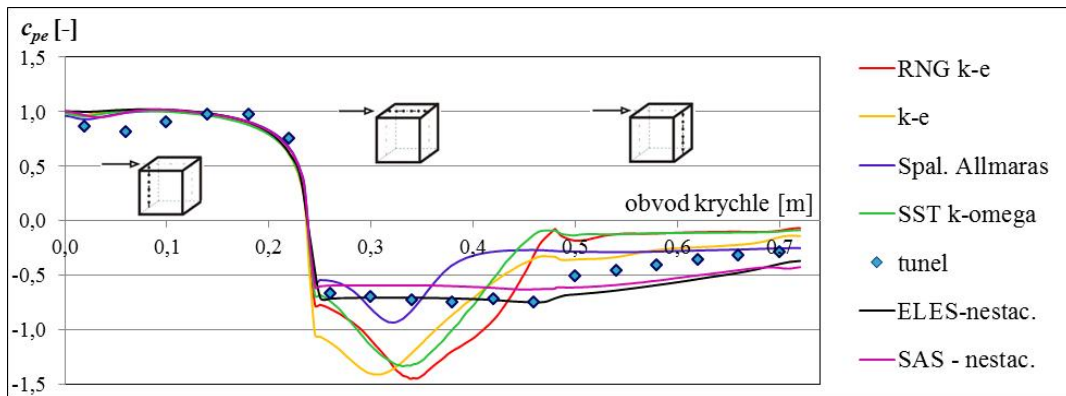
SAS model definuje rozhraní na základě délkového měřítka vírů, v těsné blízkosti stěny se chová jako SST $k-\omega$ model, ve větší vzdálenosti automaticky přechází v LES výpočet. Jeho hranice není nutné zadávat. Při řešení vyla výpočtová oblast shodná s RANS modely (kap.3.1).

3.3 Okrajové podmínky

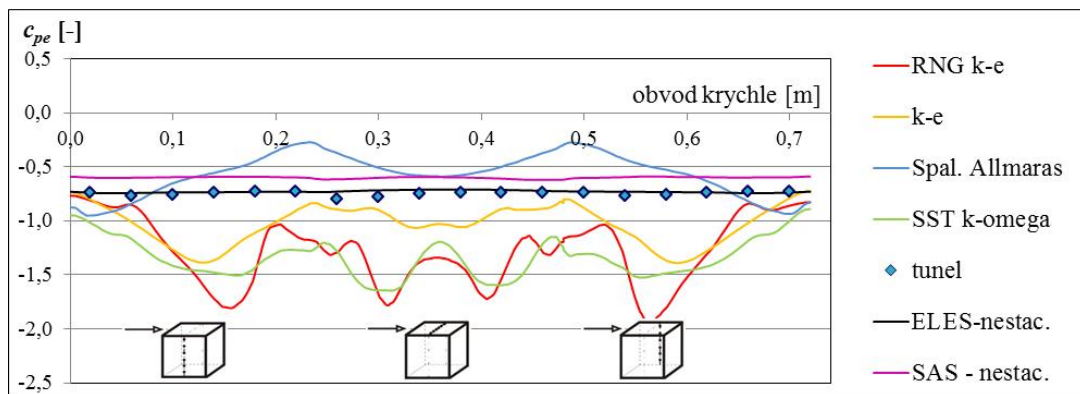
U všech výpočtů byly nastavené shodné typy okrajových podmínek. Na vstupu se jedná o tzv. velocity-inlet, na výstupu je tlaková podmínka pressure-outlet, spodní plocha je prezentována podmínkou wall, což je shodné s modelováním otevřeného prostoru (atmosféry). Okrajové podmínky na obou bocích a horní ploše výpočtové oblasti byly definovány wall, aby odpovídaly ohraničenému prostoru tunelu, což klade další požadavky na tvar mřížky, již zmiňované rovnoměrné rozložení o určité hustotě v okolí stěn (kap.3.1).

4 VÝSLEDKY A JEJICH ZHODNOCENÍ

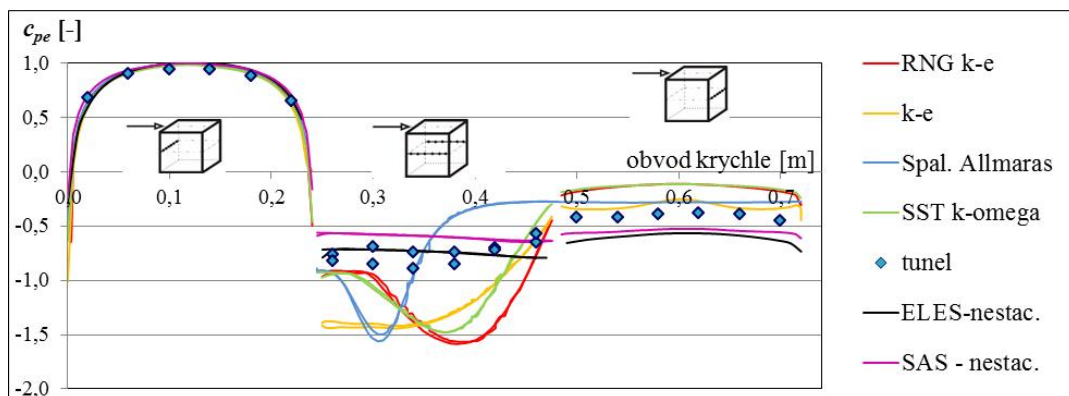
Jak bylo uvedeno výše (kap. 1), součinitel vnějšího tlaku byl změřen, vypočítán a vyhodnocen ve dvou vzájemně kolmých svislých řezech (obr. 5 a 6) a ve vodorovném řezu (obr. 7).



Obr. 5: Hodnoty c_{pe} koeficientu ve svislém podélném řezu



Obr. 6: Hodnoty c_{pe} koeficientu ve svislém příčném řezu



Obr. 7: Hodnoty c_{pe} koeficientu ve vodorovném řezu

Přestože se jedná o proudění s nízkou intenzitou turbulence (1% na vstupu), RANS modely nejsou pro tento typ úlohy vhodné, neboť v okolí objektu, zvláště na jeho bocích a závětrné straně vzniká silně anizotropní turbulence.

Na čelní straně (obr. 5 až 7), kdy zatím nedochází k silnému zavíření, se všechny výpočty shodují s měřením v aerodynamickém tunelu. Markantní rozdíly jsou ve výsledcích tlakového zatížení podél objektu, tedy na bocích a horní stěně. Obrázky 5 až 7, hlavně průběh zatížení v příčném svislém řezu (obr. 7), dokazují nevhodnost RANS modelů pro popis proudového pole. Na závětrné stěně objektu se měřeným hodnotám nejvíce přibližovaly výpočty Spalart Allmaras a Standardním k-ε modelem.

Nestacionárními výpočty ELES a SAS modely bylo dosaženo uspokojivých výsledků. ELES modelem se dokonce podařilo na čelní, horní i obou bočních stěnách získat výsledky téměř shodné s měřením v aerodynamickém tunelu. Na závětrné straně se liší nepatrně.

Nevýhodou nestacionárních výpočtů je jejich náročnost z pohledu přípravy výpočtu (tvar a hustota výpočtové sítě, správné definování časového kroku) i časové náročnosti. U obou nestacionárních úloh byl zvolen časový krok 0,001 sekundy, výpočet simuloval proud po dobu 4 sekundy s tím, že středování veličin bylo nastaveno až po 1 sekundě simulovaného děje. Tehdy bylo možné považovat proudové pole za ustálené. Výsledný čas proudu při časovém středování veličin představoval asi osminásobnou výměnu vzduchu ve výpočtové oblasti. V rámci jednoho výpočtu proběhlo asi $4 \cdot 10^4$ iterací.

SAS model správně kopíruje tvar zatěžovací křivky po všech třech sledovaných obvodech obtékané krychle. Malé posunutí by mohlo být odstraněno novou, hustější mřížkou i delším simulovaným časem proudu, což bude předmětem dalšího zkoumání.

5 ZÁVĚR

Řešení tohoto úkolu prokázalo, že obtékání objektu neaerodynamického tvaru je pro modelování, ať již experimentální či matematické, složitý děj a vzájemná spolupráce obou přístupů je nutná. Velice uspokojivou podobnost s experimentem prokázaly výsledky numerické simulace ELES a SAS modely v nestacionárních úlohách.

PODĚKOVÁNÍ

Príspevek byl realizován za finančního přispění z prostředků koncepčního rozvoje vědy, výzkumu a inovací pro rok 2012 přidělených VŠB-TU Ostrava Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy České republiky.

Článek vznikl s podporou projektu CZ.1.05/1.1.00/02.0060, který je spolufinancovaný z Evropského fondu pro regionální rozvoj.

LITERATURA

- [1] RICHARDS, P.J., R.P. HOXEY, B.D. CONNELL a D.P. LANDER. Wind-tunnel modelling of the Silsoe Cube. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics: The Fourth European and African Conference on Wind Engineering*. Vol. 95, 9-11, pp. 1384-1399. ISSN 0167-6105.
- [2] TAMURA, T., A. OKUNO a Y. SUGIO. LES analysis of turbulent boundary layer over steep hill covered with vegetation. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics: The Fourth European and African Conference on Wind Engineering*. Vol. 95, 9-11, pp. 1384-1399. ISSN 0167-6105.
- [3] ZHANG, Y.Q., A.H. HUBER, S.P.S. ARYA, W.H. SNYDER. Numerical simulation to determine the effects of incident wind shear and turbulence level on the flow around a building. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics: Proceedings of the 1st International Conference on Computational Wind Engineering*. Vol. 93, 46-47, pp. 129-134.
- [4] ZHANG, A., M. GU. Wind tunnel test and numerical simulations of wind pressures on buildings in staggered arrangement. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics: 4th International Symposium on Computational Wind Engineering (CWE2006)*. Vol.96, iss. 10-11, pp. 2067-2079.

Oponentní posudek vypracoval:

Prof. RNDr. Milada Kozubková, CSc., Katedra hydromechaniky a hydraulických zařízení, Fakulta strojní, VŠB-TU Ostrava.

Prof. Ing. Jozef Melcer, DrSc., Katedra stavebnej mechaniky, Stavebná fakulta, ŽU v Žiline.

David MIKOLÁŠEK¹, Oldřich SUCHARDA², Jiří BROŽOVSKÝ³

NUMERICKÁ ANALÝZA PROLAMOVANÉHO NOSNÍKU

NUMERICAL ANALYSIS OF CASTELLATED BEAM

Abstrakt

Příspěvek se zabývá modelováním chování prolamovaného nosníku. Ve výpočtech je zohledněna imperfekce. Výpočty zahrnují konečněprvkové modely a normový výpočet. Hlavním cílem příspěvku je provedení případové studie pro určení součinitelů klopení a popis průběhu napětíových stavů na profilu.

Klíčová slova

Prolamovaný nosník, klopení, metoda konečných prvků, výpočetní modely.

Abstract

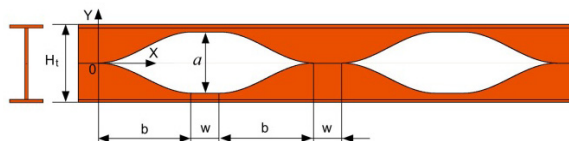
This paper deals with modeling of the behavior of castellated beam. The calculations also take into account the imperfections. The solution incorporates finite element models and standardized calculation. The main contribution is to undertake case studies to determine the coefficients of lateral-torsional buckling and description of the stress state of the profile.

Keywords

Castellated beam, lateral-torsional buckling, finite element analysis, computational model.

1 ÚVOD

V dnešní době nových technologických možností ve výrobě ocelových profilů je možné vytvářet rozmanité tvary ocelových nosníků. Toto vede k značným odlišnostem v přístupech k výpočtu těchto nově vzniklých nosných prvků, protože norma neposkytuje plný popis chování těchto ocelových profilů. Samotné problematice numerického modelování, zejména pak pomocí metody konečných prvků, se věnuje celá řada autorů [12, 13, 14].



Obr. 1: Obecná geometrie prolamovaného nosníku Angelina [1]

¹ Ing. David Mikolášek, Ph.D., Katedra stavební mechaniky, Fakulta stavební, VŠB-Technická univerzita Ostrava, Ludvíka Podéště 1875/17, 708 33 Ostrava-Poruba, tel.: (+420) 597 32 1391, e-mail: david.mikolasek@vsb.cz.

² Ing. Oldřich Sucharda, Ph.D., Katedra stavební mechaniky, Fakulta stavební, VŠB-Technická univerzita Ostrava, Ludvíka Podéště 1875/17, 708 33 Ostrava-Poruba, tel.: (+420) 597 321 391, e-mail: oldrich.sucharada@vsb.cz.

³ Doc. Ing. Jiří Brožovský, Ph.D., Katedra stavební mechaniky, Fakulta stavební, VŠB-Technická univerzita Ostrava, Ludvíka Podéště 1875/17, 708 33 Ostrava-Poruba, tel.: (+420) 597 321 321, e-mail: jiri.brozovsky@vsb.cz.

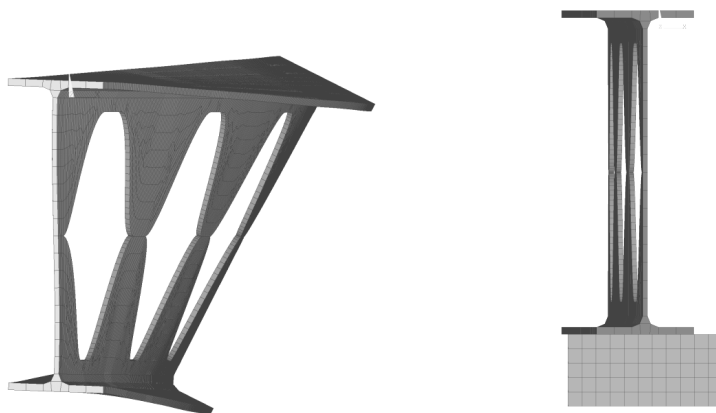
Dále se modelováním a analýzou distorze prolamovaných nosníků zabývá [15]. Používají se také dřevěné prolamované nosníky [6]. Pružnoplastické analýze prolamovaných nosníků se věnuje [10], v některých případech je možné při analýze využít také neuronové sítě [5]. Z těchto důvodů je vhodné využít numerické analýzy. Příspěvek má za cíl stanovit pro vybraný prolamovaný nosník [8] hodnoty součinitelů klopení a najít způsob modelování atypických prolomených nosníků tak, aby bylo možno tyto vztahy a doporučení použít pro širší spektrum nestandardních ocelových prolamovaných nosníků. Provedené modely jsou počítány pouze numericky a kontrolovány normovými postupy [2, 3, 4] a pomoci základních vztahů pružnosti a statiky.

2 POPIS PROLAMOVANÝCH OCELOVÝCH NOSNÍKŮ

Prolamovaný nosník zobrazený na obr. 1 byl řešen jako staticky určitá konstrukce prostého nosníku. V případě testování vzájemného spolupůsobení ohybového momentu a posouvající síly jako konzola. Tento prolamovaný nosník vychází z výrobní řady firmy ArcelorMittal a jeho hlavní výhodou je velikost prostupů ve stojině nosníku. Tato skutečnost je výhodná zejména pro rozvod instalací pod stropní konstrukcí. Pro numerické modely a jejich modifikace byl vybrán jeden typ tvaru výřezu ve stojině a jeden původní válcovaný profil IPE 270 oceli S235 tvořící základní hmotu prolamovaného nosníku.

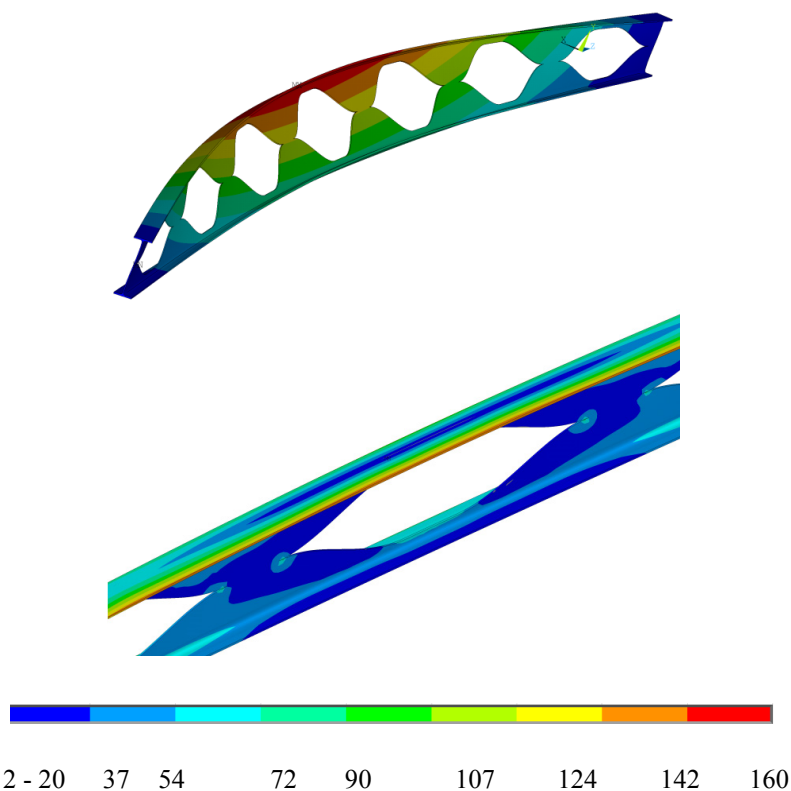
3 NUMERICKÝ VÝPOČET

Prostorový výpočetní model prolamovaného nosníku tvoří 3D objemové konečné prvky SOLID45 v konečně-prvkovém softwaru ANSYS [7], kdy výpočetní model má celkově 21 907 konečných prvků a 34 319 uzlů pro konzolu a 18 027 konečných prvků a 37 432 uzlů pro nosník. Při výpočtech je zohledněna geometrická, fyzikální a konstrukční nelinearita. Použité kontaktní prvky u modelů zohledňující konstrukční nelinearitu jsou použity CONTA174 a TARGE170 [7]. Fyzikální nelinearita je zohledněna u oceli pružnoplastickým modelem s lineárním zpevněním. Výpočetní model konzoly prolamovaného nosníku pro konečně-prvkovou analýzu je patrný z obr. 2 a 3. Obdobně byl vytvořen také prostorový výpočetní model v programu SCIA [11], kdy konečné prvky byly skořepinové.



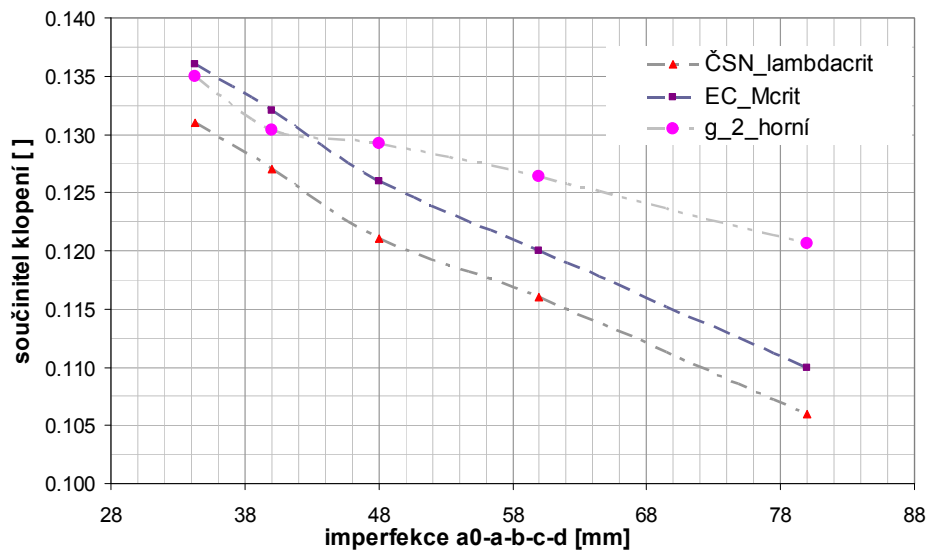
Obr. 2: Imperfekttní výpočetní modely prolamovaného nosníku typ Angelina

Na obrázku 2 je k nahlédnutí imperfekttní geometrie prolamovaného nosníku. Tato geometrická imperfekce, levý obrázek 2, byla zvolena jako první vlastní stabilitní tvar od spojitého destabilizujícího zatížení na horní pás po délce nosníku. Tento tvar vybočení nezajištěné tlačené pásnice odpovídá tvaru klopení vidlicově uloženého prostého nosníku otevřeného průřezu. Na druhém obrázku 2 vpravo je imperfekce geometrie volena jako půlvlna funkce sinus.



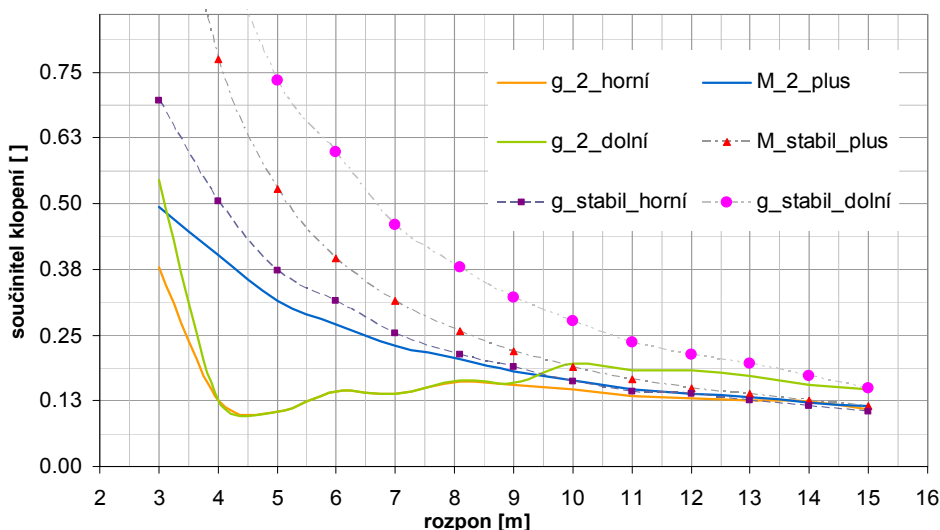
Obr. 3: Napětí von Misses [MPa]

Geometrie prostorového výpočetního modelu nosníku je zobrazena na obr. 3, kdy barevná stupnice zobrazuje napětí von Misses, pro výpočet zohledňující 2. řád, pro destabilizující zatížení na horní pásnici. K vybočení dojde při 160 MPa. Horní obrázek znázorňuje deformaci při klopení.



Obr. 4: Součinitel klopení prolamovaného nosníku pro rozpětí 12 m ($\gamma_{M1}=1$)

Výsledné hodnoty součinitele klopení byly spočteny pro různé hodnoty návrhové imperfekce ve tvaru počátečního prohnutí e_0/L na obr. 4. V grafu jsou křivky pro normový výpočet a numerický výpočet u prolamovaného nosníku délky 12 m. Rozdíl jednotlivých výpočtů je malý. Normový postup je v převážné části výpočtu mírně konzervativnější než numerický výpočet.



Obr. 5: Součinitel klopení prolamovaného nosníku v závislosti na volné délce

Výsledné hodnoty součinitele klopení pro jednotlivé varianty výpočtu u nosníku dlouhého 12 m jsou zobrazeny v tab. 1. Dále je na obr. 5 zobrazen graf součinitele klopení pro různé délky (rozpětí) nosníku. V tomto případě je proveden výpočet v programu SCIA [11]. Pro krátké délky prolamovaného nosníku nedochází ke ztrátě stability tlacené pásnice, ale dojde k překročení limitního napětí v místech výřezů v blízkosti podpor. Je to způsobeno posouvající silou, která způsobuje ohybový moment v zúžené části prolamovaného nosníku.

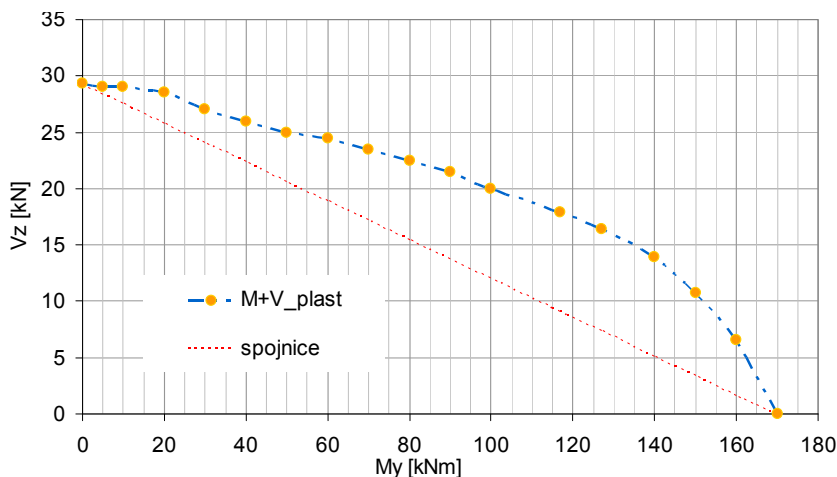
Tab. 1: Součinitele klopení pro nosník délky 12 m

Angelina_12 m	M_{stabil_plus}	$g_{stabil_horní}$	$g_{stabil_dolní}$	M_{2_plus}	$g_{2_horní}$	$g_{2_dolní}$
scia_angelina	0,149	0,138	0,213	0,138	0,129	0,184
ansys_angelina	0,180	0,162	0,241	0,168	0,126	0,213
scia_celý	0,161	0,138	0,230	0,160	0,149	0,201
ansys_celý	0,190	0,179	0,260	0,177	0,175	0,236

sání tažený pás TS_vítr		$g_{stabil_horní}$	$g_{stabil_dolní}$		$g_{2_horní}$	$g_{2_dolní}$
scia_angelina		0,362	0,144		0,246	0,141
ansys_angelina		0,439	0,181		0,305	0,162
scia_celý		0,414	0,176		0,299	0,171

reálné uložení					$g_{2_horní}$	$g_{2_dolní}$
ansys_real					0,136	0,220

Pro dokreslení výstížnosti provedených výpočtů je provedeno vyhodnocení interakce ohybového momentu a posouvající síly na obr. 6, kde výpočetní model konzoly je ze systému ANSYS [7]. Tento typ prolamovaného nosníku Angelina je citlivý na posouvající sílu. Důvodem je jeho malá účinná výška stojiny, což vede k malé únosnosti ve smyku a tím k celkovému snížení únosnosti vlivem kombinace smyku a ohybu ve výřezech ve stojině.



Obr. 6: Interakce ohybového momentu a posouvající síly: Angelina 270 (S235)

4 ZÁVĚR

Příspěvek se zabývá určením součinitelů klopení pro vybraný prolamovaný nosník Angelina, kdy numerické výpočty provedené v programech ANSYS [7] a SCIA [11] byly doplněny o výpočet podle normy. Pro vybraný případ prolamovaného nosníku Angelina byla zjištěna dobrá shoda mezi numerickými modely a normovým výpočtem. U prolamovaného nosníku byly sledovány také napětěvé stavy v oblastech výřezů, kde dochází ke koncentracím napětí. Při modelování konstrukce, u které je cílem zjistit její odezvu na různorodé zatížení a okrajové podmínky uložení, je nutné stanovit správné počáteční imperfekce, velikost konečněprvkové sítě a korektnost vnějších vazeb. Pro stanovení počáteční imperfekce je možné použít normové postupy. Samotný výpočet je u většiny softwarů obdobný a také výsledky jsou velmi podobné. Při řešení komplexní únosnosti ocelových profilů je třeba výpočtový model volit jako skořepinový, protože tak je možné dosáhnout chování bližší reálné konstrukci (prutové modely nejsou schopny ve výpočtu postihnout ztrátu stability vlivem klopení ani torzní ztrátu stability).

Budoucí práce se zaměří na rozšíření studie o další typy nosníku Angelina a na modelování těchto nosníků ve stropních konstrukcích ve spojení s betonem nebo dřevem. Další možný směr výzkumu, který autoři chtějí použít do numerické analýzy je zahrnutí pravděpodobnostního přístupu, podobně jako [9].

Je možné konstatovat, že numerické modelování pomocí komerčního software je vhodnou pomůckou pro zjišťování chování a únosnosti atypických profilů. Norma ne vždy dává vhodný postup pro nalezení reálných součinitelů klopení a vzpěru u atypických průřezů a kombinací materiálů a okrajových podmínek uložení. Proto je zde prostor pro numerické modely, ovšem doplněné o fyzikální testy, které potvrdí správnost těchto matematických modelů a dají konstruktérům určitou jistotu v modelování nestandardních prvků a konstrukcí.

PODĚKOVÁNÍ

Práce byly podporovány z prostředků koncepčního rozvoje vědy, výzkumu a inovací přidělených VŠB-TU Ostrava Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy České republiky pro rok 2013.

LITERATURA

- [1] Angelina TM, ArcelorMittal [online]. 2013 [cit. 2013-05-01]. Dostupný z WWW: <http://www.constructalia.com/english/products/structures/steel_sections_and_merchant_bars/cellular_and_castellated_sections/angelina_tm_castellated_steel_beam_with_sinusoidal_openings>.
- [2] ČSN EN 1993-1-5, Eurokod 3: Navrhování ocelových konstrukcí - Část 1-5: Boulení stěn. Praha: Český normalizační institut, 56 s., 2008.
- [3] ČSN EN 1993-1-6, Eurokod 3: Navrhování ocelových konstrukcí - Část 1-6: Pevnost a stabilita skořepinových konstrukcí. Praha: Český normalizační institut, 88 s., 2008.
- [4] ČSN EN 1993-1-7, Eurokod 3: Navrhování ocelových konstrukcí - Část 1-7: Deskostěnové konstrukce příčně zatížené. Praha: Český normalizační institut, 44 s., 2008.
- [5] GHOLIZADEHA S., PIRMOZB A., ATTARNEJADB R., Assessment of load carrying capacity of castellated steel beams by neural network. *Journal of Constructional Steel Research*. Vol. 67, Iss. 5, 2011, Pp. 770–779.
- [6] HARTE A.M., BAYLOR G., Structural evaluation of castellated timber I-joists. *Engineering Structures*, Vol. 33, Iss. 12, December 2011, Pages 3748–3754.
- [7] Documentation for ANSYS, Release 11, SAS IP, INC., 2007.
- [8] PROCHÁZKA, F. A KOL., *Prvky kovových konstrukcí*, Praha: SNTL, 1972.
- [9] KRIVÝ V., MAREK P., Probabilistic design of steel frame structures, [Zur Probabilistischen Bemessung von Stahlrahmen]. *Stahlbau*, Vol. 76, Iss. 1, January 2007, pp. 12-20.
- [10] LI J., XIANG. J. W., Elastic-Plastic Analysis of the Circle-Castellated Steel Beam Using Finite Element Method. *Advanced Materials Research*, Vol. 422, pp. 854-857, 2011, DOI 10.4028/www.scientific.net/AMR.422.854.
- [11] Scia Engineer [online]. 2012 [cit. 2012-01-01]. Dostupný z WWW: <<http://www.scia-online.com>>.
- [12] SHOWKATI, H., GHANBARI GHAZIJAANI, T., NOORI, A. and ZIRAKIAN, T., Experiments on elastically braced castellated beams. *Journal of Constructional Steel Research*, Vol. 77, pp. 163-172.
- [13] SOLTANI, M.R., BOUCHAÏR, A., MIMOUNE, M., Nonlinear FE analysis of the ultimate behavior of steel castellated beams. *Journal of Constructional Steel Research*, Vol. 70, pp. 101-114.
- [14] WANG, H.-., SHAO, X.-. and LIU, C., Experiment on bearing capacity of steel-concrete composite castellated beams with reinforced rib. *Zhongguo Gonglu Xuebao/China Journal of Highway and Transport*, Vol. 26, Iss. 2, pp. 110-118.
- [15] ZIRAK T., SHOWKATI H., Distortional buckling of castellated beams. *Journal of Constructional Steel Research*, Vol. 62, 2006, 863–871.

Oponentní posudek vypracoval:

Doc. Ing. Martin Psotný, PhD., Katedra stavebnej mechaniky, Stavebná fakulta, STU v Bratislave.

Doc. Ing. Eva Kormaniková, PhD., Katedra stavebnej mechaniky, Stavebná fakulta, TU v Košiciach.

Ivan NĚMEC¹, Rostislav LANG²

NÁVRH POČÁTEČNÍHO TVARU PRO MEMBRÁNOVÉ KONSTRUKCE

DESIGN OF INITIAL SHAPE OF MEMBRANE STRUCTURES

Abstrakt

Tento příspěvek se věnuje otázce navrhování a výpočtu membránových konstrukcí. V teoretické části bude pojednáno o problematice hledání výchozích tvarů, tedy o takzvané teorii form-finding. V praktické části bude prezentován návrh a výpočet membránové konstrukce zastřešení stadionu na konkrétním příkladu. Tato práce byla vypracována s ohledem na záměr firem Dlubal Software, s.r.o. a FEM consulting, s.r.o. vytvořit modul pro hledání výchozích tvarů membránových konstrukcí, jenž by byl následně implementován do softwaru RFEM.

Klíčová slova

Membránové konstrukce, form-finding, počáteční rovnovážný stav, nelineární výpočet, izotropní pole napětí, ortotropní pole napětí.

Abstract

The subject of this article is the question of design and analysis of membrane structures. The first part of this article deals with the problem of form-finding. It is the problem of searching for the initial shape of membrane structure. In the second part of the article, an example of design and analysis of the membrane structure of a stadium roof is presented. This work was carried out with respect to the intention of companies Dlubal Software, s.r.o. and FEM consulting, s.r.o. to create the module for finding initial shapes of membrane structures, which would be consequently implemented to the software RFEM.

Keywords

Membrane structures, form-finding, initial equilibrium state, nonlinear analysis, isotropic stress field, orthotropic stress field.

1 ÚVOD

Při navrhování membránových konstrukcí je určení počátečního tvaru a napjatosti jednou z klíčových otázek. Pro dosažení požadované únosnosti, stability a tvarové stálosti je nutné membránu předejtnout a tím do ní vnést geometrickou tuhost. Orientace radiálních složek předpětí je determinována volenou geometrií konstrukce. Proto u membránových konstrukcí nelze oddělovat samotný návrh tvaru od statické, případně dynamické analýzy [2, 8, 9].

Počáteční rovnovážný stav membránové konstrukce musí zaručit existenci pouze tahových napětí po celou dobu její životnosti. Při žádné kombinaci zatížení nesmí dojít ke vzniku tlakových napětí, jejichž důsledkem by bylo vrásnění, které způsobuje estetické a někdy i statické znehodnocení stavby [5].

¹ Doc. Ing. Ivan Němec, CSc., Ústav stavební mechaniky, Fakulta stavební, Vysoké učení technické v Brně, Veveří 331/95, 602 00 Brno, tel.: (+420) 541 147 373, e-mail: nemec@fem.cz.

² Ing. Rostislav Lang, Ústav stavební mechaniky, Fakulta stavební, Vysoké učení technické v Brně, Veveří 331/95, 602 00 Brno, tel.: (+420) 608 430 487, e-mail: lang.r@fce.vutbr.cz.

Vlastní tíha membrány je velice nízká a proto příliš nepřispívá ke stabilizaci tvaru, jak tomu může být například u betonových konstrukcí. V procesu hledání počátečního rovnovážného stavu membránové konstrukce tak obvykle vytváříme tvar prostřednictvím požadavku na výsledné napětí [4, 6].

V souvislosti s touto skutečností vznikla takzvaná „teorie mýdlových bublin“ (obr. 1), která vychází z hledání takové plochy mezi danými hranicemi, jejíž povrch je minimální [3]. Takovýto tvar má totiž speciální vlastnost, kterou je jeho izotropní předpětí. Pro mnoho případů je tato varianta velice výhodná, protože vykazuje značnou geometrickou tuhost. Na tuto souvislost ve své práci [1] poukázal průkopník v oblasti navrhování membránových konstrukcí Frei Otto.

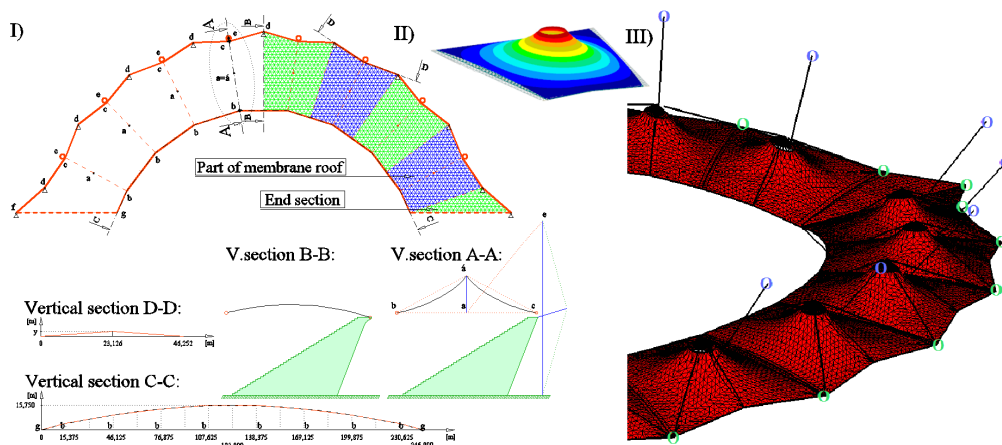


Obr. 1: Geometrické tvary mýdlových bublin mezi tuhými hranicemi, vizualizace katenoidu (vpravo)

Jsou však i takové případy, ve kterých tento požadavek vede k chybnému řešení a je nutné najít jiný vhodný tvar. K tomu účelu využíváme předepisování anizotropního (často ortotropního) pole napětí, jehož výsledkem je jiný vhodný tvar membránové konstrukce. Samotný požadavek výsledného napětí je tedy řídicím parametrem navrhování tvaru [7].

2 NÁVRH A VÝPOČET MEMBRÁNOVÉ KONSTRUKCE ZASTŘEŠENÍ STADIONU

Cílem praktické části tohoto příspěvku byl návrh a výpočet membránové konstrukce zastřešení stadionu, který měl ověřit možnosti programu RFEM generovat výchozí tvary těchto konstrukcí a dále navrhnout potřebné úpravy tohoto softwaru. Při návrhu níže prezentované konstrukce bylo nutné uvažovat jak konstrukční a dispoziční, tak i estetické požadavky na uvažovanou stavbu. Vysoká pozornost byla nejdříve věnována návržení nosného lanového systému a následně samotné membráně, kterou tento lanový systém vynáší.



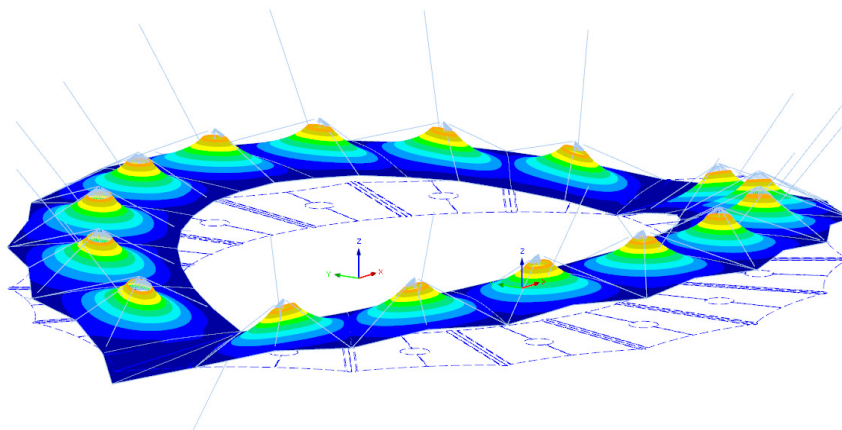
Obr. 2: I) Půdorysné statické schéma jedné poloviny zastřešení stadionu, II) Opakující se motiv výsledného tvaru, III) Část globálního modelu membránové střechy

Lanový systém musí zajišťovat jak potřebné statické požadavky, tak i nerušený výhled diváka z tribun. Lanový systém je proto vynášen na vně stojící sloupy. Potřebné vlastnosti zajišťují vhodně navržené křivosti lan a míra jejich předpětí.

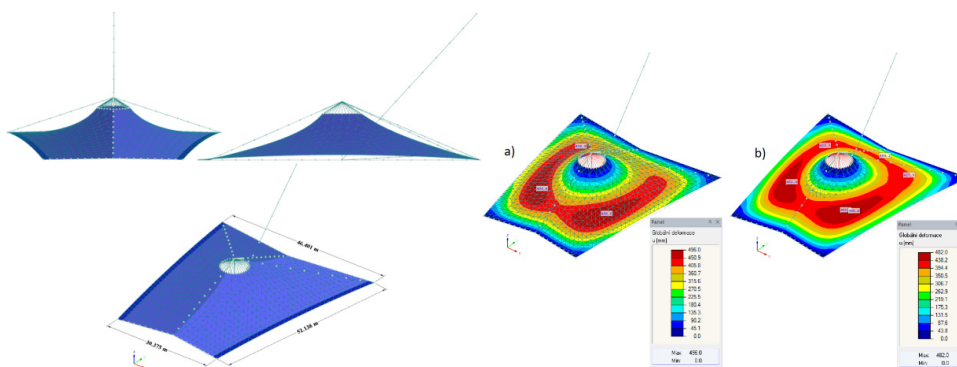
Na obr. 2 vlevo je prezentováno půdorysné statické schéma jedné poloviny zastřešení stadionu. V této konstrukci se opakuje motiv, který je znázorněn uprostřed obr. 2. V pravé části tohoto obrázku je dále prezentována část globálního modelu, kde zelené kružnice znázorňují kotvení vnějších lan do obvodového pláště tribun a modré kružnice znázorňují vrcholy vně stojících sloupů.

Po dokončení návrhu nosného lanového systému byl hledán vhodný tvar samotné membrány, a to nejprve na fragmentu plochy, dále pak analogicky na celém modelu. Membrána je tvořena z šestnácti kuželových tvarů, které jsou umístěny vedle sebe (obr. 3). Tyto kuželové tvary jsou poměrně ploché, a proto je zde požadavek minimalizace plochy relevantní.

Tvar membrány byl generován následovně. Membrána byla nejprve vymodelována v rovině, následně došlo k převýšení vnitřní hranice a aplikaci značné míry předpětí. Tvar se ustálil právě v poloze minimální plochy, což bylo možné ověřit existencí izotropního pole napětí. Jak vnucená deformace, tak aplikace smršťení sloužily pouze k nalezení výchozího tvaru a nemají žádnou souvislost s požadavkem na výsledné napětí, či posuzováním konstrukce. Po vygenerování tohoto tvaru byly převzaty uzlové souřadnice a odstraněno veškeré napětí, což v důsledku vedlo k jisté simulaci form-finderů. Po převzetí tvaru síť konečných prvků bylo do membrány vneseno požadované předpětí.

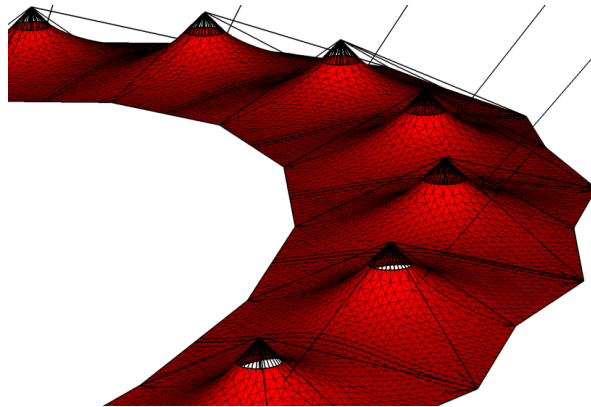


Obr. 3: Globální model membránové konstrukce



Obr. 4: Tvar síť konečných prvků, prezentovaný na jedné šestnáctině membránové konstrukce (vlevo); Deformace při zatížení sněhem, či větrem prezentovány na jedné šestnáctině modelu (vpravo)

Model byl dále podroben statické analýze. Na obr. 4 vpravo je prezentována deformace fragmentu konstrukce v důsledku zatížení. Na obr. 5 je pak prezentována část výpočtového modelu.



Obr. 5: Část globálního modelu membránové konstrukce

3 ZÁVĚR

Na uvedeném modelu byly otestovány možnosti programu RFEM generovat výchozí tvar pro membránové konstrukce. V tomto ohledu byla prokázána možnost generování dobrých tvarů membrán s izotropním předpětím pomocí uvedeného programu. Možnosti generování tvarů pro jiné předpětí jsou zatím omezené.

Dále byla provedena podrobná analýza nezbytných úprav k vytvoření modulu pro form-finding na základě studie nejnovějších poznatků z této oblasti.

LITERATURA

- [1] OTTO, F., RASCH, B. Finding Form. 1st ed. Exeter : Axel Menges, 1996. 240pp. ISBN 978-3930698660.
- [2] NĚMEC, I., et al. Finite Element Analysis of Structures : Principles and Praxis. 1st ed. Aachen : Shaker Verlag, 2010. 636 pp. ISBN 978-3-8322-9314-7.
- [3] DIERKES, U., HILDEBRANDT, S., KÜSTER, A., WOHLRAB, O. Minimal surfaces I : Boundary value problems. 1st ed. Berlin : Springer-Verlag, 1992. 420 pp. ISBN 3-540-53169-6.
- [4] PIMENTA, P. M., WRIGGERS, P. New Trends in Thin Structures: Formulation, Optimization and Coupled Problems. 1st ed. Wien : Springer, 2010. 225 pp. ISBN 3-7091-0230-8.
- [5] OÑATE, E., KRÖPLIN, B. Textile Composites and Inflatable Structures. 1st ed. Dordrecht : Springer, 2005. 329 pp. ISBN 9048168341.
- [6] OÑATE, E., et al. Textile Composites and Inflatable Structures II. 1st ed. Dordrecht : Springer, 2007. 272 pp. ISBN 1402068557.
- [7] WALL, W. A., BLETZINGER, K. U., SCHWEIZERHOF, K. Trends in Computational Structural Mechanics. Barcelona : CIMNE, 2001. 772 pp. ISBN 84-89925-77-1.
- [8] BLETZINGER, K. U., WÜCHNER, R., DAOUD, F., CAMPRUBÍ, N. Computational methods for form finding and optimization of shells and membranes. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2004, 194. Nr. 30-33, pp. 3438–3452. ISSN 0045-7825.
- [9] BLETZINGER, K.U., RAMM, E. Structural optimization and form finding of light weight structures. Computers & Structures. 2001, 79. Nr. 22-25, pp. 2053-2062. ISSN 0045-7949.

Oponentní posudek vypracoval:

Doc. Ing. Martin Psotný, PhD., Katedra stavebnej mechaniky, Stavebná fakulta, STU v Bratislave.

Ing. Mikolášek David, Ph.D., Katedra stavební mechaniky, Fakulta stavební, VŠB-TU Ostrava.

Ivan NĚMEC¹, Šárka SYCHROVÁ²

PARAMETRICKÁ STUDIE ODEZVY KONTEJNMENTU
NA ZATÍŽENÍ NÁRAZEM LETADLA

PARAMETRIC STUDY OF THE STRUCTURAL RESPONSE
OF NPP CONTAINMENT TO IMPACT LOADING

Abstrakt

Prezentovaný článek je příspěvkem k celosvětové diskusi týkající se bezpečnosti jaderných elektráren, která zesílila po katastrofě v JE Fukushima Daiichi. Byla provedena parametrická studie pro různé materiály, tloušťky stěny kontejnmentu a různé rychlosti letadla před nárazem. Cílem práce bylo stanovení rozsahu poškození různých variant konstrukce kontejnmentu. Pro účely vyhodnocení poškození konstrukce byla sledována maximální trvalá deformace a rozsah plastického přetvoření kontejnmentu. Dalším cílem práce bylo ověření možnosti použití explicitní metody pro analýzu rychlých dynamických jevů v programu RFEM.

Klíčová slova

Explicitní metoda, náraz letadla, metoda konečných prvků, rozsah poškození, nelineární dynamika, RFEM.

Abstract

The presented article is a contribution to the discussion concerning nuclear safety which has intensified after the Fukushima Daiichi nuclear disaster. A parametric study concerning various materials, containment wall thicknesses and different aircraft speeds before impact was performed. Containment damage was evaluated by means of the value of permanent deformation and plastic strain extent. The purpose of this study was also to foster experiential suggestions for improving the explicit method in the RFEM program in order to release it for RFEM users.

Keywords

Explicit method, damage extent, finite element method, plane impact, nonlinear dynamics, RFEM.

1 ÚVOD

Po havárii v jaderné elektrárně Fukushima Daiichi způsobené zemětřesením a následnou vlnou tsunami celosvětově došlo ke zvýšení zájmu o problematiku bezpečnosti jaderných elektráren. Příkladem může být příspěvek J. Králíka [1]. Předložený článek může být příspěvkem k tomuto celosvětově diskutovanému tématu. V článku jsou prezentovány výsledky parametrické studie zaměřené na míru poškození kontejnmentu jaderné elektrárny v důsledku nárazu letadla do této konstrukce. Provedená studie měla zároveň prokázat možnost využití softwaru RFEM pro analýzu rychlých dynamických jevů.

¹ Doc. Ing. Ivan Němec, CSc, Ústav stavební mechaniky, Fakulta stavební, Vysoké učení technické v Brně, Veveří 95; 602 00, Brno, tel.: (+420) 541 147 373, e-mail: nemec@fem.cz.

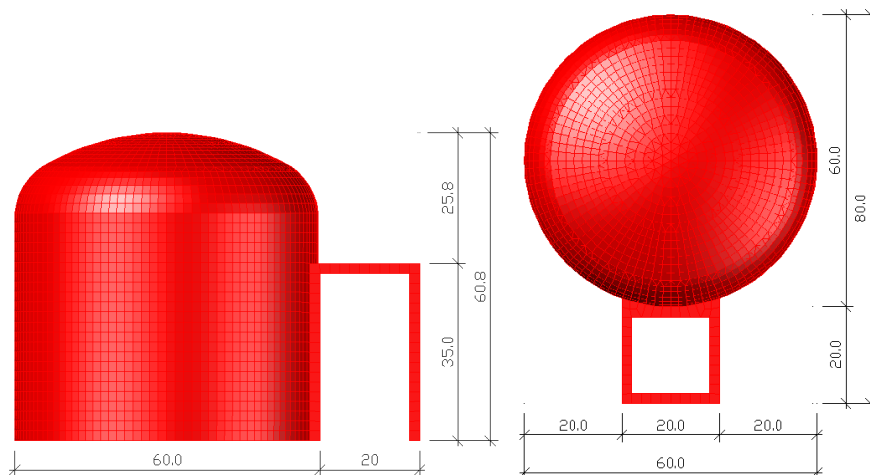
² Ing. Šárka Sychrová, Insti Ústav stavební mechaniky, Fakulta stavební, Vysoké učení technické v Brně, Veveří 95; 602 00, Brno, tel.: (+420) 541 147 373, e-mail: sychrova@fem.cz.

2 VÝPOČETNÍ MODEL LETADLA A KONTEJNMENTU

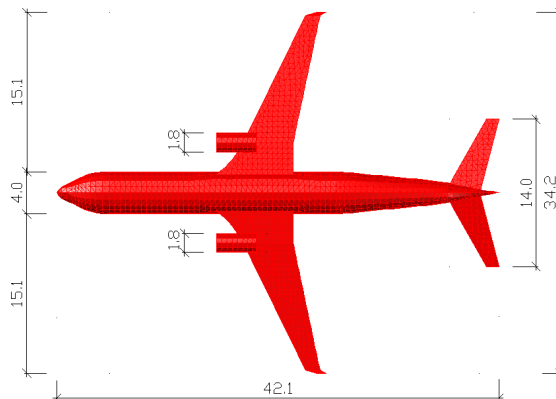
Tvar modelu konstrukce kontejnmentu byl odvozen od kontejnmentu JE Bushehr v Íránu. Rozměry byly zvoleny na základě dat nalezených v odborné literatuře [2] a [3]. Model dopadajícího letadla byl inspirován Boeingem 737-900, což je největší model nejrozšířenějšího dopravního letadla na světě. Výpočetní model letadla je tvořen skořepinovými prvky se šesti stupni volnosti. Vzhledem k tomu, že předmětem studie nebyla analýza vlastního letadla, ale kontejnmentu, nebyla konstrukce letadla, ani jeho vnitřní zařízení modelováno podrobně. Pro výpočet poškození kontejnmentu bylo podstatné dodržet hybnost letadla tak, aby odpovídala vzletové hmotnosti a průměrné nebo maximální rychlosti nejrozšířenějšího dopravního letadla. Model konstrukce kontejnmentu byl vytvořen ve dvou materiálových variantách: ocelový a železobetonový. Materiálový model oceli byl zvolen jako elasto-plastický s von Misesovou podmínkou plasticity. Pro výpočet železobetonového modelu byl použit materiálový model s „rozetřenými“ trhlkami (smeared crack model).

Tloušťka stěny kontejnmentu byla zadána jako konstantní a byla v případě železobetonového kontejnmentu volena z intervalu od 0,6 m do 1,8 m a v případě ocelového kontejnmentu z intervalu od 0,05 do 0,14 m. Uvedené intervaly obsahují používané tloušťky konstrukcí kontejnmentu, které jsou doplněny o extrémy na obou stranách tak, aby byla představa o vlivu tloušťky, rychlosti letadla před nárazem a volbě materiálu na rozsah poškození co možná nejkompaktnější.

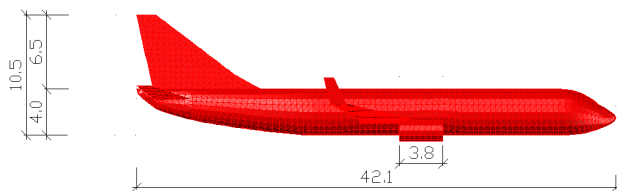
Rychlost letadla před nárazem 500 km/h byla zvolena pro simulaci náhodného nárazu a rychlost 876 km/h (maximální rychlost Boeingu 737) měla představovat úmyslný náraz.



Obr. 1: Tvar a rozměry modelu kontejnmentu



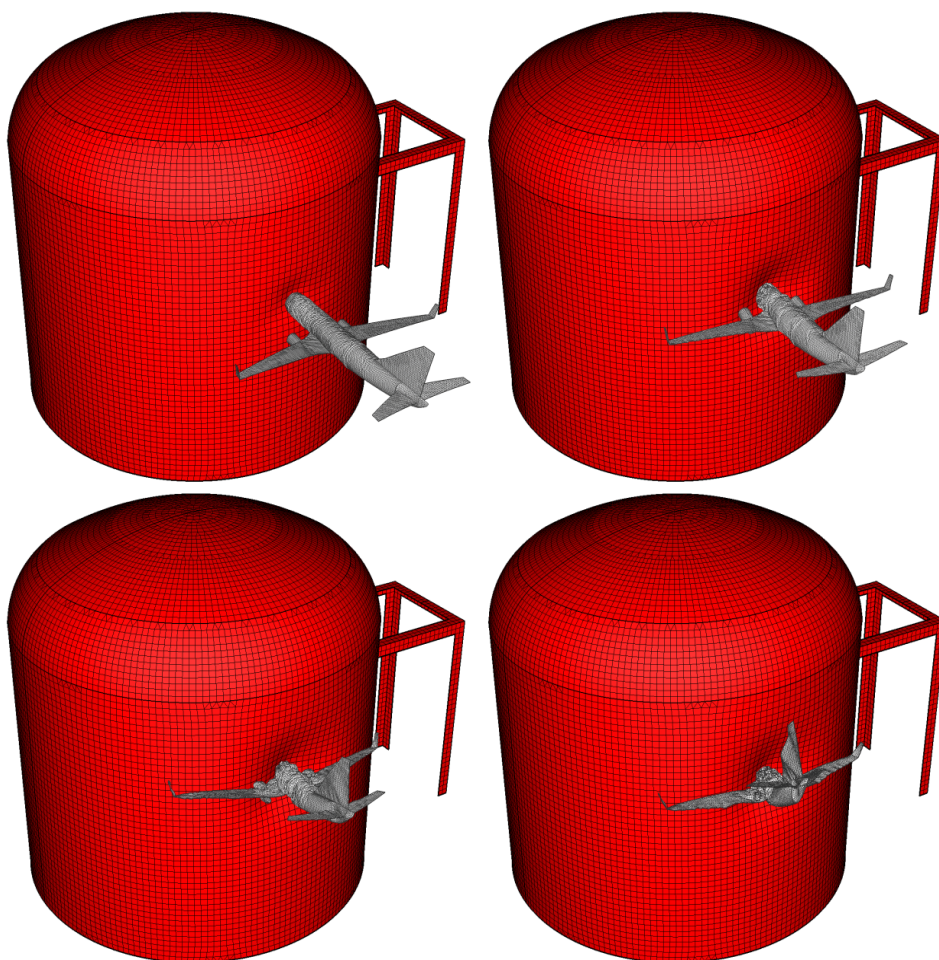
Obr. 2a: Tvar a rozměry modelu letadla



Obr. 2b: Tvar a rozměry modelu letadla

3 METODA ŘEŠENÍ

Úloha byla řešena explicitní metodou konečných prvků [4] - [6] v programu RFEM. Studie nárazu byla rozdělena do dvou fází, ve kterých vystupovaly oba modely (letadlo a kontejnment) samostatně. Nejprve byla provedena analýza nárazu letadla do tuhé stěny. Výsledky této analýzy představovaly vstupy (velikost a doba působení zatížení na kontejnment) do druhé fáze studie. Průběh nárazu letadla do kontejnmentu je zobrazen na obr. 1, který byl vytvořen z grafických výstupů provedených numerických simulací.



Obr. 3: Ilustrativní zobrazení průběhu nárazu letadla do železobetonového kontejnmentu

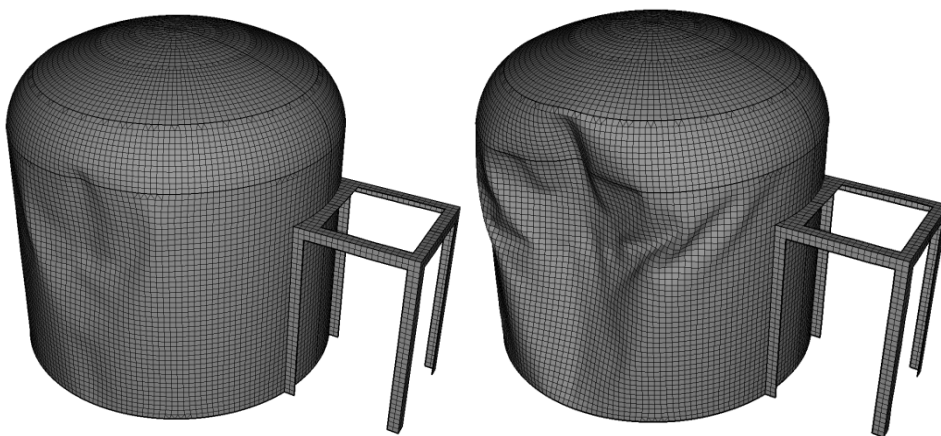
4 POŠKOZENÍ KONTEJNMENTU

Pro účely vyhodnocení poškození kontejnmentu byla sledována velikost maximální trvalé deformace a rozsah plastického přetvoření jednotlivých typů kontejnmentů. Hodnoty sledovaných veličin pro různé tloušťky stěny kontejnmentu jsou pro obě materiálové varianty i pro obě rychlosti letadla před nárazem uvedeny v tab. 1 a 2.

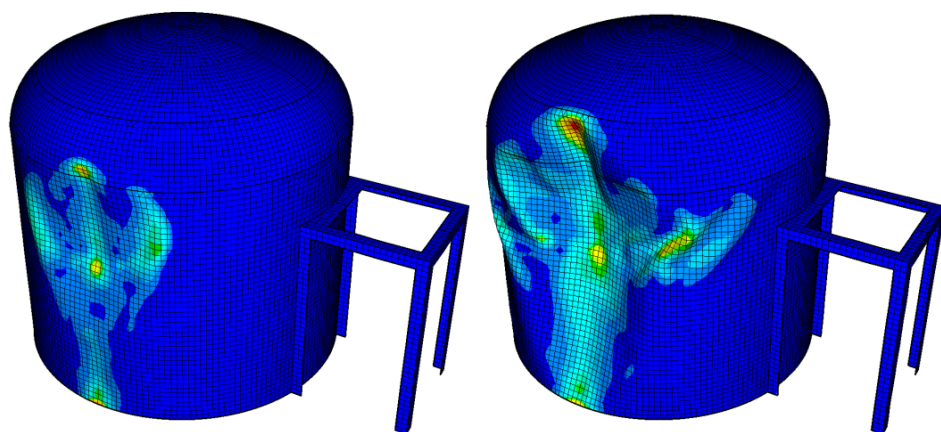
Tab. 1: Poškození ocelových kontejnmentů

	Tloušťka stěny [m]	0,05	0,08	0,10	0,12	0,14
500km/h	Max deformace [m]	2,80+0	1,03E+0	8,71E-1	2,35E-1	1,73E-1
	Plastické přetvoření [-]	2,58E-2	1,80E-2	1,30E-2	7,20E-3	5,10E-3
876km/h	Max deformace [m]	1,03E+1	5,84E+0	4,03E+0	3,27E+0	2,66E+0
	Plastické přetvoření [-]	9,18E-2	5,31E-2	4,36E-2	3,55E-2	3,23E-2

Grafické reprezentace některých výsledků jsou uvedeny na následujících obrázcích.



Obr. 4: Trvalá deformace ocelového kontejnmentu s tloušťkou stěny 0,05 m pro rychlost letadla před nárazem 500 km/h (vlevo) a 876 km/h (vpravo)

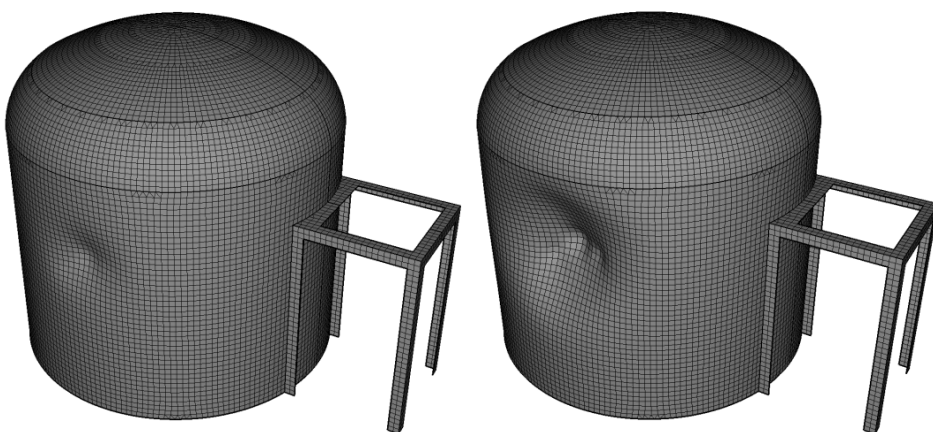


Obr. 5: Rozsah plastického přetvoření ocelového kontejnmentu s tloušťkou stěny 0,05 m pro rychlost letadla před nárazem 500 km/h (vlevo) a 876 km/h (vpravo)

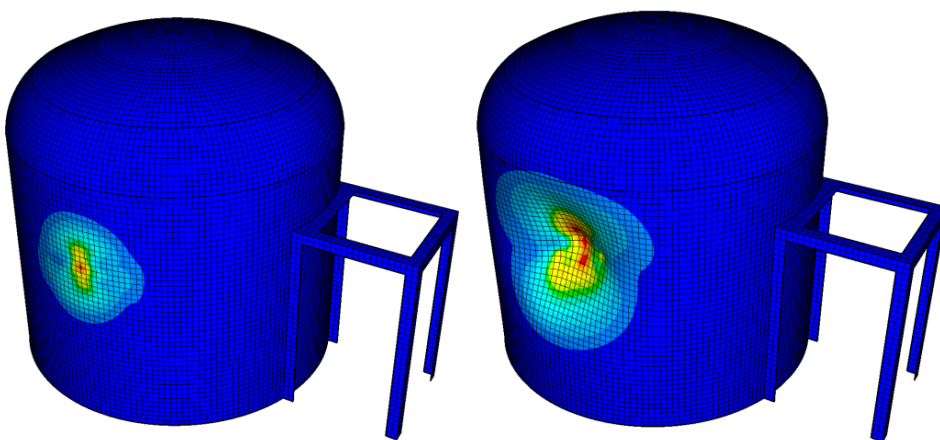
Tab. 2: Poškození železobetonových kontejnmentů

	Tloušťka stěny [m]	0,60	0,80	1,00	1,20	1,40	1,60	1,80
500km/h	Max deformace [m]	2,43E+0	9,90E-1	1,37E-1	1,61E-2	4,01E-3	1,01E-3	2,16E-4
	Plastické přetvoření [-]	1,25E-1	8,00E-2	1,70E-2	2,70E-3	9,40E-4	4,26E-4	1,90E-4
876km/h	Max deformace [m]	8,26E+0	6,06E+0	4,52E+0	3,25E+0	2,07E+0	1,06E+0	4,19E-1
	Plastické přetvoření [-]	2,85E-1	2,65E-1	2,54E-1	2,40E-1	1,88E-1	1,27E-1	6,40E-2

Grafické reprezentace některých výsledků jsou uvedeny na následujících obrázcích.



Obr. 6: Trvalá deformace železobetonového kontejnmentu s tloušťkou stěny 0,6 m pro rychlost letadla před nárazem 500 km/h (vlevo) a 876 km/h (vpravo)



Obr. 7: Rozsah plastického přetvoření železobetonového kontejnmentu s tloušťkou stěny 0,6 m pro rychlost letadla před nárazem 500 km/h (vlevo) a 876 km/h (vpravo)

5 ZÁVĚR

V článku byla představena parametrická studie rozsahu poškození typického kontejnmentu jaderné elektrárny, které bylo způsobeno nárazem běžného dopravního letadla.

Pro rychlost letadla před nárazem o velikosti 500 km/h byly u železobetonových kontejnmentů s tloušťkou stěny větší než 1,40 m zjištěny zanedbatelné hodnoty trvalého přetvoření. Naopak u železobetonových kontejnmentů s tloušťkou stěny menší než 1 m bylo zjištěno značné trvalé poškození. Na vnitřním a vnějším povrchu železobetonových kontejnmentů byly získány hodnoty přetvoření s opačným znaménkem, přičemž záporné hodnoty převažovaly. Lze tedy usuzovat, že i v případech, kdy by došlo k rozvoji trhlin na povrchu železobetonové skořepiny, průřez v oblasti střednicové plochy by zůstal neporušený. Nicméně pro potvrzení této hypotézy bude nutné provést detailnější studii se zahrnutím lokalizace trhlin a podrobným modelem výztuže.

U ocelových kontejnmentů pro rychlost letadla před nárazem o hodnotě 500 km/h bylo u všech analyzovaných variant tloušťky konstrukce zjištěno plastické přetvoření. Nicméně maximální zjištěná hodnota plastického přetvoření pro tuto rychlost letadla před nárazem do kontejnmentu by neměla vést k protržení oceli za daných předpokladů. Vzhledem k tomu, že analýza byla provedena bez zohlednění vlivu rychlosti zatěžování na materiálové charakteristiky, lze uvedené výsledky považovat pouze za přibližné.

Rozsah poškození ocelových i železobetonových konstrukcí pro rychlost letadla před nárazem o hodnotě 876 km/h byl dle očekávání výrazně větší. Ani v tomto případě by ovšem u ocelových ani železobetonových kontejnmentů za daných předpokladů pravděpodobně nedošlo k protržení pláště konstrukce.

Prezentovaná studie dokazuje možnost použití programu RFEM pro nelineární analýzu rychlých dynamických jevů. Výsledky parametrické studie by bylo možné použít při odhadu poškození stávajících konstrukcí podobného typu nebo při navrhování nových konstrukcí především ve fázi předběžného návrhu.

LITERATURA

- [1] KRÁLIK, J., *Stress Test of the NPP Safety in Slovakia after Accident in Fukushima*, Modelování v mechanice 2012, Ostrava, pp. 11-13, ISBN 978-80-248-2694-3.
- [2] R. OECD/NEA Group of Experts, *SOAR on Containment Thermalhydraulics and Hydrogen Distribution, report of OECD/NEA*, June 1999, <http://www.oecd-nea.org/nsd/docs/1999/csni-r99-16.pdf>, page 17-48.
- [3] FHESSHEIMER, M. F., DAMERON, R. A., *Containment Integrity Research at Sandia National Laboratories: An Overview*, July 2006, page 32-49.
- [4] NĚMEC I., et al., *Finite Element Analysis of Structures - Principles and Praxis*, 1st ed., Shaker Verlag, Aachen, 2010, ISBN 978-3-8322-9314-7, page 469-578.
- [5] BITTNER, Z. ŘEŘIČKA, P., *Metoda konečných prvků v dynamice konstrukcí*, 1st ed., Státní nakladatelství technické literatury, Praha, 1981, pp. 257.
- [6] BELYTSCHKO, T., LIU, W. K., MORAN, B., *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*, John Wiley & Sons Ltd., 2000, page 309-317.

Oponentní posudek vypracoval:

Prof. Ing. Juraj Králik, PhD., Katedra stavebnej mechaniky, Stavebná fakulta, STU v Bratislave.

Ing. Kološ Ivan, Ph.D., Katedra stavební mechaniky, Fakulta stavební, VŠB-TU Ostrava.

Hana ŠIMONOVÁ¹, Ivana HAVLÍKOVÁ², Zbyněk KERŠNER³

STUDIE STATISTICKÉHO CHOVÁNÍ GUMBELOVA MODELU
ÚNAVOVÉ ODEZVY BETONŮ TŘÍD C30/37 A C45/55

STUDY OF STATISTICAL BEHAVIOUR OF GUMBEL MODEL
OF PLAIN C30/37 AND C45/55 CLASS CONCRETE FATIGUE RESPONSE

Abstrakt

Cílem příspěvku je představit a porovnat hodnoty základních únavových parametrů betonů pevnostních tříd C30/37 a C45/55 získané z cyklických testů těles. Pro popis únavové $S-N$ křivky je v příspěvku použit nelineární regresní model vyvinutý Castillem a kol., založený na Gumbelovu rozdělení pravděpodobnosti. Autoři se v tomto článku zaměřují na analýzu proměnlivosti naměřených hodnot základních únavových parametrů betonů těles z výše uvedených tříd s využitím pravděpodobnostního softwaru FReET.

Klíčová slova

Beton, únava, aproximace, Gumbelovo rozdělení pravděpodobnosti, software FReET.

Abstract

The aim of this paper is to present and compare values of basic fatigue parameters obtained for plain C30/37 and C45/55 class concrete specimens during dynamic tests with consideration of their variability. The Gumbel distribution utilized by Castillo et al. in a nonlinear regression model is applied for standard description of the $S-N$ curve. The authors focus on the analysis of the variability of the values measured for the basic fatigue parameters of the above mentioned classes of concrete specimens using the FReET probabilistic software.

Keywords

Concrete, fatigue, approximation, Gumbel distribution, software FReET.

1 ÚVOD

Beton v současnosti patří k nejpoužívanějším stavebním materiálům také pro prvky a konstrukce dynamicky zatěžované. Provádění zkoušek cyklicky namáhaných betonových prvků či konstrukcí je nákladné, z tohoto důvodu může numerické modelování představovat efektivní přístup pro předpověď procesu poškození a únavové životnosti těchto konstrukcí za různých provozních podmínek. Pro efektivní použití numerického (materiálového) modelu při řešení odezvy konstrukce na dané zatížení bývá třeba „naladit“ parametry modelu pomocí experimentálně získaných dat. Adekvátní vyhodnocení únavových experimentů se tak stává nutnou podmínkou pro korektní použití numerického modelu v praxi.

¹ Ing. Hana Šimonová, Vysoké učení technické v Brně, Fakulta stavební, Ústav stavební mechaniky, Veveří 331/95, 602 00 Brno, tel.: (+420) 541 147 116, e-mail: simonova.h@fce.vutbr.cz.

² Ing. Ivana Havlíková, Vysoké učení technické v Brně, Fakulta stavební, Ústav stavební mechaniky, Veveří 331/95, 602 00 Brno, tel.: (+420) 541 147 116, e-mail: havlikova.i@fce.vutbr.cz.

³ prof. Ing. Zbyněk Keršner, CSc., Vysoké učení technické v Brně, Fakulta stavební, Ústav stavební mechaniky, Veveří 331/95, 602 00 Brno, tel.: (+420) 541 147 362, e-mail: kersner.z@fce.vutbr.cz.

Pro posuzování únavové životnosti konstrukčních prvků je v technické praxi všeobecně přijímán přístup založený na empiricky odvozených $S-N$ diagramech známých jako Wöhlerovy křivky, tj. grafy zobrazující závislost napětí (S) na počtu zatěžovacích cyklů do porušení (N); tento postup byl použit v [1]. Další možností je vyhodnocení dynamických zkoušek pomocí nelineárního regresního modelu vyvinutého Castillem a kol., a to buď na základě Weibullova rozdělení pravděpodobnosti, který byl využit v [2], nebo Gumbelova rozdělení, který je použit v tomto příspěvku. Poznamenejme již na tomto místě, že výsledky získané pomocí obou zmíněných modelů pro analyzovaná data vycházejí obdobně.

Hlavním cílem předkládaného článku je uvedení vybraných výsledků provedené analýzy proměnlivosti vstupních parametrů regresního modelu, využívajícího naměřené hodnoty základních únavových parametrů betonů těles z výše uvedených tříd. K analýzám byl použit pravděpodobnostní software FReET.

2 SHRUTÍ VÝSLEDKŮ DYNAMICKÝCH ZKOUŠEK

Výsledky dříve proběhlých únavových zkoušek třibodově ohybaných trámů $100 \times 100 \times 400$ mm s počátečním centrálním zářezem hloubky 10 mm při různé maximální úrovni napětí jsou shrnuty na Obr. 1 a Obr. 2 pro beton pevnostní třídy C30/37 a C45/55; maximální nominální normálové napětí při ohybu (S) je v obrázcích vynášeno v závislosti na logaritmu počtu cyklů do porušení (N). K popisu experimentálně získaných dat byl použit vztah, který vychází z Gumbelova rozdělení využitého Castillem a kol. [3], v následujícím tvaru:

$$S = \exp \left(\frac{\log \left(\log \left(\frac{1}{1-P} \right) \right) \delta + \lambda}{\log N - B} + C \right) \quad (1)$$

kde:

\log – značí přirozený logaritmus,

N – je únavová životnost měřená v cyklech,

S – napětí,

P – pravděpodobnost porušení,

B – prahová hodnota životnosti,

C – prahová hodnota S nebo mezní odolnost,

δ a λ – jsou parametry Gumbelova rozdělení pravděpodobnosti.

Analytický výraz pro popis $S-N$ pole v tomto tvaru umožňuje pravděpodobnostní predikci maximální konstantní amplitudy zatížení pro požadovaný počet cyklů.

Pro získání korektních hodnot únavových parametrů odpovídajících stáří vzorků, při kterém se prováděly únavové zkoušky, byly naměřené hodnoty poděleny koeficienty určenými z aproximačních křivek relativních hodnot pevnosti v tlaku. Tímto postupem se standardizovala naměřená data na stáří zkušebních těles 28 dní – podrobnosti viz [4].

S využitím modelu Castilla a kol. byly získány analytické vztahy pro betony pevnostní třídy C30/37 a C45/55 podle rovnice (1) s hodnotami parametrů uvedenými v níže komentované Tab. 1, přičemž pro následnou statistickou analýzu je uvažována pravděpodobnost porušení $P = 0,50$.

3 ANALÝZA ÚNAVOVÝCH FUNKCÍ S VYUŽITÍM SOFTWARE FReET

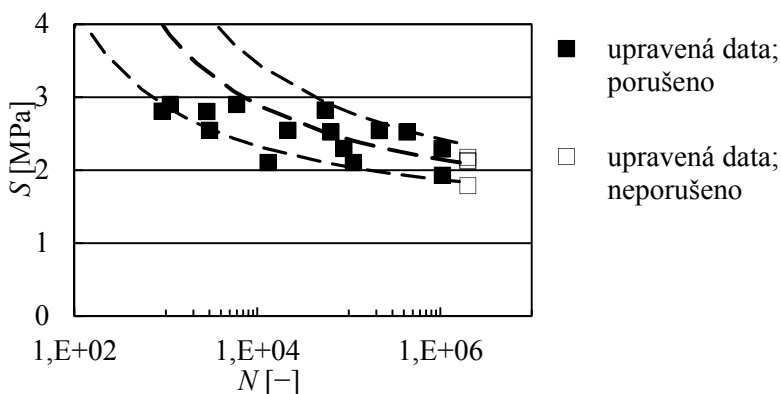
Následně byla provedena statistická analýza výše zmíněných únavových funkcí s využitím pravděpodobnostního softwaru FReET [5], kdy vybrané parametry $S-N$ křivky (1) byly v této pilotní studii uvažovány jako náhodné veličiny s dvouparametrickým log-normálním rozdělením [6]. Střední

hodnoty parametrů jsou spolu s příslušnými hodnotami variačních koeficientů (COV) jednotlivých parametrů shrnuty v Tab. 1.

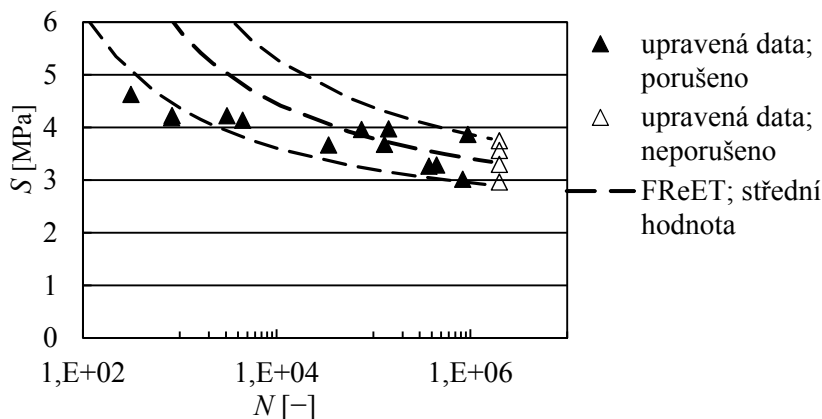
Tab. 1: Vstupní veličiny pro statistickou analýzu v programu FReET

Parametr		Typ rozdělení náhodné veličiny	Střední hodnota [-]	COV [%]
B	C30/37	Deterministické	0,00	–
	C45/55	Deterministické	0,00	–
C	C30/37	Log-normální (2 par)	0,18	15
	C45/55	Log-normální (2 par)	0,70	10
δ	C30/37	Log-normální (2 par)	1,24	15
	C45/55	Log-normální (2 par)	1,48	10
λ	C30/37	Log-normální (2 par)	8,43	20
	C45/55	Log-normální (2 par)	7,69	20

O vybraných výsledcích naznačených statistických analýz si lze učinit představu z Obr. 1 a 2, kde jsou v $S-N$ diagramu standardizovaná naměřená data obou betonů doplněna výstupy programu FReET (střední hodnoty a +/- směrodatné odchylky (STD)).



Obr. 1: Naměřená data a výsledky analýzy únavových křivek pro beton pevnostní třídy C30/37



Obr. 2: Naměřená data a výsledky analýzy únavových křivek pro beton pevnostní třídy C45/55

Pomocí programu FReET byla provedena také citlivostní analýza obou únavových modelů (detaily lze nalézt např. v [5]). Za zmínku stojí, že vyšší stupeň závislosti proměnlivosti vstupního parametru na proměnlivosti únavového modelu vykázal pro oba betony jen bezrozměrný parametr λ (téměř roven 1 pro beton C30/37 a 0,97–0,99 pro beton C45/55). Nízké stupně této závislosti dosahovaly další uvažované náhodné parametry únavového modelu pro betony C30/37 a C45/55 v následujících mezích [-]: δ (-0,04)–(-0,08) a (-0,03)–(-0,10); C 0,04–0,11 a 0,06–0,11.

4 ZÁVĚR

V příspěvku byly prezentovány především výsledky studie proměnlivosti korigovaných naměřených hodnot základních únavových parametrů získaných na zkušebních tělesech z betonů tříd C30/37 a C45/55 pomocí pravděpodobnostního softwaru FReET. Bylo zkoumáno statistické chování nelineárního regresního modelu vyvinutého Castillem a kol. na základě Gumbelova rozdělení pravděpodobnosti. Výchozí hodnoty COV odpovídajících parametrů uvedených v Tab. 1 byly – s ohledem na dříve provedené studie proměnlivosti parametrů Wöhlerovy křivky a nelineárního regresního modelu založeného na Weibullovu rozdělení [1, 2] – uvažovány hodnotou 15 % pro beton pevnostní třídy C30/37, resp. 10 % pro beton C45/55. Z předložené studie statistického chování modelu únavové odezvy výše zmíněných betonů vyplývá, že zvolené výchozí hodnoty COV jsou dostačující pro parametry C a δ . Proměnlivost bezrozměrného parametru λ je pro přesnější vystižení závislosti maximálního nominálního normálového napětí při ohybu na logaritmu počtu cyklů do porušení nutné uvažovat hodnotou COV 20 % pro obě pevnostní třídy betonu. Obdobné výsledky byly získány i pro nelineární regresní model vyvinutý Castillem a kol. na základě Weibulla rozdělení [2].

PODĚKOVÁNÍ

Práce na příspěvku byly podporovány projektem juniorského specifického vysokoškolského výzkumu na VUT v Brně registrovaným na VUT pod č. FAST-J-12-5/1566, přičemž se částečně využilo výsledků projektu GA ČR č. P104/11/0833.

LITERATURA

- [1] ŠIMONOVÁ, H., I. HAVLÍKOVÁ a Z. KERŠNER. Statistická analýza únavových křivek betonů třídy C30/37 a C45/55. In: *Sborník příspěvků konference 19. Betonářské dny 2012*. Praha: ČBS servis, s. r. o., 2012, s. 418–421. ISBN 978-80-87158-32-6.
- [2] ŠIMONOVÁ, H., I. HAVLÍKOVÁ a Z. KERŠNER. Studie statistického chování Weibullova nelineárního modelu únavové odezvy betonů tříd C30/37 a C45/55. In: *Sborník doktorské konference Víceúrovňový design pokrokových materiálů*. Brno: Ústav fyziky materiálů AV ČR, v. v. i., 2012, s. 81–86. ISBN 978-80-87434-06-2.
- [3] CASTILLO, E. and A. FERNÁNDEZ-CANTELI. *A Unified Statistical Methodology for Modeling Fatigue Damage*. Springer Netherlands, 2009. ISBN 978-1-4020-9181-0.
- [4] ŠIMONOVÁ, H., Z. KERŠNER, S. SEITL, D. PRYL a R. PUKL. Korekce únavových parametrů betonu s využitím aproximací lomově-mechanických parametrů v čase. *BETON TKS*. Praha: Beton TKS, s. r. o., 2012, roč. 12, č. 1/2012, s. 57–59. ISSN 1213-3116.
- [5] NOVÁK, D., M. VOŘECHOVSKÝ a R. RUSINA. FReET v. 1.5 – program documentation, User's and Theory Guides, Brno, <http://www.freet.cz>.
- [6] JCSS. JCSS Probabilistic Model Code. Joint Committee on Structural Safety, Zurich, 2006, <http://www.jcss.ethz.ch/>.

Oponentní posudek vypracoval:

Ing. Petr Konečný, Ph.D., Katedra stavební mechaniky, Fakulta stavební, VŠB-TU Ostrava.

Ing. Miroslav Sýkora, Ph.D., Oddělení spolehlivosti konstrukcí, Kloknerův ústav, ČVUT v Praze.

Michal ŠTAFĀ¹, Petr FRANTÍK²

PLASTIZACE TENKOSTĚNNÉHO NOSNÍKU POMOCÍ PRUŽINOVÝCH SÍTÍ

PLASTICITY OF THINWALLED BEAM MODELED BY SPRING NETWORKS

Abstrakt

Příspěvek představuje dynamický systém využívající fyzikální diskretizaci pomocí pružinové sítě. Popisuje jednotlivé fáze diskretizačního postupu na praktické, ale zároveň výpočetně náročné nelineární úloze. Všímá si současných aspektů modelu a rovněž demonstruje využití paralelních výpočtů prostřednictvím platformy Nvidia CUDA.

Klíčová slova

Dynamický systém, fyzikální diskretizace, FyDiK3D, CUDA, tetrahedronizace.

Abstract

The paper represents dynamical system with use of physical discretization method based on spring networks. It describes every phase of used discretization process on practical but also time-consuming non-linear task. It observes contemporary model aspects and demonstrates use of parallel computation technique by Nvidia CUDA platform.

Keywords

Dynamical system, physical discretization, FyDiK3D, CUDA, tetrahedronization.

1 ÚVOD

Silně nelineární problémy mechaniky jako plastická deformace nebo rozvoj trhlin v heterogenních materiálech, se velmi obtížně modelují klasickými metodami mechaniky kontinua [1]. Jedním ze způsobů jak tento problém řešit je použití metody fyzikální diskretizace, která byla poprvé aplikována již před několika desítkami let [2].

Nejpoužívanější přístupy zavádí rozdělení kontinua na pružinové prvky zajišťující silové interakce mezi částicemi a částice jako nositele hmotnosti. Takovouto implementaci je poměrně snadné provést ve 2D, tak i v 3D formě. Výstižnosti modelu se zejména ve 2D dosahuje použitím více typů pružin, které lépe vystihují jednotlivé vnitřní síly. Modely 3D se hlavně díky vysoké výpočetní náročnosti zatím příliš neuplatňují a přitom, právě ty by mohly lépe vystihnout chování materiálu, jelikož mají principiálně nejbližší k jeho mikroskopické struktuře.

Na VUT v Brně je již několik let vyvíjen diskretizační 3D model FyDiK3D, který se navíc od výše zmíněných liší tím, že je postaven na bázi dynamických systémů, což umožňuje vystihnout i mechanickou odezvu materiálu v čase.

¹ Ing. Michal Štafa, Ústav stavební mechaniky, Fakulta stavební, Vysoké učení technické v Brně, Veveří 331/95, 602 00 Brno, e-mail: stafa.m@fce.vutbr.cz.

² Ing. Petr Frantík, Ph.D., Ústav stavební mechaniky, Fakulta stavební, Vysoké učení technické v Brně, Veveří 331/95, 602 00 Brno, e-mail: kitnarf@centrum.cz, www: http://kitnarf.cz.

Zda a jak je použitý model schopen se vypořádat například s úlohou plastické deformace ocelového nosníku, a zda je výpočetní náročnost takového dynamického modelu se stovkami tisíc stupňů volnosti únosná, se pokouší zodpovědět tento příspěvek.



Obr. 1: Modelovaný nosník

2 MODEL

Model je tvořen body, ve kterých se koncentruje hmotnost modelovaného tělesa. Ty na sebe navzájem působí prostřednictvím sítě interakčních pružin s definovanou silovou funkcí. Tímto je vytvořena prostorová příhradovina vystihující chování materiálu podobné jeho mikroskopické bázi. Podrobněji o FyDiK3D modelu viz [3],[4].

Vytvoření takovéto příhradoviny s přiřazenými materiálovými vlastnostmi ovšem předchází několik fází. Nejprve je zapotřebí vymežit objem tělesa, který se takto diskretizuje. Následně je vevnitř a v jeho definovaném okolí je vygenerována co největší množina bodů splňující podmínku, že žádné dva body množiny neleží sobě blíže, než určitá vzdálenost. Body jsou za uvedené podmínky generovány pomocí sekvence s nízkou diskrepancí, případně pseudonáhodně. Použitím takovýchto postupů je vůči pravidelnému generování lépe reprezentovaná nerovnoměrná vnitřní struktura materiálu, či případné výrobní vady. Míru této nerovnoměrnosti lze korigovat hustotou generovaných bodů a jejich nejmenší vzdáleností.

Nad vytvořenou množinou bodů je v dalším kroku vytvářena Deloneho tetrahedronizace (viz obr. 3), tedy množina tetraedrů – čtyřstěnů, u nichž platí, že žádný bod neleží v kouli opsané vzniklého čtyřstěnu. Tetrahedronizace je prováděna inkrementálním (přírůstkovým) algoritmem, který je například představen v [5].

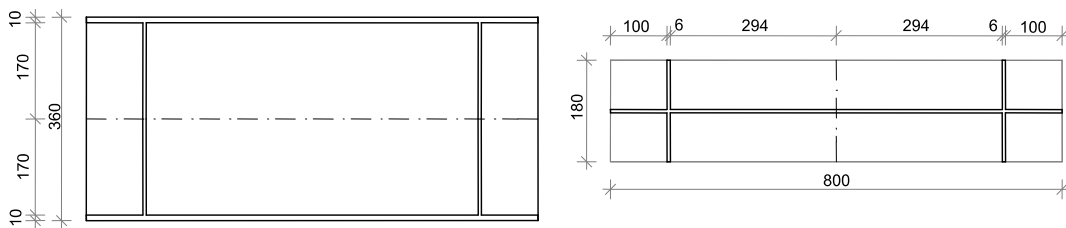
Převedením tetrahedronizace na její duální strukturu vznikne Voronoiova mozaika (viz obr. 4). Jedná se o množinu buněk, jejichž stěny jsou umístěny kolmo na příslušnou stranu tetraedru s průsečíkem v jejím středu. Mozaika je dále „ořezána“ podle skutečného objemu modelovaného prvku. Objem buněk určuje velikost hmotnosti, kterou nesou jádra buňky - generované body. Stěny buněk vymezují velikost průřezové plochy pružiny, čili tuhost spojnice přilehlých bodů. Tímto způsobem je tak možné sestavit příhradovinu modelu včetně její hmotnosti a tuhosti.

Okrajové podmínky jsou definovány vždy na konkrétních bodech. Podpory jako omezení translace v požadovaném směru a zatížení jako přemístění bodu v čase. Přírůstek deformace je pak započítáván v každém výpočetním kroku. Velikost výpočetního kroku je především závislá na tuhosti modelu a je jedním z hlavních faktorů ovlivňujícím rychlost výpočtu.

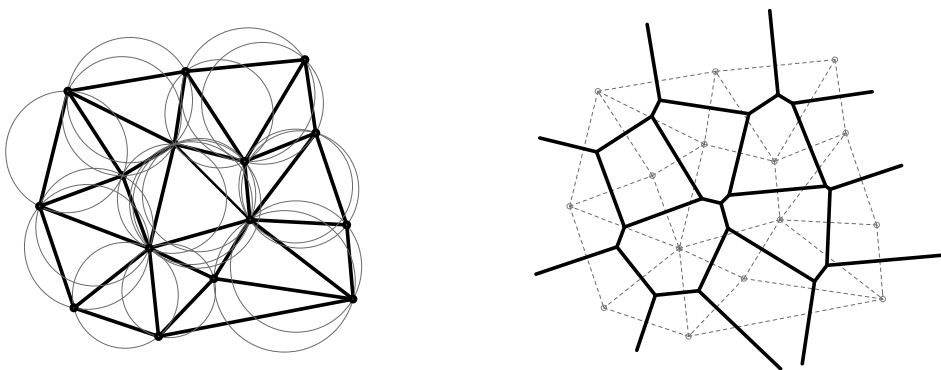
3 APLIKACE

Motivací pro modelování ocelového nosníku, byl výsledek experimentu na Ústavu kovových a dřevěných konstrukcí Fakulty stavební na VUT v Brně, viz obr. 1. Tento prvek byl zatěžován ve středu horní pásnice s celkovou vynucenou deformací 40 mm.

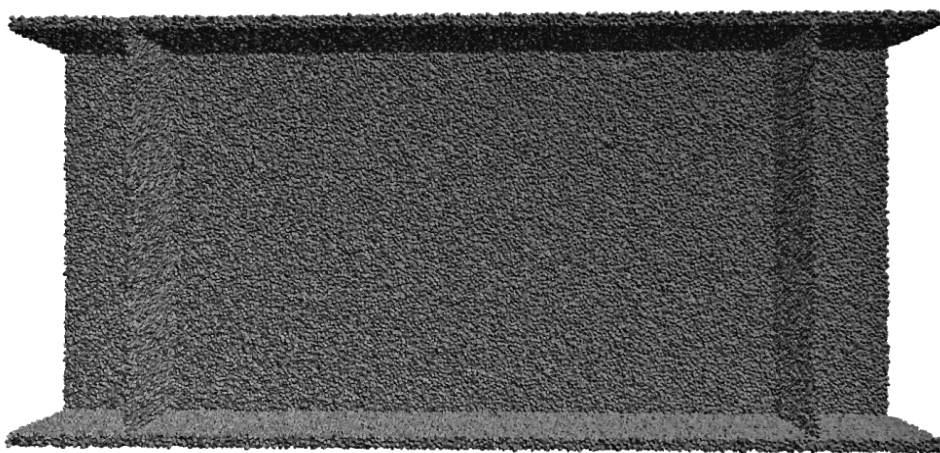
Podle zjištěných rozměrů nosníku (obr. 2) byla pro generování bodů zvolena minimální vzdálenost 2,5 mm, s okolím o tloušťce 6,5 mm. Tyto rozměry byly stanoveny s ohledem na minimální tloušťku stěny modelovaného objektu tak, aby ještě bylo možno vytvořit příhradovou strukturu, ale zároveň byl počet bodů co nejmenší. Přesto bylo vyžadováno vygenerování cca 650 tisíc bodů, které se následně po očištění objemu zredukovaly na asi 180 tisíc.



Obr. 2: Rozměry ocelového nosníku



Obr. 3: Vytváření Deloneho triangulace s legalizací pomocí opsaných kružnic – vlevo. Převedení pomocí středů opsaných kružnic na Voronoiovu mozaiku – vpravo.

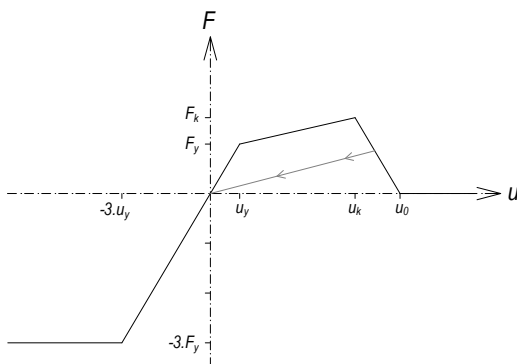


Obr. 4: Voronoiova mozaika

Deloneho tetrahedronizací a následnou Voronoiovou mozaikou se nad touto množinou vytvořila skupina translačních pružin. Silová funkce pružin byla zvolena jako polygonální a byla odvozena od pracovního diagramu oceli, viz obr. 5.

Síla F_y odpovídala pro pružinu plochy $A = 1 \text{ m}^2$ hodnotě 235 MN. Sklon první části tahové větve byl definován modulem pružnosti oceli 210 GPa. Následná větev pak relativní silou F_k

(360 MN) při relativním prodloužení $u_y = 0,01$. Poslední část klesala se sklonem odpovídající modulu pružnosti. Za ní byla pružina považována za přetrženou a již další sílu nepřenašela. Tlaková větev do hodnoty síly $-3F_y$ klesala ve sklonu modulu pružnosti. Následně došlo v tlaku k plastizaci pružiny a přenášená tlaková síla zůstávala na této maximální dosažené hodnotě.

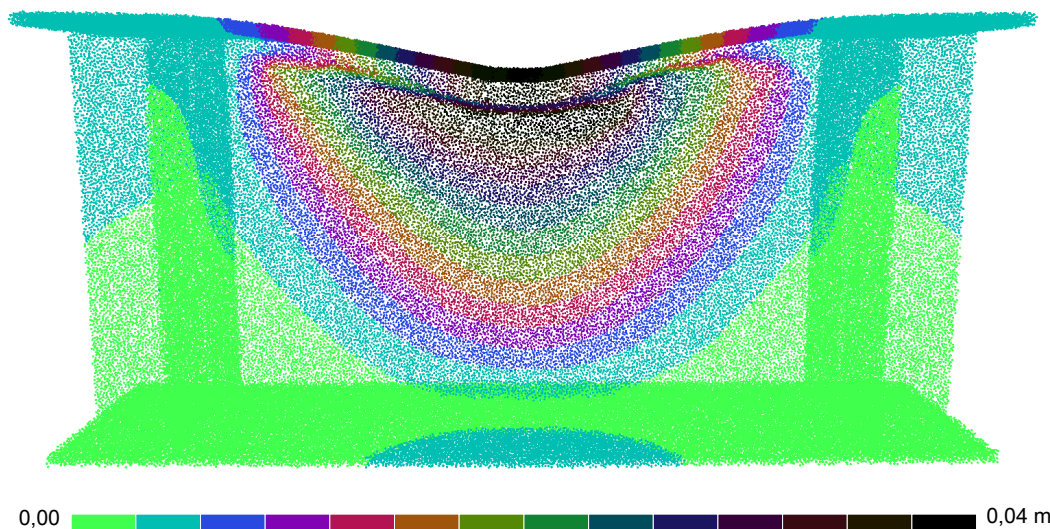


Obr. 5: Silová funkce translační pružiny

Konstrukce byla podepřena v místě pod oběma výztuhami a to 2 cm širokým pásem vetknutých bodů. Zatížení bylo realizováno vynuceným posuvem bodů v šířce 2 cm nacházejících se ve středu horní pásnice rychlostí 0,025 m/s do maximální deformace. Výpočetní krok vzhledem k tuhosti konstrukce měl velikost 10^{-7} s. Celkem bylo provedeno 16 miliónů časových kroků.

4 VÝSLEDKY

Tvar nosníku se po deformaci velmi blíží tvaru získaného z experimentu, což nejlépe demonstruje obr. 6 a jeho srovnání s obr. 1, resp. 7. Absolutní posunutí bodů je barevně zvýrazněno. Maximální příčná deformace pod místem zatěžování činila při experimentu $40,0 \pm 1,0$ mm, zatímco u simulace $43,0 \pm 0,5$ mm a je zvýrazněna černou barvou.

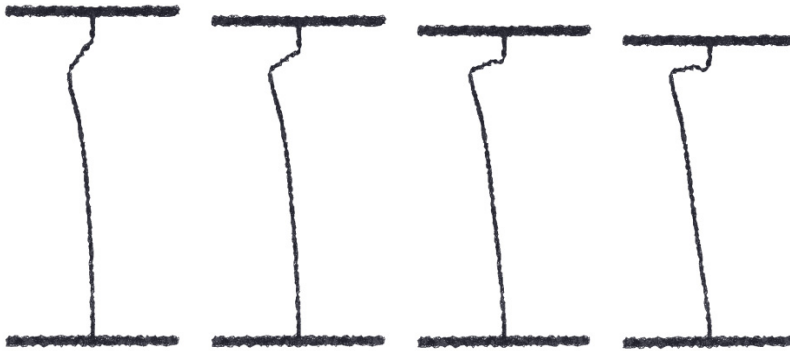


Obr. 6: Model po konečné deformaci

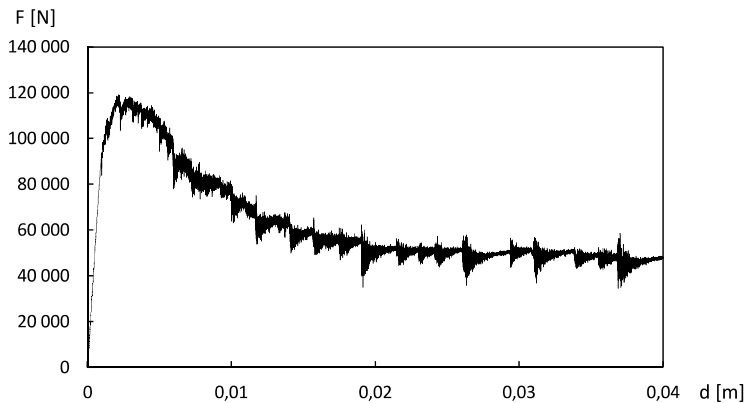
Obr. 7 ukazuje průběh zatěžování a je z něj patrná i značná štíhlost konstrukce. Poměrně ostré zlomy v deformaci modelované pásnice naznačují, že model je příliš hrubý a zřejmě by bylo vhodné zjemnit jeho strukturu alespoň v místě pásnice, tedy snížit minimální vzdálenost bodů pod 2,5 mm.



Obr. 7: Plastizace stojiny – výsledek experimentu



Obr. 8: Řez nosníku v místě zatěžování, zleva doprava s deformací 10 mm, 20 mm, 30 mm a 40 mm



Obr. 9: Zatěžovací diagram modelu

Pro dosažení únosného počtu výpočetních kroků musela být použita velká rychlost zatěžování. Při takové to rychlosti (0,005–0,1 m/s), docházelo často k náhlým porušením ve struktuře sítě a model byl tak více citlivý i na postup generování a minimální vzdálenosti bodů.

5 PARALELIZACE

Aplikace byla nejprve vytvořena na platformě x86 počítaně jako jednovláknová a naprogramována v jazyce Java. Dosažený výkon ale výpočet podobně rozsáhlých modelů neumožňoval. Vzhledem ke struktuře aplikace, je ovšem možné ji paralelizovat. V jednotlivých časových krocích, jsou počítány aktuální stavové proměnné všech prvků, nejprve pružin a následně bodů. Tyto výpočty jsou prováděny pro každý prvek nezávisle a je možné je tak počítat současně.

Byla proto vytvořena verze pro platformu Nvidia CUDA, využívající potenciál GPU, konkrétně výpočetní karty Tesla C2050 a výpočet tak probíhal na 384 stream procesorech. Ve srovnání s Java verzí běžící na procesoru Intel Core i7-950 byl dosažen faktor zrychlení asi 90x. Při těchto parametrech proběhl popsáný výpočet za 32 hodin a 24 minut, tedy jeden výpočetní krok průměrně trval asi $7,29 \cdot 10^{-3}$ s.

Výpočetní potenciál platformy CUDA přitom nebyl v tomto případě zcela využit. Jelikož se jedná o paměťově náročnou aplikaci, výkon je brzděn latencemi paměťového subsystému. Částečným řešením by proto mohla být další důsledná optimalizace aplikace pro paměťový systém konkrétní karty, nebo využití novější zařízení s vylepšenou paměťovou správou.

6 ZÁVĚR

Použitý model na vizuální shodě výsledků s experimentem prokázal svoji funkčnost a je ho možné za určitých podmínek použít pro řešení podobných silně nelineárních úloh. Obecnost a v současné době stále malá zkušenost s modelem pro jeho širší využití vyžaduje další studium jeho parametrů a vztahů mezi nimi. S tím souvisí i výpočetní náročnost, kterou je možné jeho parametry ovlivnit. Současný trend paralelizace výpočtů, pro který je tato metoda vhodná, jistě v brzké době celý proces ještě více zpřístupní pro výpočty na běžně dostupném hardware.

PODĚKOVÁNÍ

Výzkum byl realizován za finanční podpory VUT v Brně v rámci projektu specifického vysokoškolského výzkumu FAST-S-12-21/1653.

LITERATURA

- [1] BAŽANT, Z., M. TABBARA, M. KAZEMI a G. PIJAUDIER-CABOT. *Random Particle Model for Fracture of Aggregate or Fiber Composites*, (1990) J. Eng. Mech., 116(8), 1686–1705.
- [2] KAWAI, T. *New discrete models and their application to seismic response analysis of structures*. Nuclear Engineering and Design, Volume 48, Issue 1, June 1978, Pages 207–229.
- [3] FRANTÍK, P. *Dynamická simulace lomu tlačěného vzorku*. Modelování v mechanice 2008, VŠB-TU Ostrava, Únor 2008, ISBN 978-80-248-1705-7.
- [4] FRANTÍK, P. *Diskrétní model FyDiK2D*, Modelování v mechanice 2009, VŠB-TU Ostrava, Květen 2009, ISBN 978-80-248-2016-3.
- [5] LEDOUX, H. *Computing the 3D Voronoi Diagram Robustly: An Easy Explanation*, 4th International Symposium on Voronoi Diagrams in Science and Engineering (ISVD 2007), Published by the IEEE Computer Society, July 2007, ISBN 0-7695-2869-4.

Oponentní posudek vypracoval:

Prof. Ing. Milan Moravčík PhD., Katedra stavebných konstrukcí a mostov, Stavebná fakulta, ŽU v Žiline.

Doc. Ing. Jiří Brožovský, Ph.D., Katedra stavební mechaniky, Fakulta stavební, VŠB-TU Ostrava.

Jozef SUMEC¹, Mária MINÁROVÁ²

MECHANICAL AND MATHEMATICAL MODELING OF VISCO-ELASTIC CONTINUA –
CONSTITUTIVE EQUATIONS

MECHANO – MATEMATICKÉ MODELOVANIE VÁZKOPRUŽNÉHO KONTINUA –
KONŠTITUTÍVNE ROVNICE

Abstract

Phenomenological models of continuum mechanics applied on the rigid body are more or less idealized. Experimental measuring showed there is a plastic flow, respectively relaxation in real rigid bodies, i.e. stress is the function of strain, strain velocity and the higher time derivatives. The paper deals with the rheological models based on the Hook elastic and Newton viscous masses. The corresponding constitutive equations are described.

Keywords

Linear visco-elasticity, relaxation, plastic flow, differential and integral representation of the constitutive equations for anisotropic media, rheological model, integral Laplace transformation.

Abstrakt

Fenomenologické modely mechaniky kontinua aplikované v tuhých telesách sú viac či menej idealizované. Experimentálne merania ukázali, že v tuhých telesách dochádza k dotvarovaniu, resp. relaxácii, t. j. že napätie je funkciou nielen deformácie, ale aj jej časových derivácií. Článok pojednáva o reologických modeloch, ktorých základom je Hookova pružná a Newtonova viskózna látka. Sú popísané aj príslušné konštitutívne rovnice.

Klíčová slova

Lineárna väzkopružnosť, relaxácia, dotvarovanie, diferenciálna a integrálna reprezentácia konštitutívnych rovníc v anizotropickom médiu, reologický model, Laplaceova transformácia.

1 INTRODUCTION

Classical elasticity theory studies the mechanical response of the perfectly elastic body to the ambient acting, where according to the Hook's law the stress is a linear function of the strain being independent on the deformation velocity. On the other hand in hydrodynamic problems, where Newtonian laws are valid, the stress is linearly proportional to the strain velocity, but independent from the strain itself [7, 8, 10].

Phenomenological models of continuum mechanics applied in mechanical and mathematical modeling by using boundary value problems are more or less idealized. Considering the experimental measuring [11, 12, 25, 29] it is easy to find out that in real rigid body the plastic flow, respectively relaxation of the stress is evident as the effect of the outer load. In another words, the stress can be the

¹ Prof. Ing. RNDr. Mgr. Jozef Sumec, DrSc., Department of Structural Mechanics, Faculty of Civil Engineering, Slovak University of Technology in Bratislava, Radlinského 11, Bratislava, jozef.sumec@stuba.sk.

² RNDr. Mária Minárová, PhD., Department of Mathematics and Constructive Geometry, Faculty of Civil Engineering, Slovak University of Technology in Bratislava, Radlinského 11, Bratislava, maria.minarova@stuba.sk.

function of not only strain and strain velocity, but also the higher order time derivative of the strain, e.g. [3, 28].

The study of the materials, where both the rigid and the liquid properties are performed, is included in the visco-elasticity theory. [3, 13-15, 18, 20, 22]. The base of the visco-elasticity theory was introduced in the two last centuries in the papers of Maxwell [21], Boltzmann [2], Kelvin [32] and Voigt [35].

2 CONSTITUTIVE EQUATION AXIOMS

- Causal principle: The stage of the body Ω in the time t is determined by the only history and not by the future, e.g. [1,4]
- Determinism principle: The stress in the particle $\vec{X} \in \Omega$ in the time t is determined by the movement history \vec{x}' of the movement of the body Ω until the time t

$$\sigma(\vec{x}, t) = \mathcal{F}_{t=-\infty}(\vec{x}'(\vec{X}', t'; \vec{X}, t)) , \quad (1)$$

where \mathcal{F} "constitutive operator" is a general operator expressing admissible functions of the body movement. The operator has to fulfill the conditions of the invariance, e.g. [2, 4].

- Local effect principle: According to the determinism principle the movement of the particle $\vec{Y} \in \Omega$ that is not situated "too near" the particle $\vec{X} \in \Omega$, $\vec{X} \neq \vec{Y}$ can influence to the stress in the particle \vec{X} . In the sense of contact stresses definition, the stresses are determined by the interactions of the particles in the infinitesimal neighborhood of the point \vec{X} . In terms of this definition we can further neglect the movement of the particles of the finite distance from \vec{X} when calculating the stresses in the neighborhood of the point, i.e. [4]

$$\vec{x}' = (\vec{Y}, s) = \vec{x}', \quad s \geq 0, \quad \vec{Y} \in N(\vec{X}), \quad (2)$$

where $N(\vec{X})$ is a neighborhood of the point \vec{X} so it is valid

$$\mathcal{F}(\vec{x}', \vec{Y}, t) = \mathcal{F}_{t=-\infty}(\vec{x}', \vec{X}, t) . \quad (3)$$

- Objectivity principle: In the phenomenological theory of modeling we presume the independence of the various strain measures and stress velocities on the position and movement of observer. Also it is valid that the material properties expressed by the constitutive operator are independent on the observer, accordingly they are objective. That means when we would like to describe the real behavior of the materials, the constitutive equations have to be objective, i.e. if it holds [2, 4]

$$\sigma(\vec{x}, t) = \mathcal{F}_{t=-\infty}(\vec{x}(t); \vec{X}, t) . \quad (4)$$

Then the constitutive operator has to read

$$\sigma^*(\vec{x}, t) = \mathcal{F}_{t=-\infty}(\vec{x}(t); \vec{X}, t) , \quad (5)$$

where \vec{x} , σ^* are the quantities dynamically equivalent to \vec{x} and σ .

3 THE FUNDAMENTAL SUBSTANCES AND THEIR RHEOLOGICAL MODELS

Obviously, we describe the rheological phenomenon by the working diagram which express the relationship between a two physical parameters; $\sigma \sim \varepsilon$, $\varepsilon \sim \sigma$, $\sigma \sim t$, $\varepsilon \sim t$. We often use also three dimensional working diagrams $\sigma \sim \varepsilon \sim t$, $\varepsilon \sim \sigma \sim t$, etc.

There are some essential rheological components [28]: solid material, flowable liquid, elastic material. By compounding of these components we can get more complex rheological models by using which we can concisely express the rheological properties of various real materials. In our case, we will start from the two basic rheological substances, (Fig. 1).

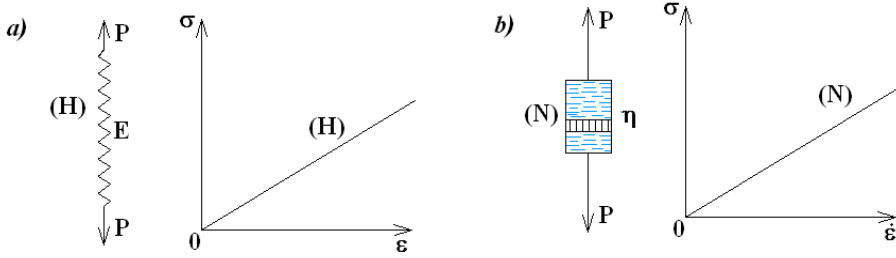


Fig. 1: Rheological models of elastic substance and viscous liquid, a) Hook elastic material, b) Newton viscous liquid

Working diagrams of both substances can be expressed by the known formulas

$$(H): \boldsymbol{\sigma} = \hat{E} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (6)$$

$$(N): \boldsymbol{\sigma} = \hat{\eta} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad (7)$$

where $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ are the stress and strain tensors, \hat{E} elasticity module, $\hat{\eta}$ viscosity coefficient (in 3D represented by tensor operators). The dot above the tensor stands as the time derivative sign of it.

4 CONSTITUTIVE EQUATIONS FOR ANISOTROPIC MEDIUM

Let us consider a quasi static problem where we neglect the outer inertial loading influence on the infinitesimal strains of the body. In the case between the deformations and stresses there is a relation as follows:

$$\boldsymbol{\sigma} = \hat{\mathbf{H}} \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (8)$$

where $\hat{\mathbf{H}} = H^{ijkl}$ is a tensor operator of the 4th order which is, according to the Onsager theory, symmetric for linear rheological models[24].

$$H^{ijkl} = H^{klij} = H^{klji} = H^{lkji} \quad (9)$$

and also positive definite – according to the 2nd thermodynamic law [5, 33]. The operator can be of three form of representation, e.g. [6, 7], integral, differential and integro – differential form.

(a) In the case of differential representation of equation (8) it holds [5, 6]

$$\mathbf{K}^{(r)} \boldsymbol{\sigma} = \hat{\mathbf{K}}_{(s)} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (10)$$

respectively

$$\mathbf{Q}^{(r)} \boldsymbol{\varepsilon} = \hat{\mathbf{Q}}_{(s)} \boldsymbol{\sigma}, \quad (11)$$

where

$$\mathbf{K}^{(r)} = \prod_{n=1}^r \left(\frac{\partial}{\partial t} + \kappa_n \right), \quad \mathbf{K}^{(0)} = \mathbf{1} \quad (12)$$

$$\mathbf{Q}^{(r)} = \prod_{n=1}^r \left(\frac{\partial}{\partial t} + \lambda_n \right), \quad \mathbf{Q}^{(0)} = \mathbf{1} \quad (13)$$

are scalar operators and

$$\hat{\mathbf{K}}_{(s)} = \sum_{n=0}^s \hat{\mathbf{K}}_{(n)} \frac{\partial^n}{\partial t^n} \quad (14)$$

$$\hat{\mathbf{Q}}^{(s)} = \sum_{n=0}^s \hat{\mathbf{Q}}^{(n)} \frac{\partial^n}{\partial t^n} \quad (15)$$

are tensor operators, $\kappa_n \geq 0$, $\lambda_n \geq 0$ are inverse values of the relaxation time (plastic flow time). Equations (10) and (11) represent a generalization of the Lee equations for isotropic viscoelastic medium [5, 7, 20].

(b) In the case of integral representation of equation (8) we can write the equation (8) in the form, e.g. [6, 7]

$$\boldsymbol{\sigma} = \int_0^t \hat{\mathbf{G}}(t-\tau) \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \tau} d\tau \quad (16)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \int_0^t \hat{\mathbf{J}}(t-\tau) \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \tau} d\tau, \quad (17)$$

where $\hat{\mathbf{G}}(t)$ is a tensor operator of relaxation functions and $\hat{\mathbf{J}}(t)$ is a tensor operator of the plastic flow (both tensors are of the 4th order for anisotropic media). By using the Laplace transformation to the formulas (8), (10), (11) we get

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \tilde{\mathbf{H}}(p) \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (18)$$

$$\mathbf{K}^{(r)}(p) \tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \tilde{\mathbf{K}}_{(s)}(p) \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (19)$$

$$\mathbf{Q}^{(r)}(p) \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \tilde{\mathbf{Q}}^{(s)}(p) \tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \quad (20)$$

where for classical Laplace transform (with homogenous initial conditions) it holds

$$\tilde{F} = F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt, \quad (21)$$

where $\frac{\partial^n}{\partial t^n} \rightarrow p^n$, p is the parameter of Laplace transform. Similarly, taking the Laplace transform of (16), (17) we get

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \tilde{\mathbf{G}}(p) p \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (22)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \tilde{\mathbf{J}}(p) p \tilde{\boldsymbol{\sigma}}. \quad (23)$$

5 CONSTITUTIVE EQUATIONS FOR SOME RHEOLOGICAL MODELS

Voigt rheological model

Structural formula is: $(V) = (H) | (N)$: (Hook's substance) | (Newton's viscous liquid) in parallel connection; $\hat{\mathbf{E}} = E^{ijkl}$ is a tensor – operator of elastic modulus, $\hat{\boldsymbol{\eta}} = \eta^{ijkl}$ is a tensor – operator of viscous modulus.

In this case, the constitutive equation of the rheological model is of a form

$$\boldsymbol{\sigma} = (\hat{\mathbf{E}} + \hat{\boldsymbol{\eta}} \frac{\partial}{\partial t}) \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (24)$$

where stress and strain tensors read

$$\boldsymbol{\sigma} = {}_H \boldsymbol{\sigma} + {}_N \boldsymbol{\sigma}, \quad {}_H \boldsymbol{\varepsilon} = {}_H \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (25)$$

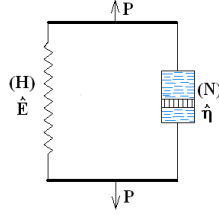


Fig. 2: Rheological model of Voigt material

After applying of the Laplace transform we get

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = (\hat{\mathbf{E}} + p\hat{\boldsymbol{\eta}}) \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (26)$$

and, after inverting

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \det^{-1}(\hat{\mathbf{E}} + p\hat{\boldsymbol{\eta}}) \bar{\mathbf{A}}(p) \tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \quad (27)$$

where $\bar{\mathbf{A}}(p)$ is an adjoint p-matrix. Let us denote by the symbol $\Delta(p)$ the expression $\Delta(p) = \det(\hat{\mathbf{E}} + p\hat{\boldsymbol{\eta}})$. By comparing (20) and (27) we get further

$$\mathbf{Q}^{(r)}(p) = \Delta(p), \quad \hat{\mathbf{Q}}^{(s)}(p) = \bar{\mathbf{F}}(p). \quad (28)$$

By the decomposition of the tensor operator in the equation (27) to the partial fractions we get

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \sum_{n=1}^6 \bar{\mathbf{A}}(p) / (p + \lambda_n) \tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \quad (29)$$

where

$$\bar{\mathbf{A}}(p) = \bar{\mathbf{F}}(-\lambda_n) / \Delta^{(1)}(-\lambda_n), \quad (30)$$

where $d\Delta(p) / dp \Big|_{p=-\lambda_n} = \Delta^{(1)}(-\lambda_n)$ and λ_n are equal to the negative values of the roots of the determinant equation $\Delta(p) = 0$ and they represent inverse values of the viscous flow time. When we extend Voigt model by the Hook mass and Newtonian viscous liquid in the serial connection, we can rearrange the formula (29) into the form

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \left(\sum_{n=1}^6 \bar{\mathbf{A}}(\lambda_n) / (p + \lambda_n) + \hat{\mathbf{C}} + p^{-1} \hat{\boldsymbol{\gamma}} \right) \tilde{\boldsymbol{\sigma}}, \quad (31)$$

where $\hat{\mathbf{C}} = (\hat{\mathbf{E}})^{-1}$, $\hat{\boldsymbol{\gamma}} = (\hat{\boldsymbol{\eta}})^{-1}$, and the corresponding structural formula will get the form

$$\{(H) - [(H) - (N)] - (N)\}. \quad (32)$$

By similar attempt we can derive the constitutive equations for a model with the structural formula

$$\{(H) - [(N_1) - (N_2) - \dots - (N_m)]\}. \quad (33)$$

According to [3, 28] we can say that the process of the linear creep can be realized by a complex rheological model composed from the fundamental substances (H) and (N) with the following structure:

$$\{(H) - [(V_1) - (V_2) - \dots - (V_m)] - (N)\}, \quad (34)$$

where by the symbol (V_i) we have denoted the i -th Voigt rheological model. By using the inverse Laplace transform Λ^{-1} on the equation (29) we get a strain tensor in the form

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \sum_{n=1}^6 \lambda_n^{-1} \bar{\mathbf{A}}(\lambda_n) \int_0^t [1 - e^{-\lambda_n(t-\tau)}] \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \tau} d\tau. \quad (35)$$

When we compare the equations (17) and (35), we can see that (35) is an equation of the Boltzmann type with the plastic flow tensor in the form

$$\hat{\mathbf{J}}(t) = \sum_{n=1}^6 \lambda_n^{-1} \bar{\mathbf{A}}(\lambda_n) [1 - e^{-\lambda_n t}]. \quad (36)$$

Maxwell rheological model

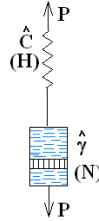


Fig. 3: Rheological model of the Maxwell type

The structural formula (M) = (H) – (N): (Hook's mass) – (Newton viscous liquid) in the serial connection; $\hat{\mathbf{C}} = C^{ijkl}$ is a tensor-operator of the elastic modules, $\hat{\boldsymbol{\gamma}} = \gamma^{ijkl}$ tensor-operator of the viscous modules. With respect to equation (11) we have

$$Q^{(r)} = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \hat{\mathbf{Q}} = \hat{\mathbf{C}} \frac{\partial}{\partial t} + \hat{\boldsymbol{\gamma}}. \quad (37)$$

In this case the constitutive equation of the rheological model will be of the form

$$\frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\varepsilon} = (\hat{\mathbf{C}} \frac{\partial}{\partial t} + \hat{\boldsymbol{\gamma}}) \boldsymbol{\sigma}. \quad (38)$$

The mechanical response of this model is the fact that resulting strain equals the sum of strains of the fundamental masses (H) and (N). The stresses in (H) and (N) are the same. Then

$${}_H \boldsymbol{\varepsilon} = \hat{\mathbf{C}} \boldsymbol{\sigma} \quad (39a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} {}_N \boldsymbol{\varepsilon} = {}_N \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \hat{\boldsymbol{\gamma}} \boldsymbol{\sigma} \quad (39b)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = {}_H \boldsymbol{\varepsilon} + {}_N \boldsymbol{\varepsilon} \quad (39c)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\partial}{\partial t} ({}_H \boldsymbol{\varepsilon} + {}_N \boldsymbol{\varepsilon}) = (\hat{\mathbf{C}} \frac{\partial}{\partial t} + \hat{\boldsymbol{\gamma}}) \boldsymbol{\sigma}. \quad (40)$$

By using the Laplace transform we get

$$p \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = (p \hat{\mathbf{C}} + \hat{\boldsymbol{\gamma}}) \tilde{\boldsymbol{\sigma}}. \quad (41)$$

After inverting (41) we can express the stress tensor

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \det^{-1}(p\hat{\mathbf{C}} + \hat{\boldsymbol{\gamma}})p\bar{\mathbf{P}}(p)\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad (42)$$

where $\det(p\hat{\mathbf{C}} + \hat{\boldsymbol{\gamma}}) = \Delta_M(p)$ is in general a polynomial of the 6th degree of parameter p and $\bar{\mathbf{P}}(p)$ is an adjoint matrix.

In the following we attempt likewise in the case of Voigt rheological model. It means we decompose the expression $\bar{\mathbf{P}} / \Delta_M(p)$ to partial fractions and get

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \sum_{n=1}^6 \frac{p\bar{\mathbf{B}}(\kappa_n)}{p + \kappa_n} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad (43)$$

where

$$\bar{\mathbf{B}}(\kappa_n) = \frac{\bar{\mathbf{P}}(-\kappa_n)}{\Delta_M^{(1)}(-\kappa_n)}, \quad (44)$$

where we denoted

$$\Delta_M^{(1)}(-\kappa_n) = \left. \frac{d\Delta_M(p)}{dp} \right|_{p=\kappa_n} \quad (45)$$

and κ_n are negative values of the roots of the determinant equation $\Delta_M(p) = 0$ and they represent inverse values of the relaxation time. When we extend the Maxwell model by the Hook mass and Newton viscous liquid in the parallel connection, the relation (43) can be extended analogously as the relation (31), i.e.

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \left(\sum_{n=1}^6 \frac{p\bar{\mathbf{B}}(\kappa_n)}{p + \kappa_n} + \hat{\mathbf{E}} + p\hat{\boldsymbol{\eta}} \right) \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (46)$$

and the corresponding extended rheological model structural formula will be of the form

$$(H)|(N)|[(H) - (N)] = (H)|(M)|(N) \quad (47)$$

and after applying Λ^{-1} on the (43) we get

$$\boldsymbol{\sigma} = \sum \bar{\mathbf{B}}(\kappa_n) \int_0^t e^{-\kappa_n(t-\tau)} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \tau} d\tau, \quad (48)$$

which is the representation of the Boltzmann type equation for the Maxwell rheological model with the tensor function of relaxation in the form

$$\hat{\mathbf{G}}(t) = \sum_{n=1}^6 \bar{\mathbf{B}}(\kappa_n) e^{-\kappa_n t}. \quad (49)$$

Zener rheological model

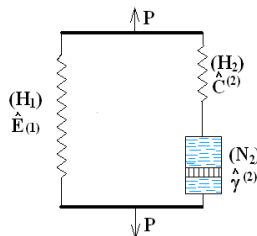


Fig. 4: Rheological model of the Zener mass

From the analyses it is evident that though the Voigt model represents the creep process well, it does not reflect immediate response of the instantaneous deformations. This drawback can be avoided by the parallel connection of the Hook mass with Maxwell rheological model. By doing this we obtain Zener rheological model, Fig. 4.

Structural formula $(Z) = (H_1)[(H_2) - (N_2)]$: (Hook's matter₁) | [(Hook's matter₂) - (Newton viscous liquid₂)]; $\hat{\mathbf{E}}_{(1)} = E_{(1)}^{ijkl}$ is a tensor – operator of elastic modules, $\hat{\mathbf{C}}^{(2)} = C_{ijkl}^{(2)}$ is a tensor – operator of elastic modules of the mass (M), $\hat{\boldsymbol{\gamma}}^{(2)} = \gamma_{ijkl}^{(2)}$ is a tensor – operator of viscous modules of the mass (M). For mechanical response of the Zener model we have

$$\boldsymbol{\sigma} = {}_1\boldsymbol{\sigma} + {}_2\boldsymbol{\sigma}, \quad {}_1\boldsymbol{\varepsilon} = {}_2\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (50)$$

where ${}_2\boldsymbol{\sigma}$ is stress, ${}_2\boldsymbol{\varepsilon}$ is strain in Maxwell model. Considering (41) for Laplace transform of the stress we get

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = [p(\hat{p}\hat{\mathbf{C}}^{(2)} + \boldsymbol{\gamma}^{(2)})^{-1} + \hat{\mathbf{E}}_{(1)}] \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (51)$$

We can hereinafter rearrange the equation (51) in the sense of equation (43) and the first equation of (50) to the form

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \left(\sum_{n=1}^6 \frac{p\bar{\mathbf{B}}_{(2)}(\kappa_n)}{p + \kappa_n} + \hat{\mathbf{E}}_{(1)} \right) \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (52)$$

or after using Λ^{-1} where we get the original for the stress tensor

$$\boldsymbol{\sigma} = \int_0^t [\hat{\mathbf{E}}_{(1)} + \sum_{n=1}^6 \bar{\mathbf{B}}_{(2)}(\kappa_n) e^{-\kappa_n(t-\tau)}] \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \tau} d\tau, \quad (53)$$

where

$$\hat{\mathbf{G}}(t) = \hat{\mathbf{E}}_{(1)} + \sum_{n=1}^6 \bar{\mathbf{B}}_{(2)}(\kappa_n) e^{-\kappa_n t} \quad (54)$$

is a relaxation tensor. Of course, it is possible to use also the other types of rheological models, the various types can be found e.g. in [28] as Poynting – Thompson model, generalized Maxwell model, Voigt model with a finite number of fundamental matters, complex visco-elastic masses with several Voigt and Maxwell groups, etc.

While switch-over to the infinite number of fundamental masses the integro-differential models can be used.

6 CONCLUSION

Solid phase rheology, and especially its branch visco-elasticity and visco-plasticity, e.g. [3-6, 19, 23, 28] deals with deformation and stress analysis not only in steady state, but it observes also the time changes and time change velocities. It solves the relations between the stresses and strains, their time derivatives and time integrals. Various applications of the rheological process are synoptically presented in [19, 26, 34] where also the applications in industry, but also in medicine, in the diagnostic are introduced.

In this paper the differential operator form of constitutive equations are emphasized for linear visco-elastic anisotropic continuum with physical properties invariant in time. We focus to constitutive equations creation for material of so called 1st degree, where the stress tensor depends on the motion $\vec{x}(\vec{X}, t)$ namely by means of strain gradients. Derived procedures are applicable for isothermal boundary value problems [16].

The weakness is the numerical realization of the inverse Laplace integral transform, which a lot of literature is devoted to [9, 25, 27]. We can mention [23], where Λ transform perform the improved Schapery – Erdélyi method for analysis of layered half-space.

A special case, so called “time invariant aging theory” with application of the Schwartz distribution theory for linear problems was elaborated by Kovařík [18]. Suitable methods for viscoelastic properties modeling of structures made from real materials is the application of “weakly singular kernels” elaborated e.g. by Koltunov [17], in Slovakia by Sumec and Lichardus [30], Sumec and Potůček [31], respectively for practical applications of space and planar building structural elements.

Dedication: This paper is devoted by the first author to the memory of not lived 85th birthday of his teacher, friend and colleague Prof. Dr. Ing. Jozef Brilla, DrSc. D.Sc, Dr.h.c mult.

ACKNOWLEDGEMENT

This work was supported by the grant APVV 0814-10.

REFERENCES

- [1] BENČA, J. – KOSACZKÝ, E.: *Foundations of Modeling Theory*. /In Slovak/ Publ. House VEDA, Bratislava 1981.
- [2] BOLTZMANN, L.: Zur Theorie der elastischen Nachwirkung Sitzber. Acad. Wiss. Wien 70. S. 275 – 306. *Wiss. Abhand.* 1. S 616 – 639, 1874.
- [3] [BRILLA, J.: Linear Viscoelastic Bending of Anisotropic Plates. *ZAMM*, Sonderheft, Vol. 48, No. 10, 1968, pp 650 – 662.
- [4] BRILLA, J.: Viscoelastic Bending of Anisotropic Plates. /In Slovak/ *Bulding Journal*, ÚSTARCH SAV, 3, VII, 1969.
- [5] BRILLA, J.: Approximative Solution of Viscoelastic Bending of Anisotropic Plates /In Slovak/. *Contributions to the 70th Birthday of Academician K. Havelka*, Publishing House VEDA SAV, Bratislava 1970.
- [6] BRILLA, J. et al: The generalization of the FEM for the solution of viscoelastic two-dimensional problems. In: *IUTAM Symp.* Gothenburg 1974, Berlin, Heidelberg, New York, Springer Verlag 1975, pp. 229 – 241.
- [7] CHRISTENSEN, R.M.: *Theory of Viscoelasticity. An Introduction*. Academic Press, N.Y., London 1974.
- [8] COLEMAN, B. – NOLL, W.: Foundations of Linear Viscoelasticity. *Reviews of Modern Physics* 33 pp. 239 – 249, 1961.
- [9] COST, T. L.: Approximate Laplace Transforms Inversions in Viscoelastic Stress Analysis, *AIAA Journ.*, 2, p. 2157, 1964.
- [10] [ERINGEN, A.C.: *Mechanics of Continua*. New-York-London John Wiley and Sons, 1967.
- [11] FERRY, J. D.: *Viscoelastic Properties of Polymers*, 2nd ed., John Wiley and Sons., New York, 1970.
- [12] FINNIE, I. – HELLER, W.R.: *Creep of Engineering Materials*. Mc Graw – Hill. Book Co. Inc., N.Y. 1959.
- [13] GURTIN, M.E. – STERNBERG, E.: On the Linear Theory of Viscoelasticity. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 11, p. 291, 1962.
- [14] JOSEPH, D.D.: *Fluid Dynamics of Viscoelastic Liquids*. Appl. Math. Sci. Springer – Verlag, N.Y. 1990.
- [15] KAFKA, V.: Foundations of Theoretical Microrheology of Heterogeneous Materials /In Czech/ Academia, Prague 1984.

- [16] KARNAUCHOV, V.G. – KIRIČOK, I.F.: *Coupled problems of the theory of viscoelastic plates and shells*. /In Russian/ Publishing House “Naukovaja dumka”, Kijev 1986.
- [17] KOLTUNOV, M.A.: To the question of kernels selection for the solution of problems including the effects of creep and relaxation. /In Russian/ *Mechanics of Polymers*, 4, 1966.
- [18] KOVAŘÍK, V.: Problems of Viscoelasticity in the Theory of Planar Structures /In Czech/ Academia, Prague 1987.
- [19] LAKES, S.R.: *Viscoelastic Solids*, CRC – Press 1998.
- [20] LEE, E.H.: Stress analysis in viscoelastic bodies. *Quart of Appl. Math.*, 13, 2, 1955 pp. 183 – 190.
- [21] MAXWELL, J.C.: On the Dynamical Theory of Gases. *Phil. Trans. Roy. Soc.*, London, A 157, 1867.
- [22] MOSKOVITIN, V.: *The resistance of viscoelastic materials* /In Russian/, Moscow, Nauka 1972.
- [23] NOVOTNÝ, B. – HANUŠKA, A.: *Theory of Layered Halfspace*. /In Slovak/ Publ. House VEDA, Bratislava 1983.
- [24] ONSAGER, L.: *Phys. Rev.*, 37, 1931, p. 405
- [25] PIESSENS, R.: A bibliography on numerical inversion of the Laplace transform. [Rep. TW 20] Leuven, Appl. Math. Program. Dir. Katolik. Univ. 1974.
- [26] PROKOPOVIČ, I.E. – ZEDGENIDZE, V.A.: *Numerical Theory of Creep*. /In Russian/ Stroizdat, Moscow 1980.
- [27] SCHAPERLY, R.A.: Approximate Methods of Transform Inversion for Viscoelastic Stress Analysis, Proc., 4th U.S. Nat. Cong. Appl. Mech. 2, p. 1075, 1962.
- [28] SOBOTKA, Z.: *Rheology of Materials and Structures* /In Czech/. Academia, Prague 1981.
- [29] STAVERMAN A.J.,- SCHWARZ L, F.: Linear Deformation Behaviour of High Polymers, In: *Die Physik der Hochpolymeren* (Stuart H.A., ed.), Vol. 4 ch.J, Berlin 1956.
- [30] SUMEC, J.: Mechanics-Mathematical Modeling of Materials which Physical Properties are Time-dependent. /In Slovak/ *Internal Research Report*, III-3-4/9.4 USTARCH-SAV Bratislava 1983.
- [31] SUMEC, J. – POTÚČEK, M.: State of Stress – Strain of Structural Elements and Systems with Linear Viscoelastic Materials /In Slovak/. *Internal Research Report* III-3-4/9.5, ÚSTARCH SAV, Bratislava 1985.
- [32] THOMSON, W. /Lord Kelvin/ :Dynamical Problems Regarding Elastic Spheroidal Shells and Spheroids of Incompressible Liquid, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, London A 153 1863.
- [33] TRUESDELL, C. – TOUPIN, R.: The classical field theories. *Encyclopedia of Physics*, Vol. III/1. Springer Verlag, Göttingen, Heidelberg 1960.
- [34] VALENTA, J. et al: *Biomechanics* /In Czech/ Academia Prague 1985.
- [35] VOIGT, W.: Über die innere Reibung fester Körper, Insbesondere der Metalle, *Ann. Phys.*, 2. XLVII, 1892.

Rewievers:

Prof. Ing. Josef Jíra, CSc., Department of Mechanics and Materials, Faculty of Transportation Sciences, Czech Technical University in Prague.

Doc. Ing. Eva Kormaníková, PhD., Department of Structural Mechanics, Faculty of Civil Engineering, Technical University of Košice.

Miroslav SÝKORA¹, Milan HOLICKÝ², Jan KREJSA³

MODEL UNCERTAINTY FOR SHEAR RESISTANCE OF REINFORCED CONCRETE BEAMS WITH SHEAR REINFORCEMENT ACCORDING TO EN 1992-1-1

MODELOVÉ NEJISTOTY SMYKOVÉ ODOLNOSTI ŽELEZOBETONOVÝCH NOSNÍKŮ SE SMYKOVOU VÝZTUŽÍ PODLE EN 1992-1-1

Abstract

The submitted contribution is focused on the model uncertainty related to shear resistance of reinforced concrete beams with special shear reinforcement considering available test results. Variation of the model uncertainty with basic variables is analysed and significant variables are identified for the section-oriented formula provided in EN 1992-1-1. Proposed probabilistic description of the model uncertainty consists of the lognormal distribution having the coefficient of variation of about 0.25 and the mean significantly varying with the strength of shear reinforcement.

Keywords

Model uncertainty, shear resistance, reinforced concrete.

Abstrakt

Příspěvek se zaměřuje na modelové nejistoty smykové odolnosti železobetonových prvků se smykovou výztuží s využitím dostupných experimentálních dat. Analyzuje se závislost modelové nejistoty na základních veličinách pro výpočet smykové únosnosti podle EN 1992-1-1. Jsou identifikovány veličiny významně ovlivňující modelovou nejistotu. Pravděpodobnostní rozdělení modelové nejistoty je lognormální s variačním koeficientem 0.25 a různými průměrnými hodnotami závislými na odolnosti smykové výztuže.

Klíčová slova

Modelová nejistota, smyková odolnost, železobeton.

1 INTRODUCTION

Previous studies [1–4] indicated that structural resistances can be predicted by appropriate modelling of material properties, geometry variables and uncertainties associated with an applied model. The effect of variability of materials and geometry is relatively well understood and has been extensively investigated. However, improvements in the description of model uncertainties are still needed [4].

For reinforced concrete structures flexural resistances are predicted with a reasonable accuracy while accurate prediction of the shear resistances is difficult due to the uncertainties in the shear transfer mechanism, particularly after initiation of cracks [5]. Recently the model uncertainties of the

¹ Ing. Miroslav Sýkora, Ph.D., Czech Technical University in Prague, Klokner Institute, Department of Structural Reliability, Solinova 7, 16608 Prague, Czech Republic, e-mail: miroslav.sykora@klok.cvut.cz.

² Prof. Ing. Milan Holický, Ph.D., Czech Technical University in Prague, Klokner Institute, Department of Structural Reliability, Solinova 7, 16608 Prague, Czech Republic, e-mail: milan.holicky@klok.cvut.cz.

³ DrSc., Bc. Jan Krejsa, Czech Technical University in Prague, Klokner Institute, Department of Structural Reliability, Solinova 7, 16608 Prague, Czech Republic, e-mail: jan.krejsa@klok.cvut.cz.

shear resistance of beams without a special shear reinforcement have been analysed in several studies; an overview is provided in [6].

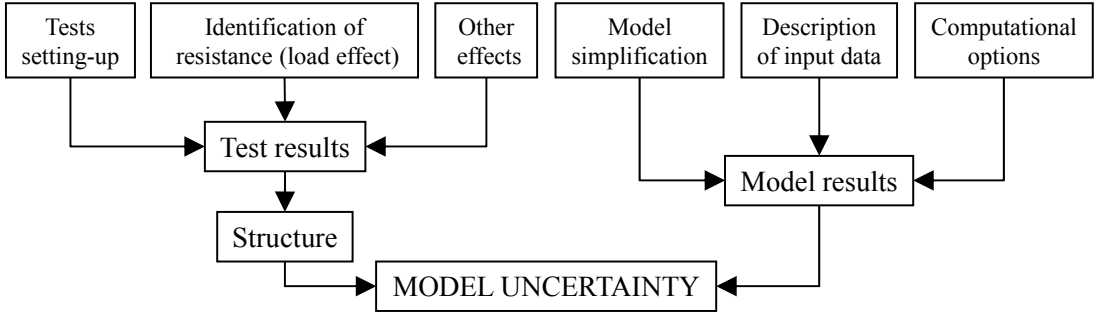


Fig. 1: General concept of the model uncertainty

The presented study is focused on the model uncertainties of the shear resistance of beams with a special shear reinforcement (such as stirrups or inclined bars, hereafter referred to as “shear reinforcement” to simplify the text). Simple engineering relationship for shear resistance provided in EN 1992-1-1 [7] is considered. Obtained results are critically compared with available experimental data.

2 MODEL UNCERTAINTY

According to [8] the model uncertainty is generally a random variable accounting for effects neglected in the models and simplifications in the mathematical relations. Model uncertainties can be related to:

- Resistance models (based on simplified or complex models such as the Finite Element analysis),
- Models for action effects (assessment of load effects and their combinations).

The model uncertainty can be obtained from comparisons of physical tests and model results. Actual structural conditions not covered by tests should be taken into account if needed. Obviously the model uncertainty should be associated with a computational model under consideration. General concept of the model uncertainty applicable to both resistance and load effect models is indicated in Fig. 1. Significance of factors affecting tests, model results and actual structural conditions depends substantially on the analysed structural member or load effect.

Only resistance models are addressed hereafter. Overview of factors affecting the uncertainty related to resistance models is given elsewhere [9].

In this study the model uncertainty θ is considered to be a random variable. The multiplicative relationship for θ is assumed in accordance with [8]:

$$R = \theta R_{\text{model}}(\mathbf{X}) \quad (1)$$

where:

R – denotes the response of a structure – actual resistance estimated from test results and structural conditions;

R_{model} – model resistance – estimate of the resistance based on a model; and

$\mathbf{X}^T = (X_1, \dots, X_m)$ – vector of basic variables X_i .

Note that an additive relationship or combination of the multiplicative and additive formulas may be used to assess the model uncertainty [8]. In more advanced analyses the model uncertainty may be represented by functions of several auxiliary random variables θ and variables X as considered e.g. in [5].

Assuming lognormal distribution with the origin at zero (hereafter simply “lognormal distribution”) for R and $R_{\text{model}}(\cdot)$, the model uncertainty given by relationship (1) is also lognormal. Its characteristics can be assessed using the method provided in Annex D of EN 1990 [10]. When few experimental data are available, Bayesian approaches can be used to combine these data with expert judgements.

The model uncertainty θ in general depends on basic variables X . Influence of individual variables on θ can be assessed by a regression analysis as described e.g. by [11]. It is also indicated that the model describes well the essential dependency of R on X only if the model uncertainty:

- Has either a suitably small coefficient of variation (how small is the question of the practical importance of the accuracy of the model) or
- Is statistically independent of the basic variables (X_1, \dots, X_m).

It may also be important to define ranges of the input parameters X for which the accepted model uncertainty is valid. Such intervals should be established on the basis of:

- Admissible ranges of \mathbf{X} for the model (for instance limits on reinforcement ratio) and
- Simplifications in modelling of θ (for instance when θ is considered independent of X_i for a specified interval of the basic variable).

3 UNCERTAINTIES RELATED TO THE MODEL PROVIDED IN EN 1992-1-1

3.1 Model in EN 1992-1-1

The model uncertainty should always be clearly associated with an assumed resistance model. In this section uncertainties related to the basic resistance model provided in EN 1992-1-1 [7] for beams with stirrups are considered:

$$R_{\text{model}}(\mathbf{X}) = \min_{1 \leq \cot \zeta \leq 2.5} [\rho_w b_w z f_{yw} \cot \zeta; \alpha_{cw} b_w z v_1 f_c / (\cot \zeta + \tan \zeta)] \quad (2)$$

where:

v_1 – denotes the strength reduction factor for concrete cracked in shear, $v_1 = 0.6$ for $f_c \geq 60$ MPa or $v_1 = \max[0.5; 0.9 - f_c / 200 \text{ MPa}]$ otherwise.

For the angle between concrete compression struts and the main tension chord, the symbol ζ is introduced here instead of θ used in EN 1992-1-1 [7] to avoid confusion with the symbol for model uncertainty. Notation of the basic variables is provided in Tab. 1. No axial compressive force is considered and actual concrete strengths instead of the characteristic value are applied in equation (2).

3.2 Database of experimental results

Researchers at the University of Stellenbosch collected a database of 222 tests of beams with shear reinforcement [12]. For 22 tests information on ρ_w and f_{yw} is missing and these test results are hereafter not considered. Overview of the experimental data is given in Tab. 1. The database covers a wide range of beams with low to high concrete strengths, shear reinforcement ratio, and effective depths. Beams with light, moderate and heavy longitudinal reinforcement are included.

It is worth noting that the database contains seven specimens with the longitudinal reinforcement of yield strength $f_y = 820$ MPa. Histogram of yield strengths in the whole database is shown in Fig. 2. Annex C of EN 1992-1-1 [7] indicates that the design rules of Eurocode are valid for reinforcement with the characteristic yield strength f_{yk} between 400 to 600 MPa. Therefore, the values of 820 MPa seem to be exceedingly high and these seven specimens are excluded from the database. Since the yield strength is not included in equation (2), the other specimens for which f_y is less significantly beyond the limits remain in the database for a statistical evaluation of the model uncertainty.

Tab. 1: Scatter of variables included in the database and parameters describing their influence on θ

Variable	Min.	Max.	ρ exp. (lin.)	R^2 exp. (lin.)
b_w (mm) – smallest width of a cross-section in the tensile area	76	457	0.14 (0.11)	0.02 (0.01)
d (mm) – effective depth	95	1200	-0.01 (-0.04)	0 (0)
s (mm) – stirrup spacing	48	600	0.03 (0.01)	0 (0)
$\rho_1 = A_{sl}/(b_w d) \leq 2$ (%) – longitudinal reinforcement ratio	0.5	4.54	0.07 (0.08)	0 (0.01)
$\rho_w = A_{sw}/b_{ws}$ (%) – shear reinforcement ratio	0.07	1.19	-0.69 (-0.60)	0.48 (0.37)
f_c (MPa) – concrete compressive strength	12.8	125	0.16 (0.14)	0.02 (0.02)
f_{yw} (MPa) – yield strength of stirrups	182	820	0.09 (0.05)	0.01 (0)
$\rho_w f_{yw}$ (MPa) – strength of shear reinforcement	0.21	2.62	-0.75 (-0.68)	0.56 (0.46)
a/d – shear span-to-depth ratio	2.49	5.05	0.12 (0.11)	0.02 (0.01)
V_{fail} (kN) – shear force at failure	15.6	1172.4	-0.02 (-0.04)	0 (0)

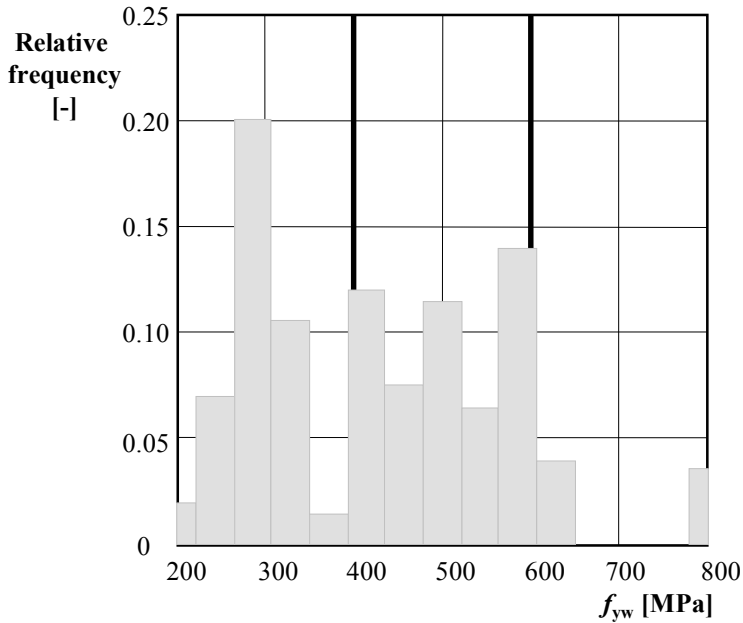


Fig. 2: Histogram of f_y for the whole database

Tab. 2: Sample characteristics of the model uncertainty

Description of the sample	m	v
Whole database, $n = 200$	1.32	0.34
Lightly reinforced beams ($\rho_w f_{yw} \leq 1$ MPa), $n = 147$	1.56	0.26
Moderately reinforced beams ($1 \text{ MPa} < \rho_w f_{yw} \leq 2$ MPa), $n = 45$	1.25	0.23
Heavily reinforced beams ($2 \text{ MPa} < \rho_w f_{yw}$), $n = 8$	0.76	0.20

3.3 Statistical evaluation of the model uncertainty

For each experiment the model resistance is assessed from equation (2) and the model uncertainty is evaluated from equation (1). Note that the first term in equation (2) is decisive for all the specimens. Sample characteristics of θ (mean m and coefficient of variation v), estimated for the whole database by the Annex D of EN 1990 [10], are given in Tab. 2. Limits for lightly, moderately and heavily reinforced beams are accepted from [13]. A lognormal distribution is accepted in accordance with [8].

To verify influence of basic variables (Tab. 1) on the model uncertainty, a simple sensitivity analysis as proposed in [12] is conducted for the present database. Trends in θ with a basic variable are assessed using:

- The correlation coefficient ρ (correlation between θ and X_i), and
- The coefficient of determination R^2 , a measure of the linear relationship between θ and X_i [14].

A combination of strong ρ (say, $|\rho| > 0.5$) and strong R^2 (say, $R^2 > 0.5$) indicates a significant linear relationship between θ and X whereas strong correlation with relatively weak R^2 suggests a non-linear relationship.

Regression analysis is based on a linear or exponential model described by the following relationships:

$$\text{linear: } \theta(\rho_w f_{yw}) = b_0 + b_1 \rho_w f_{yw} \quad (3)$$

$$\text{exponential: } \theta(\rho_w f_{yw}) = \exp(b_0 + b_1 \rho_w f_{yw}) \quad (4)$$

where:

b_0 and b_1 – denote regression parameters determined by the Least square method.

The results provided in Tab. 1 reveal strong correlations between θ and ρ_w or $\rho_w f_{yw}$ while weak correlations appear for the other shear parameters. The most influential parameter is strength of shear reinforcement $\rho_w f_{yw}$ ($\rho = -0.68$ and $R^2 = 0.46$ for linear regression; $\rho = -0.75$ and $R^2 = 0.56$ for exponential regression) as already recognised in [12,13]. For most of the shear parameters the exponential regression is a more appropriate model.

A multiple linear regression with all the shear parameters yields $R^2 = 0.68$ and somewhat improves the model of θ . However, the model uncertainty as a function of eight variables is impractical. Therefore, the influence of the longitudinal reinforcement ratio on θ is considered hereafter only. Fig. 3 shows the histogram of the strength of the shear reinforcement for the whole database. It appears that the database contains a sufficient number of the test results for light and medium reinforced beams while a limited amount of data is available for heavily reinforced beams (sample sizes are $n = 147, 45$ and 8 , respectively).

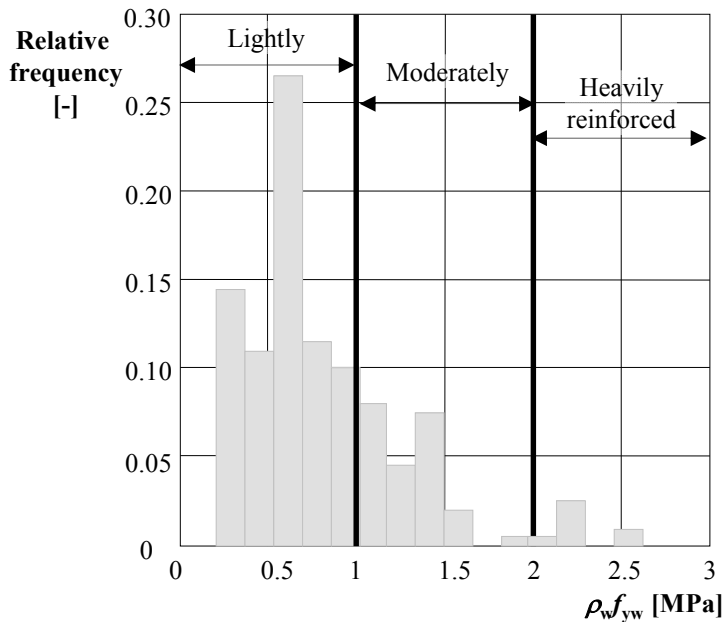


Fig. 3: Histogram of $\rho_w f_{yw}$ for the whole database

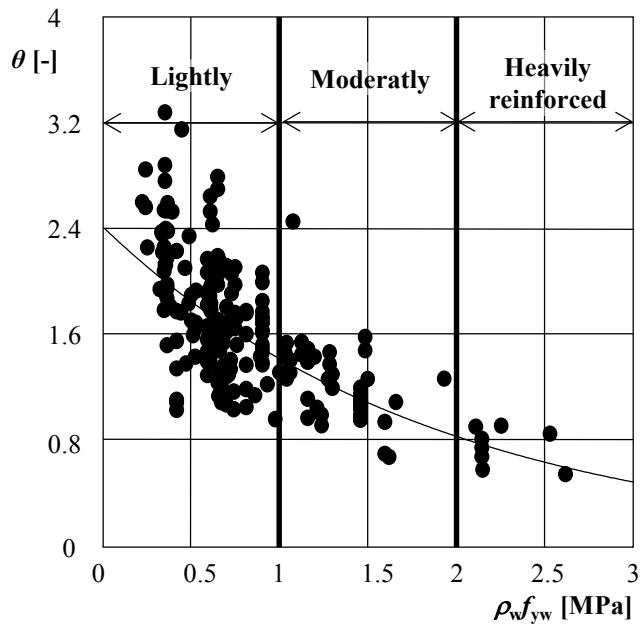


Fig. 4: Variation of θ with $\rho_w f_{yw}$ for the whole database

Fig. 4 shows variation of the model uncertainty with the strength of shear reinforcement based on the exponential regression. The model uncertainty clearly decreases with an increasing strength and its differentiation with respect to $\rho_w f_{yw}$ is thus proposed. Similar observations have been already made in [15] with an argument that the truss model in EN 1992-1-1 [7] may be unconservative for highly reinforced concrete members ($\rho_w f_y > 2$ MPa).

Sample characteristics of θ for light to heavy reinforced beams are provided in Tab. 2. It follows that the mean depends on the strength of shear reinforcement while the effect on the coefficient of variation is less significant.

Statistical testing of outliers is conducted to exclude measurements obtained under significantly different conditions or affected by errors. For each data group Grubb's test at a significance level of 0.05 [14] is performed; none of the 200 samples was excluded.

Based on the results given in Tab. 2 the following stochastic characteristics of θ may be accepted as a first approximation for the shear resistance of the members with shear reinforcement:

- lightly reinforced beams ($\rho_w f_{yw} \leq 1$ MPa): $\mu_\theta \approx 1.56$; $V_\theta \approx 0.26$,
- moderately reinforced beams (1 MPa $< \rho_w f_{yw} \leq 2$ MPa): $\mu_\theta \approx 1.25$; $V_\theta \approx 0.23$,
- heavily reinforced beams (2 MPa $< \rho_w f_{yw}$): $\mu_\theta \approx 0.76$; $V_\theta \approx 0.20$ (note that particularly these values are indicative since they are based on eight test results only).

4 MODEL UNCERTAINTY FACTOR FOR DETERMINISTIC RELIABILITY VERIFICATIONS

For deterministic reliability verifications, EN 1990 [10] introduces the partial factor γ_{Rd} to describe the uncertainty associated with the resistance model (“design value of the model uncertainty”). Fig. 5 illustrates the relationship between the probabilistic distribution of θ and factor γ_{Rd} . As an example the lognormal distribution (mean $\mu_\theta = 1.25$ and coefficient of variation $V_\theta = 0.25$) and the relevant model uncertainty factor $\gamma_{Rd} = 1.08$ (for $\beta = 3.8$) obtained from equation (6) (see the text below) are shown.

The model uncertainty factor γ_{Rd} for reinforced concrete structures can be obtained as a product of [16]:

$$\gamma_{Rd} = \gamma_{Rd1} \gamma_{Rd2} \tag{5}$$

where:

γ_{Rd1} – denotes the partial factor accounting for model uncertainty and

γ_{Rd2} – partial factor accounting for geometrical uncertainties.

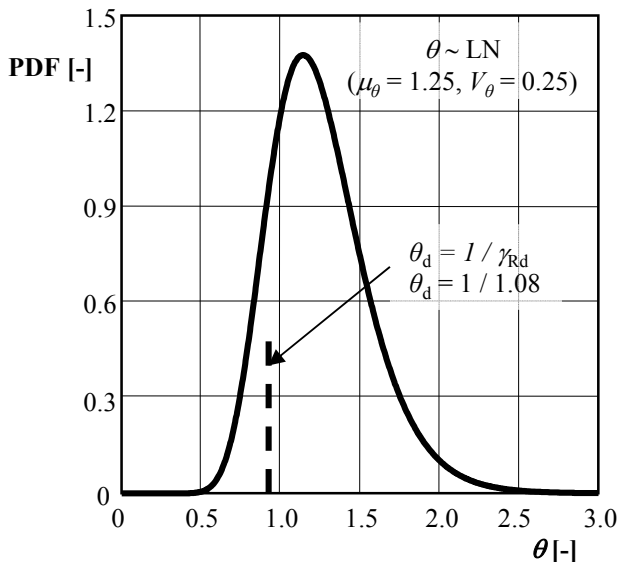


Fig. 5: Probability density function of θ and the model uncertainty factor γ_{Rd}

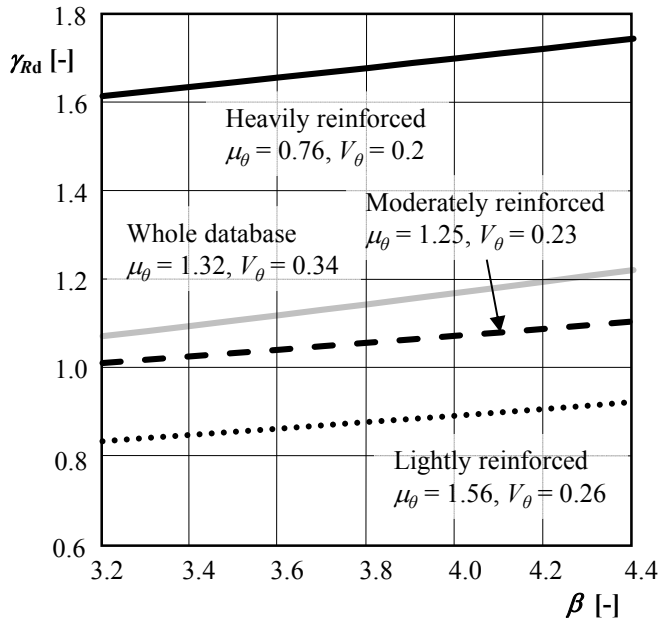


Fig. 6: Variation of the partial factor γ_{Rd} with β for $\alpha_R = 0.32$

EN 1992-1-1 [7] provides no specific recommendations concerning model uncertainties. EN 1992-2 [17] introduces the global safety format for a nonlinear analysis with the recommended model uncertainty factor of 1.06. However, it has been shown [4] that such a factor is rather low and should be increased in most cases depending on relevant failure mode (bending, shear, compression).

$\gamma_{Rd1} = 1.05$ for concrete strength and $\gamma_{Rd1} = 1.025$ for reinforcement may be assumed in common cases [16]. However, larger model uncertainty needs to be considered for punching shear in the case when concrete crushing is governing. A value of $\gamma_{Rd2} = 1.05$ may be assumed for geometrical uncertainties of the concrete section size or reinforcement position. When relevant measurements of an existing structure indicate insignificant variability of geometrical properties, $\gamma_{Rd2} = 1.0$ may be considered.

Alternatively, the partial factor γ_{Rd} can be obtained from the following relationship based on a lognormal distribution:

$$\gamma_{Rd} = 1/[\mu_{\theta} \exp(-\alpha_R \beta V_{\theta})] \quad (6)$$

where:

- α_R – denotes the FORM sensitivity factor and
- β – target reliability index according to EN 1990 [10].

Considering the statistical characteristics of the model uncertainty given in Tab. 2, variation of the partial factor γ_{Rd} obtained from equation (6) with the target reliability β for $\alpha_R = 0.4 \times 0.8 = 0.32$ (“non-dominant resistance variable”) is indicated in Fig. 6.

It follows from Fig. 6 that the model uncertainty factor γ_{Rd} increases with an increasing target reliability index β . For the considered range of β from 3.2 to 4.4 the model uncertainty varies approximately within the following intervals:

- 0.84–0.93 for lightly reinforced members ($\gamma_{Rd} \approx 0.9$ as a first approximation),
- 1.02–1.10 for moderately reinforced members ($\gamma_{Rd} \approx 1.1$ may be commonly accepted),
- 1.61–1.75 for heavily reinforced members ($\gamma_{Rd} \approx 1.7$ as a first approximation).

The selection of $\alpha_R = 0.32$ deserves additional comments. Leading and accompanying actions (with associated factors $\alpha_E = -0.7$ and $\alpha_E = -0.4 \times 0.7 = -0.28$, respectively) are distinguished in Annex C of EN 1990 [10] while $\alpha_R = 0.8$ is recommended for resistance variables under the conditions specified in the Eurocode. When the model uncertainty factor γ_{Rd} and material factor γ_m are assessed separately considering $\alpha_R = 0.8$, overly conservative designs may be obtained. Therefore, CEB bulletin [18] and ISO 2394 [19] considered the model uncertainty as a non-dominant resistance variable and accepted the reduction $\alpha_R = 0.4 \times 0.8 = 0.32$. Note that the value α_R significantly affects the partial factor γ_{Rd} [9].

5 CONCLUDING REMARKS

It appears that description of uncertainties related to resistance and load effect models can be a crucial problem of reliability analyses. The present paper is particularly focused on the model uncertainties in shear resistance of beams with shear reinforcement; the following concluding remarks are drawn:

- The model uncertainty should be related to test uncertainties, to actual structural conditions and computational model under consideration.
- In common cases actual resistance can be estimated as a product of the model uncertainty and resistance obtained by the model.
- Uncertainties related to models provided in EN 1992-1-1 [7] can be described by the following statistical characteristics and partial factors:
 - lightly reinforced beams ($\rho_w f_{yw} \leq 1$ MPa): $\mu_\theta \approx 1.6$; $V_\theta \approx 0.25$ and $\gamma_{Rd} \approx 0.9$,
 - moderately reinforced beams ($1 \text{ MPa} < \rho_w f_{yw} \leq 2$ MPa): $\mu_\theta \approx 1.25$; $V_\theta \approx 0.25$ and $\gamma_{Rd} \approx 1.1$,
 - heavily reinforced beams ($2 \text{ MPa} < \rho_w f_{yw}$): $\mu_\theta \approx 0.8$; $V_\theta \approx 0.2$ and $\gamma_{Rd} \approx 1.7$ (particularly these values are indicative since they are based on eight test results only).

ACKNOWLEDGEMENTS

This study is an outcome of the research project P105/12/2051 Model uncertainties in resistance assessment of concrete structures, supported by the Czech Science Foundation.

REFERENCES

- [1] BERTAGNOLI, G., GIORDANO, L. & MANCINI, G. Safety format for the nonlinear analysis of concrete structures. *Studi e ricerche – Politecnico di Milano. Scuola di specializzazione in costruzioni in cemento armato*. 2004, Vol. 2004, Nr. 25, pp. 31–56. ISSN 1121-6069.
- [2] ČERVENKA, V. Global Safety Format for Nonlinear Calculation of Reinforced Concrete. *Beton – und Stahlbetonbau*. 2008, Vol. 103, Nr. 2008, pp. 37–42.
- [3] SCHLUNE, H., PLOS, M. & GYLLTOFT, K. Safety formats for nonlinear analysis tested on concrete beams subjected to shear forces and bending moments. *Eng. Struct.* 2011, Vol. 33, Nr. 8, pp. 2350–2356. ISSN 0141-0296.
- [4] SÝKORA, M. & HOLICKÝ, M. Safety format for non-linear analysis in the model code – verification of reliability level. In *Proc. fib Symp. PRAGUE 2011 Concrete engineering for excellence and efficiency*. Prague: Czech Concrete Society, 2011, pp. 943–946. ISBN 978-80-87158-29-6.
- [5] SONG, J., KANG, W., KIM, K.S. & JUNG, S. Probabilistic shear strength models for reinforced concrete beams without shear reinforcement. *Struct Eng Mech.* 2010, Vol. 34, Nr. 1, pp. 15–38.

- [6] SYKORA, M. & HOLICKY, M. Assessment of the model uncertainty in shear resistance of reinforced concrete beams without shear reinforcement. *Transactions of the VSB – Technical University of Ostrava, Civil Engineering Series*. 2013, Vol. XII, Nr. 2, pp. 195–204. ISSN 1213-1962.
- [7] EN 1992-1-1. *Design of concrete structures – Part 1-1: General rules and rules for buildings*, 2004. 225 pp.
- [8] JCSS. *JCSS Probabilistic Model Code*. Zurich: Joint Committee on Structural Safety, 2001. ISBN 978-3-909386-79-6.
- [9] SYKORA, M., CERVENKA, V. & HOLICKY, M. Uncertainties of resistance models for reinforced concrete structures. In *Proc. fib Symposium Tel Aviv 2013*. Tel Aviv: Technion, 2013, pp. 221–224. ISBN 978-965-92039-0-1.
- [10] EN 1990. *Eurocode – Basis of structural design*, 2002. 87 pp.
- [11] DITLEVSEN, O. & MADSEN, H.O. *Structural Reliability Methods*. Chichester: John Wiley & Sons, 1996. 372 pp. ISBN 0471960861.
- [12] MENSAH, K.K. *Reliability Assessment of Structural Concrete with Special Reference to Shear Resistance (MSc thesis)*. Stellenbosch, South Africa: University of Stellenbosch, 2012. 225 pp.
- [13] CLADERA, A. & MARÍ, A.R. Shear strength in the new Eurocode 2. A step forward? *Struct Concrete*. 2007, Vol. 26, Nr. 7, pp. 917–66. ISSN 1464-4177.
- [14] ANG, A.H.S. & TANG, W.H. *Probabilistic Concepts in Engineering Emphasis on Applications to Civil and Environmental Engineering*. USA: John Wiley & Sons, 2007. 420 pp. ISBN 978-0-471-72064-5.
- [15] CLADERA, A. & MARÍ, A.R. Shear design procedure for reinforced normal and high-strength concrete beams using artificial neural networks. Part II: beams with stirrups. *Eng. Struct.* 2004, Vol. 26, Nr. 7, pp. 927–936. ISSN 0141-0296.
- [16] *fib SAG 9. Revision of partial safety factors (report)*. 2010. 6 pp.
- [17] EN 1992-2. *Eurocode 2 – Design of concrete structures – Part 2: Concrete bridges – Design and detailing rules*, 2005. 95 pp.
- [18] TAERWE, L. *Towards a consistent treatment of model uncertainties in reliability formats for concrete structures*. Lausanne: CEB, 1993. pp. 344–61 ISBN 978-2-88394-085-7.
- [19] ISO 2394. *General principles on reliability for structures*, 1998. 73 pp.

Reviewers:

Prof. Ing. Zbyněk Keršner, CSc., Institute of Structural Mechanics, Faculty of Civil Engineering, Brno University of Technology.

Ing. Veselý Václav, Ph.D., Department of Structural Mechanics, Faculty of Civil Engineering, VŠB-Technical University of Ostrava.

Jan VALEŠ¹

VLIV NÁHODNÉHO ZAKŘIVENÍ OSY NA ÚNOSNOST TENKOSTĚNNÉHO PRUTU

EFFECT OF RANDOM AXIAL CURVATURE OF A THIN-WALLED BEAM ON ITS LOAD-CARRYING CAPACITY

Abstrakt

Tento článek se zabývá analýzou únosnosti tlačенého ocelového prutu tenkostěnného otevřeného i uzavřeného průřezu, jehož osa je náhodně prostorově zakřivená. Počáteční zakřivení je modelováno náhodným polem za pomoci metody LHS. Únosnost tlačенého prutu je pak vypočítána geometricky nelineárním řešením v programu ANSYS. Výsledky jsou prezentovány jak v histogramech, tak v tabulce a je provedeno srovnání únosností prutů jednotlivých průřezů mezi sebou a s hodnotami návrhové únosnosti podle normy.

Klíčová slova

Únosnost, počáteční zakřivení, náhodné pole, mezní stav, tenkostěnný prut, napětí, deplanace.

Abstract

The paper deals with the analysis of load-carrying capacity (LCC) of a steel beam under compression which axis is randomly spatially curved. Open and close thin-walled cross-sections are considered for the beam, respectively. The initial curvature is modelled by a random field. The Latin Hypercube Sampling Method was applied. The load carrying capacity is calculated by geometrically nonlinear solution by ANSYS software. The results are presented both in histograms and in a table. The LCC statistical characteristics of beams with open and closed cross-sections have been compared. A comparison with the LCC according to the standards is carried out as well.

Keywords

Load carrying capacity, initial curvature, random field, limit state, thin-walled member, stress, warping.

1 ÚVOD

Počáteční zakřivení prutů je většinou modelováno ve tvaru jedné půlvlny funkce sinus. Pro tyto případy máme k dispozici řešení v explicitním tvaru [1,2], a tudíž není obtížné vypočítat únosnost z funkce odezvy, je-li zadána amplituda počátečního zakřivení e_0 . Explicitní řešení je možné tehdy, je-li deformace osy zatíženého prutu afinní k počátečnímu zakřivení. Není však pravidlem, že počáteční osové zakřivení musí být ve tvaru sinové půlvlny. Ve skutečnosti se mnohem častěji setkáváme s obecným zakřivením, a to nejen rovinným, ale především prostorovým. Pro takové případy nelze získat explicitní řešení, neboť osa deformovaného prutu není afinní k počátečnímu zakřivení [3].

Tento článek se zabývá analýzou únosnosti tlačенého ocelového prutu, jehož osa je náhodně prostorově zakřivená. Pro tento prut je zvolen symetrický tenkostěnný průřez, a to jak uzavřený, tak otevřený. S namáháním prutů takového průřezu je spojeno vázané kroucení. To vzniká v případě,

¹ Ing. Jan Valeš, Ústav stavební mechaniky, Fakulta stavební, Vysoké učení technické v Brně, Veveří 331/95 602 00 Brno, tel.: (+420) 541 147 116, e-mail: vales.j@fce.vutbr.cz.

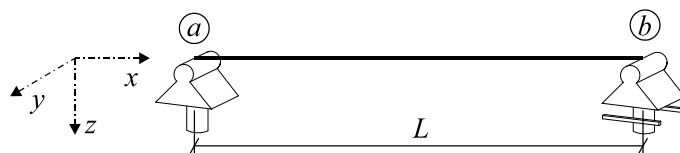
bráníme-li deplanci. Deplanci může omezovat např. konstrukční uspořádání (vazby bránící deplanci), změna krouticího momentu podél osy prutu či změna tvaru a rozměrů průřezu podél osy prutu. Vázané kroucení může vzniknout i tehdy, je-li prut namáhán příčným zatížením, neprocházejícím středem smyku, či excentricky působícím podélným zatížením. V těchto případech je vázané kroucení kombinováno s ohybem, smykem, tlakem či tahem a dochází k obecnému ohybově-torznímu namáhání.

Při řešení tenkostěnných prutů se vycházelo z předpokladu tuhého průřezu, jehož geometrie se vlivem namáhání nemění. Únosnost tlačенého prutu pak byla vypočítána geometricky nelineárním řešením v programu ANSYS.

2 VÝPOČTOVÝ MODEL

Byl uvažován oboustranně kloubově uložený prut o délce $L = 2,798$ m. Jeho únosnost byla vyšetřována pro hodnotu relativní štíhlosti $\bar{\lambda} = 1,0$, která je v závislosti na délce prutu a poloměru setrvačnosti průřezu definována v normě EUROCODE 3.

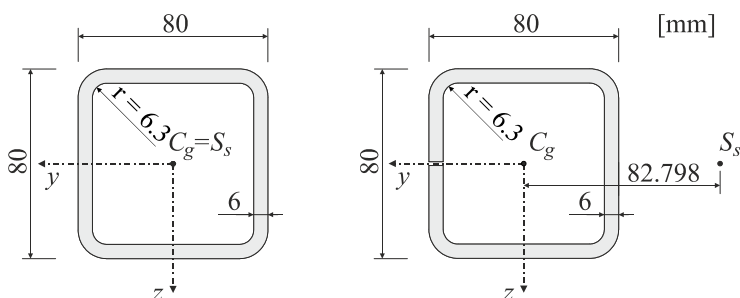
K analýze únosnosti tohoto prutu byl v programu ANSYS použit prutový prvek BEAM188 se sedmi stupni volnosti (3 stupně volnosti odpovídají posunům v osách x , y , z , další 3 rotacím kolem těchto os a 7. stupeň volnosti odpovídá deplanci). Schéma prutu je na obr. 1. V uzlu a je zamezeno posunům ve směru všech tří os a rotaci kolem osy x , v uzlu b je zamezeno posunům ve směru osy y a z a rotaci kolem osy x . Dále je uvažováno, že oba koncové průřezy v uzlech a i b nemohou deplanovat, aby model co nejvíce odpovídal skutečnému laboratornímu experimentu. Model je následně zatěžován posunem v uzlu b ve směru osy x . V uzlu a je pak odečítána hodnota reakce ve směru x pro stanovení únosnosti (viz kap. 3).



Obr. 1: Schéma prutu

2.1 Použité průřezy

V dané úloze byly použity dva symetrické čtvercové tenkostěnné průřezy, přičemž první byl uzavřený a druhý otevřený (uprostřed jedné strany byl vytvořen zářez). Průřezy jsou zobrazeny na obr. 2. Prut je modelován tak, že jeho osa prochází těžištěm průřezu.



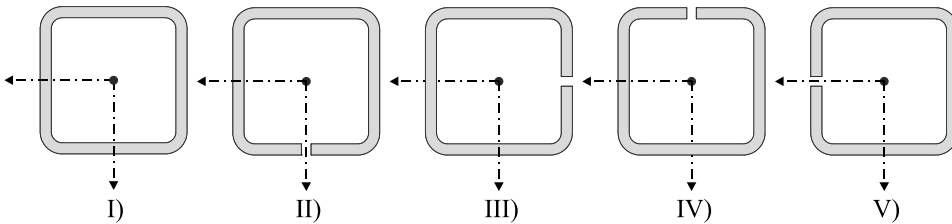
Obr. 2: Použité průřezy: vlevo uzavřený, vpravo otevřený (se zářezem)

Uzavřený průřez je symetrický podle obou os, a tak poloha těžiště C_g odpovídá poloze středu smyku S_s . U otevřeného průřezu se poloha středu smyku posunula podle obr. 2 vpravo. Průřezové charakteristiky obou průřezů jsou uvedeny v tab. 1.

Tab. 1: Vybrané průřezové charakteristiky

Průřezová charakteristika	Uzavřený průřez	Otevřený průřez
Plocha A [m ²]	$1,6799 \cdot 10^{-3}$	$1,6787 \cdot 10^{-3}$
Moment setrvačnosti I_y [m ⁴]	$1,4865 \cdot 10^{-6}$	$1,4848 \cdot 10^{-6}$
Moment setrvačnosti I_z [m ⁴]	$1,4865 \cdot 10^{-6}$	$1,4865 \cdot 10^{-6}$
Výsečový moment setrvačnosti I_{ω} [m ⁶]	$2,8264 \cdot 10^{-12}$	$6,0957 \cdot 10^{-9}$

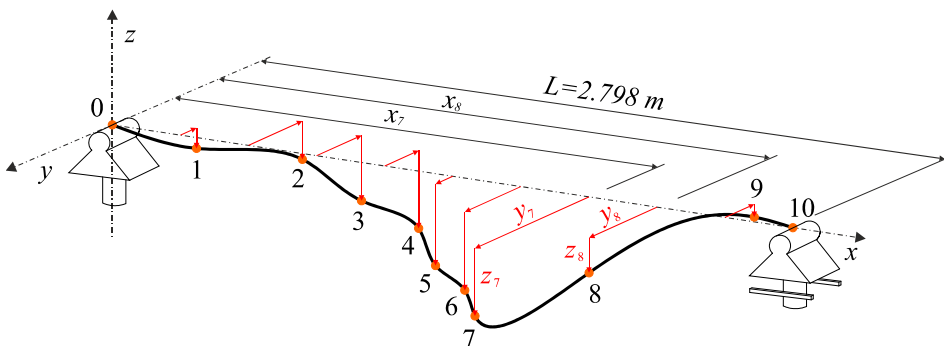
Pro každou realizaci prostorového zakřivení osy prutu (viz kapitola 2.2) je pak použito těchto průřezů. Vzhledem k tomu, že počáteční zakřivení je zde nezávislé na použitém profilu, je otevřený průřez pokládán do čtyř pozic, vzniklých pootočením pokaždé o 90°. Únosnost prutu dané realizace je pak vypočítána pro pět průřezů podle obr. 3.



Obr. 3: Průřezy prutu - označení

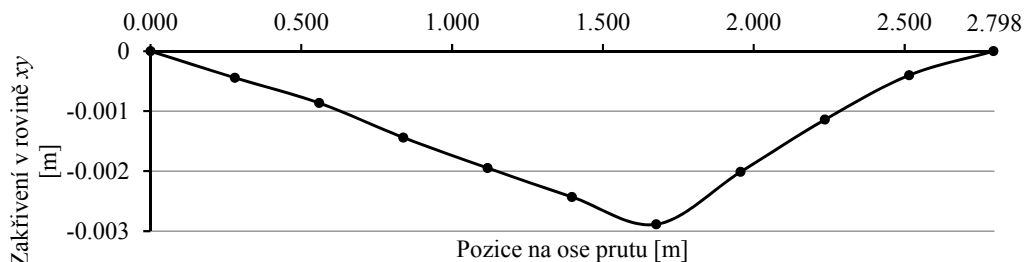
2.2 Náhodné vstupní veličiny a náhodné pole počátečního osového zakřivení

U meze kluzu f_y bylo uvažováno Gaussovo rozdělení hustoty pravděpodobnosti se střední hodnotou 297,3 MPa a směrodatnou odchylkou 16,8 MPa [4]. Počáteční zakřivení osy prutu bylo modelováno pomocí jedenácti uzlů, kterými byl proložen spline – obr. 4. Každý z těchto uzlů měl Gaussovo rozdělení hustoty pravděpodobnosti s nulovou střední hodnotou a směrodatnou odchylkou $0,0015248 \sin(\pi x_i / 2,798)$ m, kde x_i je pozice na ose prutu. Hodnota 0,0015248 byla vypočtena z předpokladu, že se v tolerančních mezích $\pm 0,15 \% L$ nachází 95 % realizací maximální počáteční prostorové deformace, přičemž délka prutu L je parametr výpočtu. Hodnoty souřadnic v každé ze dvou rovin jsou vzájemně korelovány prostřednictvím korelační matice. Ta představuje náhodné pole s korelační délkou $L_{cor} = 1,44165$ m. Korelace je uvažována pouze mezi hodnotami souřadnic uzlů v jedné rovině. Jinými slovy, zakřivení v jedné rovině je nezávislé na zakřivení v druhé rovině. Náhodné realizace jak mezi kluzu, tak počátečního zakřivení byly simulovány metodou Latin Hypercube Sampling [5,6], která je implementovaná v programu Freet.

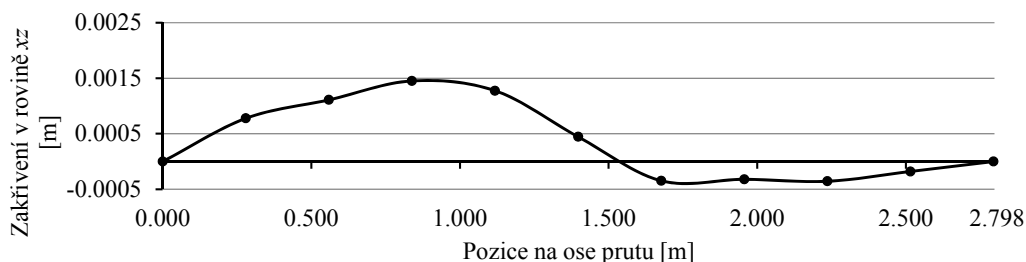


Obr. 4: Definování prostorového zakřivení osy prutu

Ostatní vstupní veličiny – modul pružnosti oceli E a geometrické charakteristiky průřezu – byly uvažovány jako deterministické a byly vzaty svými průměrnými hodnotami. Ve výpočtu se následně hledala síla, pro niž bude pro danou realizaci počátečního osového zakřivení prutu dosaženo dané realizace meze kluzu. Bylo simulováno 60 náhodných realizací zakřivení prutů a 60 náhodných realizací meze kluzu. Každé realizaci prutu náležela právě jedna realizace meze kluzu. Příklad jedné realizace počátečního zakřivení osy prutu je zobrazen na obr. 5 a obr. 6.



Obr. 5: Zakřivení osy prutu v rovině xy pro jednu náhodnou realizaci



Obr. 6: Zakřivení osy prutu v rovině xz pro jednu náhodnou realizaci

3 NAPJATOST A MEZNÍ STAV

Při zatěžování se prut nachází ve stavu složené napjatosti. Pro posouzení únosnosti je potřeba znát, kdy se napjatost blíží mezní napjatosti v materiálu, v našem případě mezi kluzu f_y . Za mezní podmínku byla použita Missesova (Huberova, Henckyho) podmínka plasticity ve tvaru:

$$f = \bar{\sigma} - \sigma_0 = 0 \quad (1)$$

kde:

$\bar{\sigma}$ – je ekvivalentní napětí [Pa], jež je:

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)]} \quad (2)$$

a σ_0 odpovídá f_y . Při řešení prutovým modelem se předpokládá, že $\sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = 0$. Vzorec (2) se tak zredukuje na tvar:

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\sigma_x^2 + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{zx}^2)}. \quad (3)$$

Přestože se ocel může dostávat do plastického stavu a v něm působit, je plastická rezerva v podobném případě velmi malá (přibližně 3 %). Proto je v tomto příkladu za mezní stav považován stav na mezi pružnosti, t.j. stav, kdy se ještě neobjeví plastická deformace. Mezní stav tak nastane, je-li dosaženo meze kluzu f_y .

3.1 Napětí v otevřených tenkostěnných průřezích

Zjednodušující předpoklad o deformaci tenkostěnného otevřeného profilu je, že se průřez ve své rovině přemístí jako tuhý celek. Toto přemístění je výsledek posunů v , w ve směrech os souřadnic y , z a pootočení ω_x kolem jistého pevného bodu. Derivací tuhého pootočení dostaneme relativní úhel zkroucení:

$$\frac{d\omega_x}{dx} = \Theta. \quad (4)$$

Posun ve směru x je dán:

$$u = u_0 - \frac{dv}{dx}y - \frac{dw}{dx}z - \frac{d\omega_x}{dx}\omega(s) = u_0 - v'y - w'z - \Theta\omega(s). \quad (5)$$

Poměrnou podélnou deformaci lze pak určit jako:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = u'_0 - v''y - w''z - \Theta'\omega(s). \quad (6)$$

Složku σ_x počítáme jako při přímkové napjatosti. Po dosazení poměrné podélné deformace podle (6) dostáváme:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = E[u'_0 - v''y - w''z - \Theta'\omega(s)]. \quad (7)$$

Podmínky ekvivalence jsou:

$$\int_A \sigma_x dA = N_x, \quad (8)$$

$$\int_A \sigma_x y dA = -M_z, \quad (9)$$

$$\int_A \sigma_x z dA = M_y, \quad (10)$$

$$\int_A \sigma_x \omega(s) dA = B, \quad (11)$$

kde:

B – je bimoment [Nm^2].

Pro hlavní výsečové souřadnice a centrální osy lze podmínky ekvivalence přepsat:

$$N_x = EAu'_0, \quad (12)$$

$$-M_z = -EI_z v'' - EI_{yz} w'', \quad (13)$$

$$M_y = -EI_{yz} v'' - EI_y w'', \quad (14)$$

$$B = -EI_\omega \Theta'. \quad (15)$$

Konečné normálové napětí v tenkostěnném otevřeném průřezu lze pak vyjádřit:

$$\sigma_x = \frac{N_x}{A} - \frac{M_z}{I_z}y + \frac{M_y}{I_y}z + \frac{B}{I_\omega}\omega. \quad (16)$$

Při vázaném kroucení vznikají v příčných i podélných řezech sekundární tečná napětí, která se superponují s primárními, odpovídajícími volnému kroucení. Primární tečné napětí se mění lineárně podél tloušťky průřezu a je dáno výrazem:

$${}^1\tau_{xs} = \frac{2^1M_x}{I_t}n \quad (17)$$

kde:

1M_x – je krouticí moment odpovídající volnému kroucení [Nm],

n – je souřadnice měřená ve směru normály ke střednici [m],

I_t – je moment setrvačnosti v kroucení [m^4].

Sekundární tečné napětí ${}^2\tau_{xs}$ se podél tloušťky průřezu rozděluje rovnoměrně a jsou-li opět osy souřadnic hlavními centrálními osami, vyjádří se toto napětí jako:

$${}^2\tau_{xs} = \frac{1}{t} \left(V_y \frac{\bar{S}_z}{I_z} + V_z \frac{\bar{S}_y}{I_y} + {}^2M_x \frac{\bar{S}_\omega}{I_\omega} \right) \quad (18)$$

kde:

t – je tloušťka průřezu [m],

V_y, V_z – jsou posouvající síly [N],

\bar{S}_y, \bar{S}_z – jsou statické momenty neúplné průřezové plochy [m^3],

\bar{S}_ω – je výsečový statický moment neúplné průřezové plochy [m^4],

2M_x – je ohybově krouticí moment [Nm].

Celkové tečné napětí v tenkostěnném otevřeném průřezu dostaneme součtem výrazů (17) a (18):

$$\tau_{xs} = {}^1\tau_{xs} + {}^2\tau_{xs} = \frac{{}^2M_x}{I_t} n + \frac{1}{t} \left(V_y \frac{\bar{S}_z}{I_z} + V_z \frac{\bar{S}_y}{I_y} + {}^2M_x \frac{\bar{S}_\omega}{I_\omega} \right). \quad (19)$$

3.2 Napětí v uzavřených tenkostěnných průřezích

Podobně jako u prutů otevřeného průřezu můžeme předpokládat, že se tvar obrysu příčných řezů během přetvoření nezmění. Při vázaném kroucení nelze předpokládat, že deplanace je úměrná poměrnému úhlu zkroucení Θ , jako tomu bylo u průřezů otevřených. Lze však předpokládat, že deplanace řezu v místě x je dána součinem jednotkové deplanace a deplanační funkce $f(x)$. Posun obecného bodu nosníku, určeného souřadnicí x příslušného řezu a souřadnicí s na střednici tenkostěnného průřezu lze vyjádřit vztahem:

$$u(x, s) = -f(x)\bar{\omega}(s) \quad (20)$$

kde:

s – je délka střednice přímého úseku,

$\bar{\omega}(s)$ – je záporně vzatá jednotková deplanace [m],

$f(x)$ – je deplanační funkce.

Za předpokladu, že podélná vlákna na sebe při přetvoření vzájemně nepůsobí, je normálové napětí v příčných řezech, odpovídající jejich deplanaci:

$$\sigma_x = E \frac{\partial u}{\partial x} = -E\bar{\omega}(s)f'(x) \quad (21)$$

Bimoment je pro uzavřený průřez definován výrazem

$$B(x) = -EI_\omega f'(x) = \int_A \sigma_x \bar{\omega} dA \quad (22)$$

kde:

I_ω – je deplanační moment setrvačnosti [m^6].

Pro normálové napětí při vázaném kroucení kombinací rovnic (21) a (22) dostaneme

$$\sigma_x = \frac{B(x)\bar{\omega}(s)}{I_\omega}. \quad (23)$$

Vzhledem k tomu, že v průřezu působí též normálová síla a ohybové momenty, je výsledné normálové napětí dáno superpozicí všech těchto dílčích napětí obdobně jako u prutů otevřeného průřezu takto:

$$\sigma_x = \frac{N_x}{A} - \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z + \frac{B(x)\bar{\omega}(s)}{I_{\bar{\omega}}} \quad (24)$$

Pro tečné napětí při volném kroucení uzavřených průřezů platí vztah

$${}^1\tau_{xs} = \frac{{}^1M_x}{2A_0t} \quad (25)$$

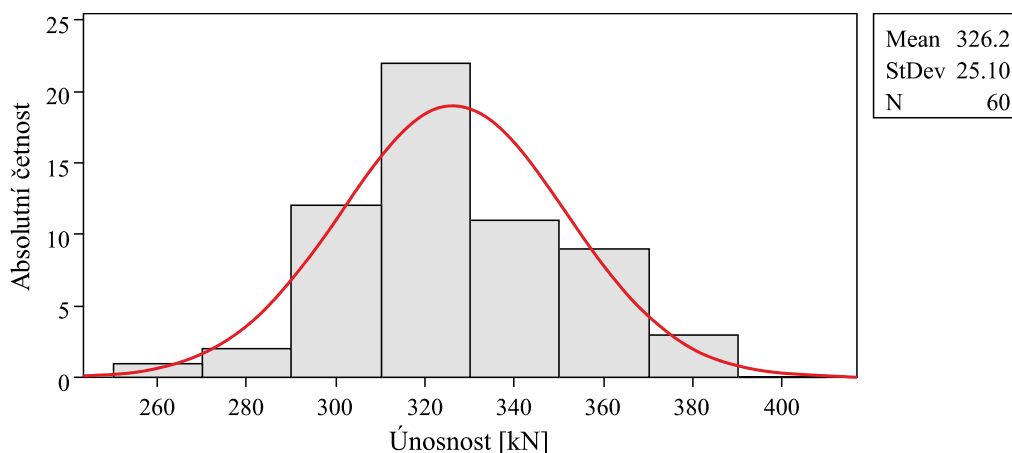
kde:

A_0 – je plocha omezená střednicí průřezu [m²].

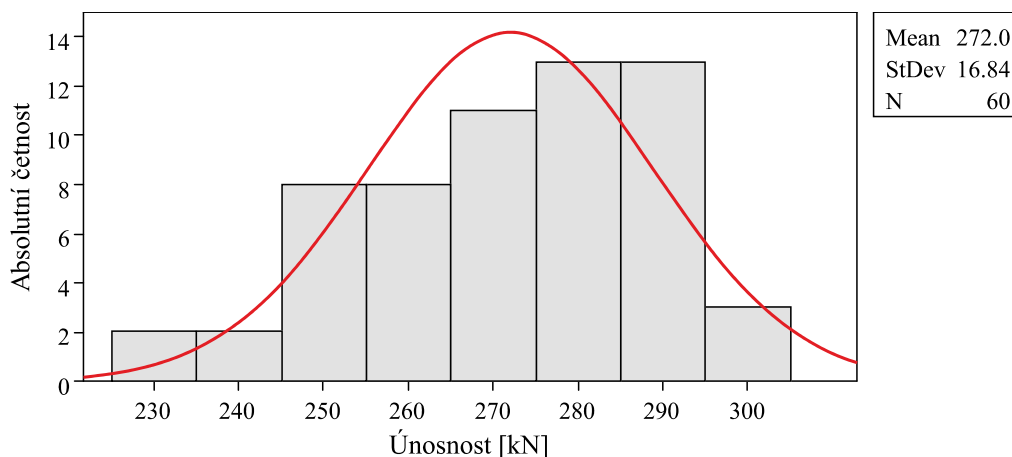
Výsledné tečné napětí je opět dáno superpozicí primárního a sekundárního napětí od vázaného kroucení a tečného napětí od ohybu.

4 ÚNOSNOST

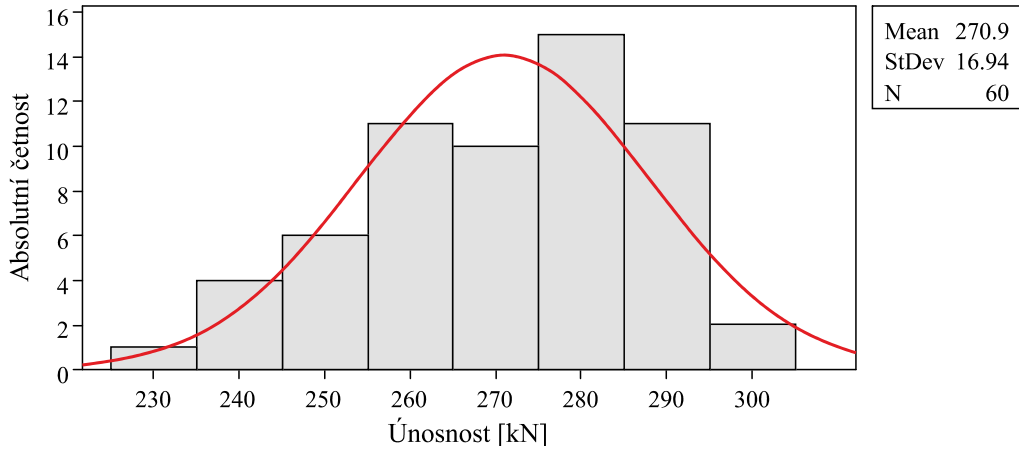
Hodnoty únosnosti všech šedesáti náhodných realizací prutu jsou prezentovány v histogramech na obr. 7 až obr. 11. Těmito histogramy lze s dostatečnou přesností proložit Gaussovo rozdělení pravděpodobnosti. Chí-kvadrát testem dobré shody na hladině významnosti 5 % nezamítáme hypotézu o normalnosti rozdělení pro žádný z průřezů.



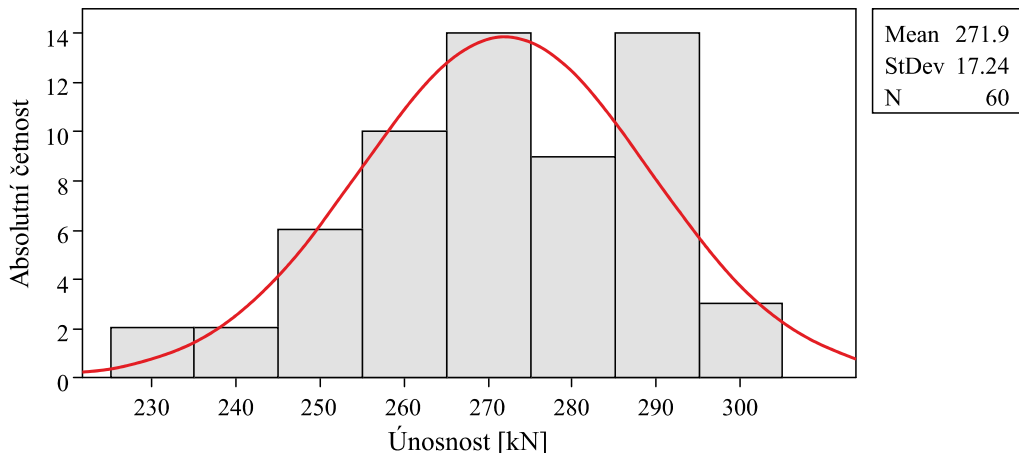
Obr. 7: Histogram únosnosti prutů s průřezem č. I (uzavřený průřez)



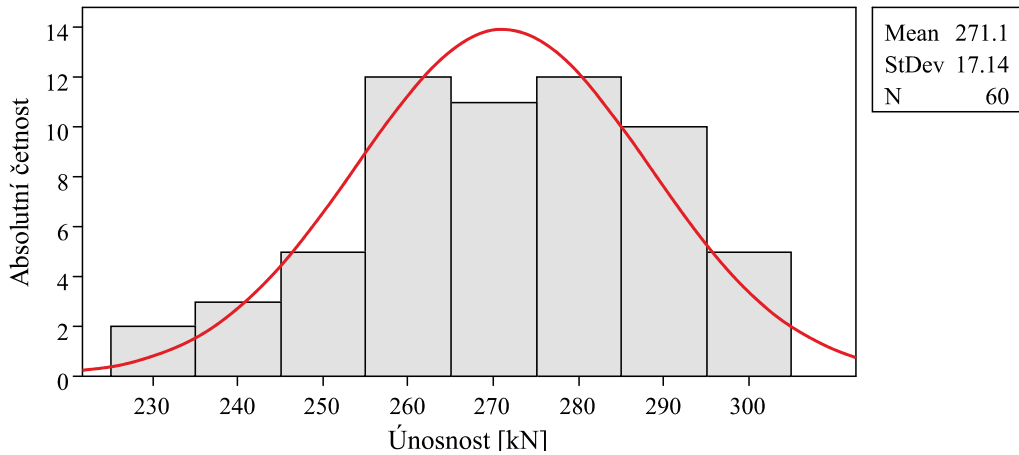
Obr. 8: Histogram únosnosti prutů s průřezem č. II (otevřený průřez)



Obr. 9: Histogram únosnosti prutů s průřezem č. III (otevřený průřez)



Obr. 10: Histogram únosnosti prutů s průřezem č. IV (otevřený průřez)



Obr. 11: Histogram únosnosti prutů s průřezem č. V (otevřený průřez)

Rozšířená statistika únosnosti je v tab. 2. Na základě normy EN1990 je návrhová únosnost vypočítána jako 0,1% kvantil, je-li návrhový index spolehlivosti $\beta_d = 3,8$. Tab. 2 proto obsahuje i hodnotu 0,1% kvantilu normálního rozdělení.

Tab. 2: Statistika únosnosti

Průřez	Střední hodnota [kN]	Směrodatná odchylka [kN]	Variační koeficient [-]	0,1% kvantil normálního rozdělení [kN]
I (uzavřený)	326,20	25,10	7,69	248,63
II (otevřený)	272,00	16,84	6,19	219,98
III (otevřený)	270,95	16,94	6,25	218,59
IV (otevřený)	271,94	17,24	6,34	218,66
V (otevřený)	271,07	17,14	6,32	218,10

Návrhová hodnota únosnosti prutu uzavřeného průřezu (průřez I) je – podle EUROCODE 3 – 262,29 kN. Návrhovou únosnost prutů otevřených průřezů (průřezy II, III, IV) EUROCODE 3 neudává.

5 ZÁVĚR

V článku byly prezentovány histogramy a tabulka únosností prutů s počátečním prostorovým osovým zakřivením.

Pruty otevřených průřezů mají podobné střední hodnoty a směrodatné odchylky únosnosti. Jejich návrhová únosnost není normou EUROCODE 3 přímo dána. Nicméně použijeme-li křivku vzpěrné pevnosti b , bude hodnota návrhové únosnosti 235 kN. Tato hodnota je vyšší než všechny 0,1% kvantily normálního rozdělení, kterými byly aproximovány hodnoty únosností prutů otevřených průřezů.

Návrhová hodnota únosnosti prutů uzavřeného průřezu podle EUROCODE 3 je 262,29 kN. Tato hodnota je rovněž vyšší než 0,1% kvantil normálního rozdělení. Návrh podle EUROCODE 3 tak může být na straně nebezpečné; to je však potřeba ověřit dalšími spolehlivostními studiemi podle EN1990.

Pruty uzavřeného průřezu (průřez I) mají na rozdíl od prutů otevřených průřezů (průřezy II, III, IV, V) vyšší střední hodnotu a směrodatnou odchylku únosnosti, přestože mají takřka stejnou plochu i momenty setrvačnosti k oběma osám a stejné realizace počátečního osového zakřivení. Střední hodnoty i směrodatné odchylky únosností prutů otevřených průřezů jsou si velmi blízké. Lze proto tvrdit, že na výslednou únosnost nemá poloha zářezu vliv. Snížení jejich únosnosti je způsobeno především snížením tuhosti v kroucení. Pruty otevřených průřezů jsou přidavně namáhány momentem prostého a ohybového kroucení a bimomentem. Kroucení prutu otevřeného průřezu je hlavní příčinou snížení jeho únosnosti. Prut je kroucen zejména proto, že jeho osa je zakřivena náhodným zakřivením obecného tvaru. Poznamenejme, že u prutu s imperfekcí ve tvaru jedné půlvy funkce sinus by tento problém nebyl popsán dostatečně podrobně. Náhodná pole jsou nezbytná pro studium tohoto fenoménu. Problematika bude dále studována.

PODĚKOVÁNÍ

Prezentované výsledky byly získány za podpory juniorského projektu specifického vysokoškolského výzkumu na Vysokém učení technickém v Brně č. FAST-J-13-1904.

LITERATURA

- [1] TIMOSHENKO S., GERE J. *Theory of Elastic Stability*, McGraw-Hill, New York, 1961.
- [2] KALA, Z. Sensitivity Assessment of Steel Members under Compression, *Engineering Structures*, 31(6), 2009, pp.1344–1348, ISSN 0141-0296.
- [3] VALEŠ, J. The Influence of Random Initial Axis Curvature of Compression Steel Slender Member on its Load Carrying Capacity. *MENDEL 2012, 18th International Conference on Soft Computing*, Brno University of Technology, Faculty of Mechanical Engineering, June 27–29, 2012., p. 387 - 392 , ISSN 1803-3814, ISBN 978-80-214-4540-6.
- [4] MELCHER J. KALA Z. HOLICKÝ M. FAJKUS M. ROZLÍVKA L. Design Characteristics of Structural Steels Based on Statistical Analysis of Metallurgical Products, *Journal of Constructional Steel Research*, 60(3-5), 2004, pp.795–808, ISSN 0141–0296.
- [5] McKEY MD, CONOVER WJ, BECKMAN RJ. A comparison of the three methods of selecting values of input variables in the analysis of output from a computer code, *Technometrics* 1979; 21(2): 239–245.
- [6] IMAN RC, CONOVER WJ. Small sample sensitivity analysis techniques for computer models with an application to risk assessment. *Communications in Statistics – Theory and Methods* 1980; 9(17): 1749–1842.

Oponentní posudek vypracoval:

Doc. Ing. Martin Psotný, PhD., Katedra stavební mechaniky, Stavební fakulta, STU v Bratislavě.

Ing. Miroslav Rosmanit, Ph.D., Katedra konstrukcí, Fakulta stavební, VŠB-TU Ostrava.

Václav VESELÝ¹, Jakub SOBEK²

**NUMERICKÁ STUDIE PORUŠOVÁNÍ TĚLES Z CEMENTOVÝCH KOMPOZITŮ
PŘI MODIFIKACI LOMOVÉHO TESTU EXCENTRICKÝM TAHEM**

**NUMERICAL STUDY OF FAILURE OF CEMENTITIOUS COMPOSITE SPECIMENS
IN MODIFIED COMPACT TENSION FRACTURE TEST**

Abstrakt

Příspěvek představuje numerickou analýzu průběhu porušení těles zatěžovaných v modifikované zkušební konfiguraci testu excentrickým tahem (Compact Tension test, CT), plánovaných pro použití při zjišťování lomových parametrů kvazikřehkých materiálů na bázi cementu, a to včetně rozsahu lomové procesní zóny. Série těles zahrnující tři velikosti, určená pro experimenty za využití rentgenografie, byla modelována v programu ATENA 2D. Zváženy byly různé varianty excentricity tahové síly, jejího vnesení do tělesa a délek iniciačního zářezu pro optimalizaci počtu náročných experimentů.

Klíčová slova

Zkouška excentrickým tahem, kvazikřehký lom, lomová procesní zóna, numerická simulace, model kohezivní trhliny.

Abstract

The paper introduces a numerical analysis of failure process in specimens loaded in modified Compact Tension (CT) test configuration which are intended to be used for estimation of fracture parameters of quasi-brittle cement-based materials, including the extent of the fracture process zone. Specimen set (consisting of three sizes), designated to future testing in lab by X-ray imaging, was modelled in ATENA 2D software. Several variants of the tensile load eccentricity, the way of the load application and the initial crack length were considered in order to optimize the range of demanding experiments.

Keywords

Compact tension test, quasi-brittle fracture, fracture process zone, numerical simulation, cohesive crack model.

1 ÚVOD

Hodnoty lomových parametrů, vystupujících jako veličiny v modelech pro popis lomového chování materiálů, určované ze záznamů lomových zkoušek dnes dostupnými a doporučovanými metodami, jsou závislé nejen na velikosti a tvaru (i v drobných detailech, např. [1,2]) zkušební tělesa, ale i okrajových podmínkách při zatěžovacích zkouškách. Zejména v oblasti kvazikřehkého lomu hovoříme v této souvislosti o tzv. rozměrovém efektu (size effect), vlivu geometrie (shape effect) a vlivu volných okrajů (boundary effect) na hodnoty zjišťovaných lomových parametrů [3,4].

¹ Ing. Václav Veselý, Ph.D., Ústav stavební mechaniky, Fakulta stavební, Vysoké učení technické v Brně, Veveří 331/95, 602 00 Brno, tel.: (+420) 541 147 362, e-mail: vesely.v1@fce.vutbr.cz.

² Ing. Jakub Sobek, Ústav stavební mechaniky, Fakulta stavební, Vysoké učení technické v Brně, Veveří 331/95, 602 00 Brno, tel.: (+420) 541 147 116, e-mail: sobek.j@fce.vutbr.cz.

Pro eliminaci (popř. rozpoznání) těchto vlivů z výsledků zatěžovacích zkoušek by mělo být přihlédnuto k postupu a distribuci samotného porušení materiálu tělesa v tzv. lomové procesní zóně (LPZ). Rozsah této zóny souvisí s rozložením napjatosti, determinovaným právě okrajovými podmínkami a tvarem tělesa – míra stísněnosti napětí a deformace (constraintu) u čela šířící se trhliny se pro různá tělesa a pro různé druhy zatížení mění. To, jakým způsobem a do jaké míry je možné tohoto jevu využít pro určení materiálových hodnot lomových charakteristik, je předmětem prováděného výzkumu, jehož část je zde představena.

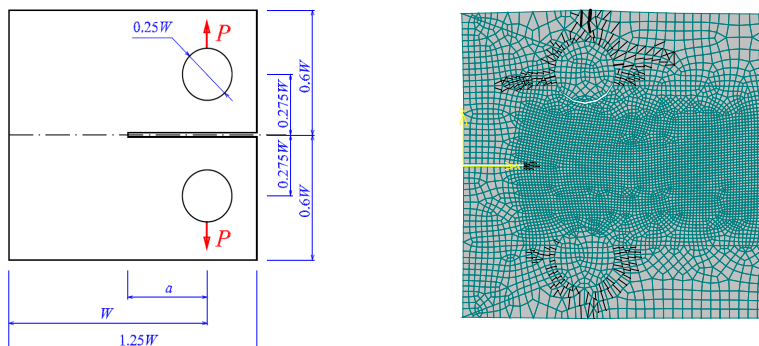
V rámci příspěvku autoři navrhuji modifikaci zkoušky excentrickým tahem (Compact Tension – CT) k jejímu využití pro kvazikřehké materiály. Úpravy excentricity tahové síly způsobují výrazné změny v rozložení napětí ve zkoušeném tělese (a tedy i stísnění napětí a deformací v okolí čela trhliny). Série těchto modifikovaných zkušebních těles je v současné chvíli připravena k testování v laboratoři při využití rentgenografie (metodami představenými např. v [5,6]). Vzhledem k možnostem experimentální techniky, jež má být k testům využita, je nutné testovat tělesa relativně velmi malých rozměrů (v relaci s běžnými rozměry těles z cementových kompozitů, jež jsou určeny v závislosti na velikosti kameniva).

2 NUMERICKÁ STUDIE

Pro experimentální studii byly vybrány tři velikosti těles (označeny jako L, M a S – large, medium a small), aby mohly být studovány výše vyjmenované vlivy (size, shape, boundary effects). Dále pak byly uvažovány různé excentricity vnášení tahového zatížení (A až C, viz dále) pro dosažení rozdílné úrovně constraintu. Prostřednictvím zde prezentované numerické studie byl optimalizován způsob vnesení tahového zatížení do tělesa, který (vzhledem k nízké tahové pevnosti zkoumaných cementových kompozitů) způsobuje komplikace v provedení testů – byly uvažovány rozličné varianty zatěžovacích přílohek a jejich spojení s vlastním testovacím tělesem; dále byla sledována odezva tělesa v závislosti na délce iniciačního zářezu.

2.1 Uvažované varianty konfigurace testu modCT

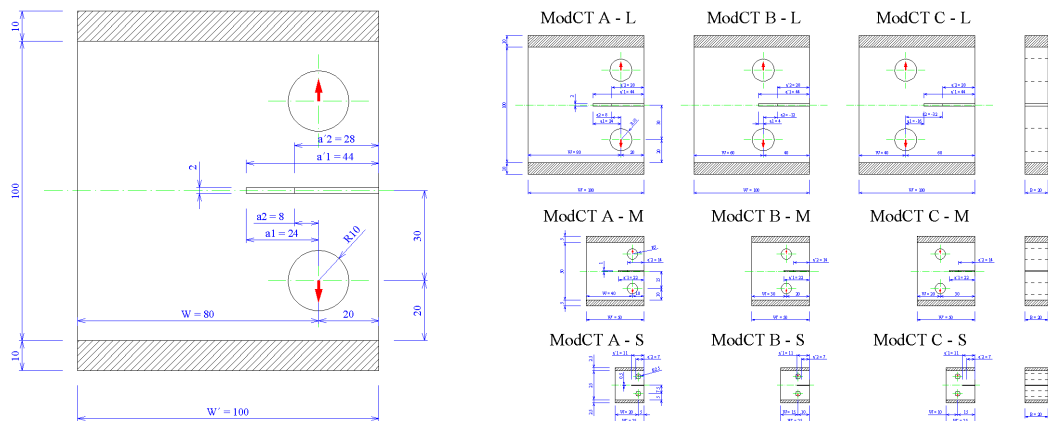
Klasický CT test (schéma viz obr. 1 vlevo) spočívá v rozevírání kompaktního tělesa excentricky vnášenou tahovou silou; bývá nejčastěji používán pro zkoušení kovových materiálů (ocel, hliník, atd. – tedy materiály s relativně vysokou pevností v tahu oproti cementovým kompozitům). Body vnášení tahového zatížení jsou situovány do míst odebrání materiálu, tedy do vyvrtaných otvorů; zatížení je vneseno skrze čepy, vsunuté do těchto otvorů. U kvazikřehkých materiálů však vyvstává při tomto řešení několik problémů. A to zejména s vytvářením otvorů (pro vložení čepů zatěžovacího zařízení) a pak při jejich samotném zatěžování. Při numerických simulacích CT tělesa (z kvazikřehkého materiálu) s otvory v místě vnášení síly/posunu bylo zjištěno, že těleso se začne porušovat právě v místě styku tělesa a čepu vnášejího zatížení (viz obr. 1 vpravo). Takové chování zjištěné u reálného experimentu by zcela znehodnotilo výsledek.



Obr. 1: Vlevo schéma klasické CT geometrie, vpravo ukázka nasimulovaného porušení pro případ bez přílohek (přímý styk tělesa a čepu)

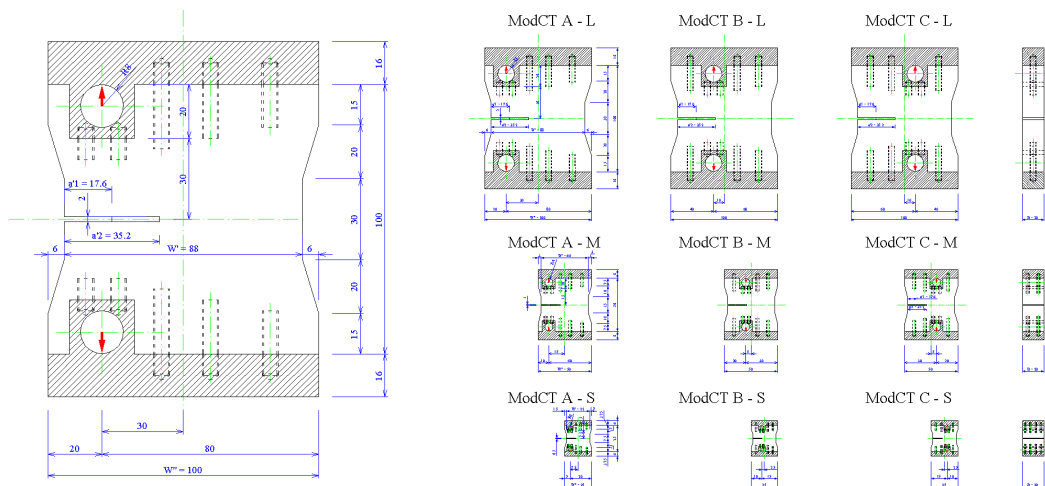
Z tohoto důvodu se hledaly jiné možnosti, jak docílit vnesení zatížení tak, aby k požadovanému porušení došlo výlučně v místě iniciačního zářezu. Konfigurace modifikovaného CT testu, lišící se způsobem vnášení tahového zatížení za pomoci resp. přímo přes kovové příložky (pracovně ocelové, při radiografii je však výhodnější použít vhodný lehčí materiál, který by nezpůsobil stínění a odrazy rentgenových paprsků, např. dural či karbonový kompozit), shrnují následující obrázky.

Na obr. 2 je zobrazena konfigurace, kde jsou stěny tělesa kolmé ke vnášené tahové síle vyztuženy příložkami zabráňujícími zmíněnému porušení, přičemž je zachován způsob vnášení zatížení skrz otvory.



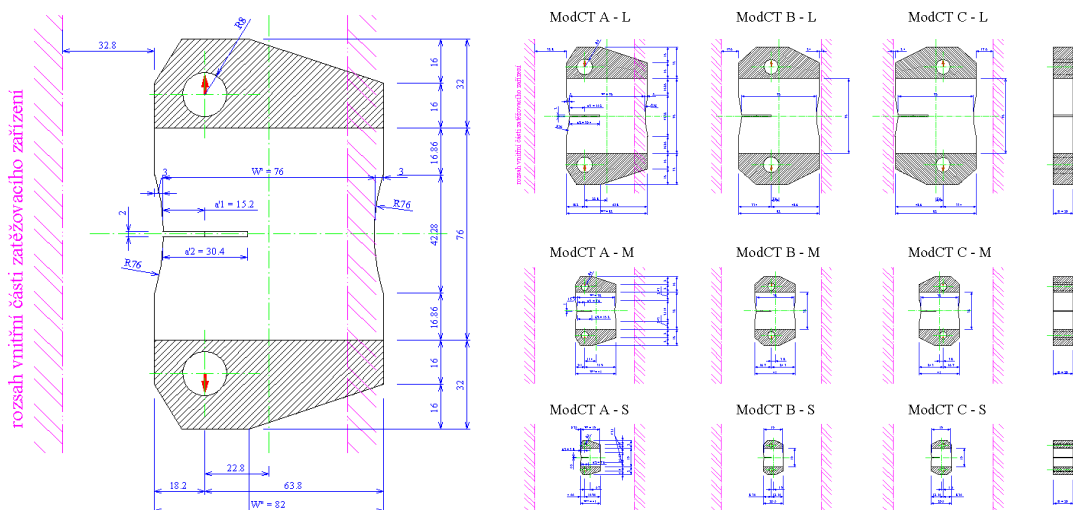
Obr. 2: Ukázka jedné z uvažovaných variant konfigurace modCT – vlevo detail geometrie tělesa s příložkami, vpravo uvažovaná kompletní série těles (L, M a S) s různými excentricitami (A, B a C)

Obr. 3 ukazuje variantu, kde je příložka zasazena do tělesa během jeho přípravy. Otvor pro vložení zatěžovacích čepů je vytvořen již v příložce, aby nebylo třeba vlastní zkušební těleso po odformování dále opracovávat. Soudržnost materiálu modifikovaného CT tělesa a materiálu příložky je podporována vložím výztužných (sřahovacích) prutů. Zúžení (vykrojení) tělesa v oblasti ligamentu je provedeno za účelem zvýšení koncentrace napětí vedoucí k zabezpečení iniciace trhliny z vrcholu zářezu (doplňuje vytvořený zářez).



Obr. 3: Konfigurace s vykrojením tělesa a příložkou, která spolupůsobí se samotným tělesem pomocí sřahovacích trnů (čárkovaně) – vlevo geometrie tělesa s příložkami, vpravo kompletní série těles

Konfigurace na obr. 4 kombinuje obě předchozí varianty. Rozdíly jsou v upevnění přílozek, které jsou zamýšleny jako lepené (dokonalý styk modifikovaného tělesa s příložkou). Menší rozdíl je i v hladké křivce vykrojení. V uvedeném obrázku je navíc naznačen vnitřní prostor zatěžovacího zařízení, určeného pro rentgenografii – je z něj zřejmé, že pro největší těleso s největší excentricitou tahové síly (konfigurace A – L) bude nutné navrhnut úpravy zatěžovacího zařízení.



Obr. 4: Konfigurace s přilepenými příložkami a vykrojením; jsou vyznačeny limity vnitřní části komory zatěžovacího stroje – vlevo geometrie tělesa s příložkami, vpravo kompletní série těles

2.2 Poloha vnášeného zatížení, iniciační délka trhliny

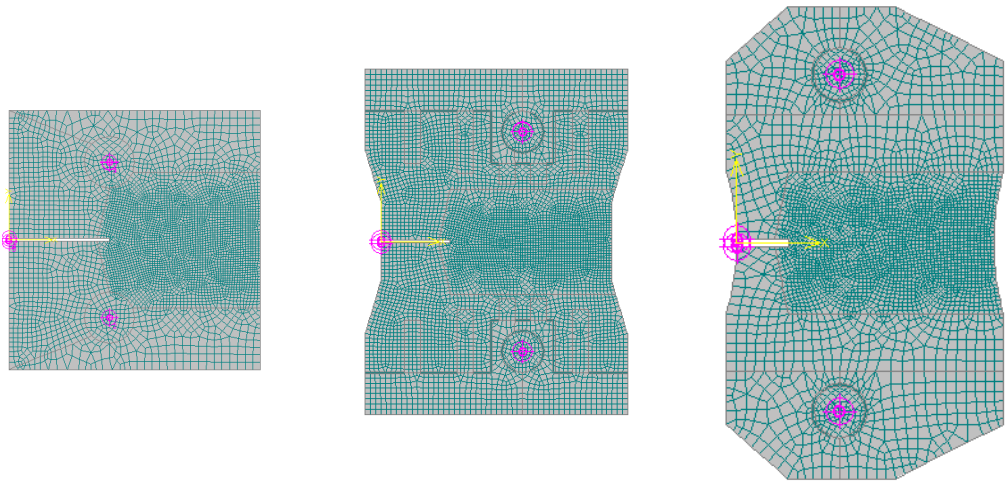
Pro docílení změn vlastností LPZ bylo uvažováno se změnami polohy vnášeného tahového zatížení a délky zářezu. Předchozí obrázky zobrazují tři uvažované velikosti těles, včetně polohy zatížení. Písmeno A v názvu udává, že tahové zatížení je vnášeno nejbližší k okraji modifikovaného CT tělesa, v němž je vytvořen zářez (excentricita tahové síly je $0,3W'$); B představuje zatížení, jehož paprsek se blíží k ose symetrie tělesa ze strany ústí zářezu (excentricita $0,1W'$) a konečně C následuje těsně po ose symetrie (excentricita $-0,1W'$). Délka zářezu (iniciační trhliny) a byla volena přes poměr $a/W' \in (0,1; 0,6)$, kde W' představuje rozměr tělesa ve směru šíření trhliny.

2.3 Výpočetní nástroj

Numerické modely byly vytvořeny v programu ATENA 2D [7], umožňující nelineární analýzu porušení konstrukce trhlinami, jejich vznik a postupné šíření v průběhu zatěžovacího procesu. Disponuje nelineárními modely materiálů (plasticita, porušování) pro simulaci skutečných vlastností kompozitů na bázi cementu. Lomově-plastický model pro beton, který byl použit pro simulace, kombinuje konstitutivní modely pro tahové (lomové) a tlakové (plastické) chování. Model lomu je založen na klasické ortotropní formulaci rozetřených trhlin s implementací modelu pásu trhlin (model kohezivní trhliny). Zahrnuje Rankinovo kritérium porušení, exponenciální změkčení a může být použit s modelem rotující nebo fixované trhliny, případně jejich kombinací. Plastický model změkčení/zpevnění je založen na Menétrey-Williamově povrchu porušení.

Pro cementový kompozit byl použit výše popsaný lomově-plastický materiálový model (označovaný jako *3D Nonlinear Cementitious 2*), s parametry ponechanými na defaultních hodnotách, vygenerovaných programem pro krychelnou pevnost $f_{cu} = 40$ MPa. Materiál přílozek a čepů byl modelován jako elastický izotropní s běžnými parametry pro ocel. Problém byl modelován ve 2D jako rovinná deformace.

Ukázky sítí konečných prvků u vybraných numerických modelů jednotlivých použitých variant jsou uvedeny v obr. 5. Materiály tělesa a přílozek jsou barevně odlišeny.

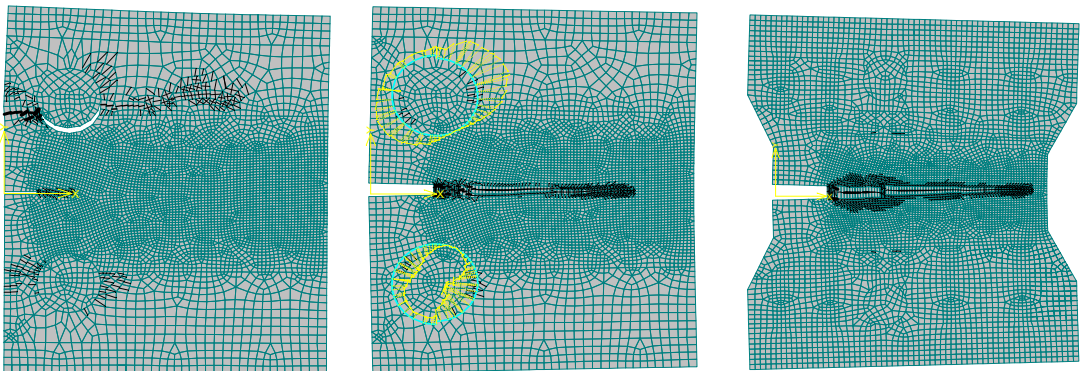


Obr. 5: Numerické modely vybraných variant modCT těles (dle schémat z obr. 2 až 4)

Průběh testu byl simulován vnášením přírůstku vzájemného posunu středů zatěžovacích čepů (spodní fixní, horní posuvný); kromě této časové řady se monitorovala také síla odporující tomuto přírůstku a otevření líců zářezu (monitorovací body zobrazeny také na obr. 5). Nelineární výpočet byl řízen metodou Newton-Raphson.

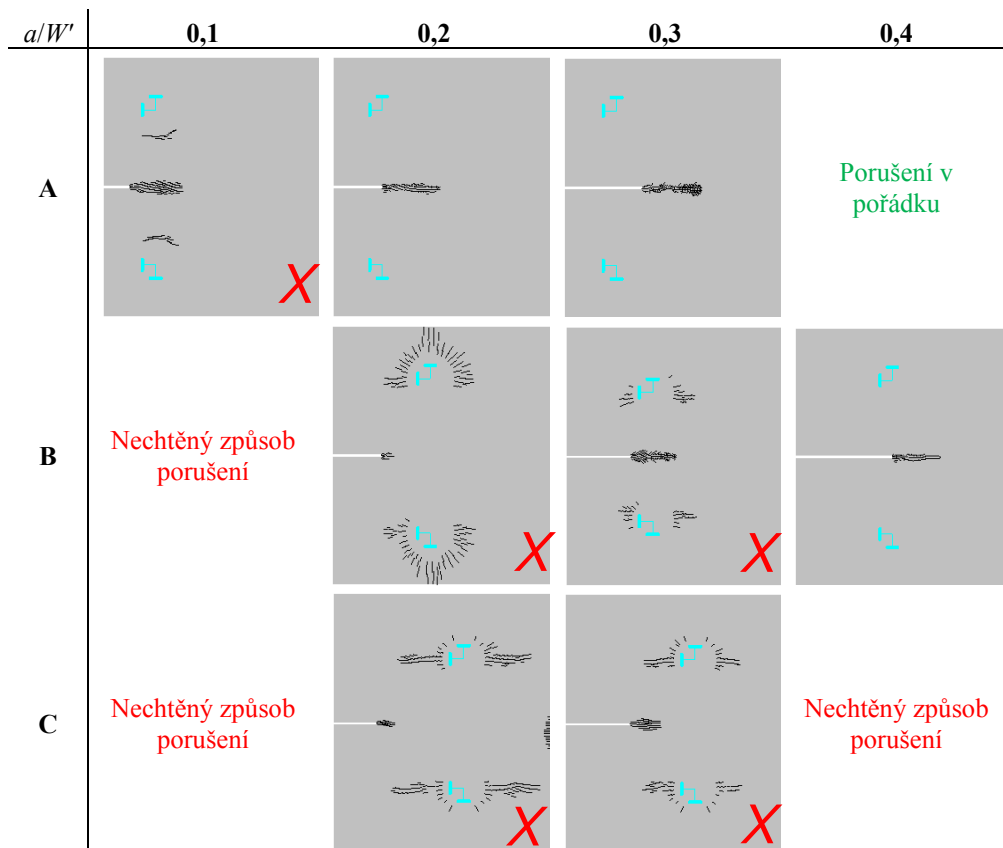
3 VÝSLEDKY, DISKUZE

Ukázky porušení, simulovaného v sw. ATENA 2D pro vybrané varianty řešení vnesení zatížení, uvádí obr. 6. Varianta vlevo zahrnuje jednoduchou příložku (viz obr. 2), je zobrazen vzor trhlin včetně sítě konečných prvků, a to pro model s poměrem $a/W' = 0,2$. Je zde patrné, že šíření porušení se odehrává i mimo vrchol iniciačního zářezu, zejména pro krátké zářezy se masivně realizuje z místa styku tělesa a zatěžovacího čepu. V obr. 6 uprostřed je zobrazena jedna z uvažovaných úprav této varianty, které se zaměřovaly na vyztužení zkušební tělesa v okolí otvoru pro zatěžovací čep, konkrétně varianta s radiální výztuží (včetně vykreslení průběhu tahového napětí v ní). Pro simulace byly uvažovány různé modifikace radiální i tangenciální výztuže ocelovými dráty či vložení objímky (včetně radiálně přivařených spřahovacích trnů). Tyto varianty se z důvodu nedostatečné funkčnosti či očekávané velké pracnosti výroby dále nerozvíjely. Na obr. 6 vpravo je pak vykreslen vzor trhlin pro variantu s příložkami se spřahovacími trny (viz obr. 3) pro $a/W' = 0,3$; je zde patrné požadované šíření trhliny po celé výšce tělesa bez parazitních porušení v jiných oblastech tělesa.



Obr. 6: Ukázky porušení a deformovaného tvaru modelů vybraných variant vč. zobrazení MKP sítě

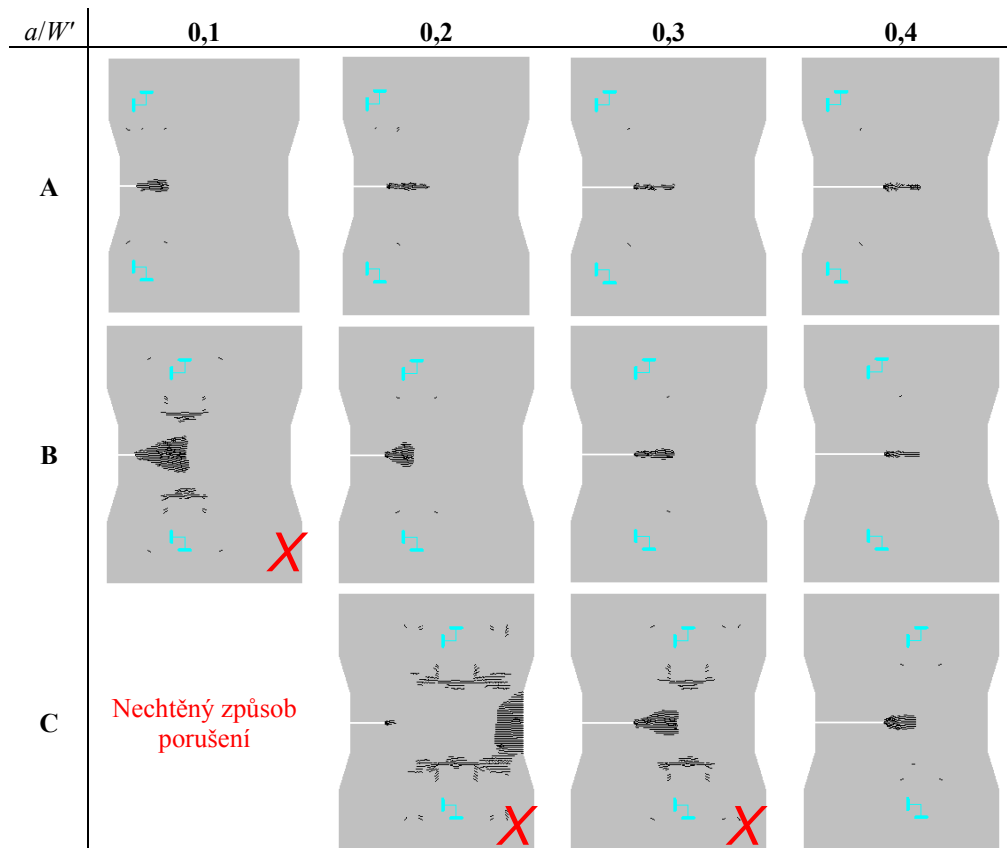
Náhledy na rozdíly v rozsahu a lokalizaci porušení těles ukazují série obrázků pro jednotlivé varianty a iniciační relativní délky zářezu o hodnotě 0,1 až 0,4 s proměnnými umístěními tahového zatížení (obr. 7 až 9). Pro obr. 7 a 8 je použito vykreslení vzorů trhlin ze stádia zkoušky odpovídajícího vrcholu zatěžovacích diagramů. V obr. 9 jsou navíc i náhledy na vzor trhlin ze stádia v koncové části sestupné větve zatěžovací křivky. Je zřejmé, že s posunem paprsku zatěžovací síly blíže k zadnímu okraji zkoušeného tělesa (snižování excentricity tahové síly) dochází ke snížení constraintu projevujícímu se rozšířením pásu porušení, tedy zvětšením rozsahu (alespoň šířky) LPZ. Křížkem jsou označeny „nevhodné“ varianty (tj. varianty, které se porušují mimo centrální oblast tělesa, např. v okolí zatěžovacích čepů a sprahovacích trnů).



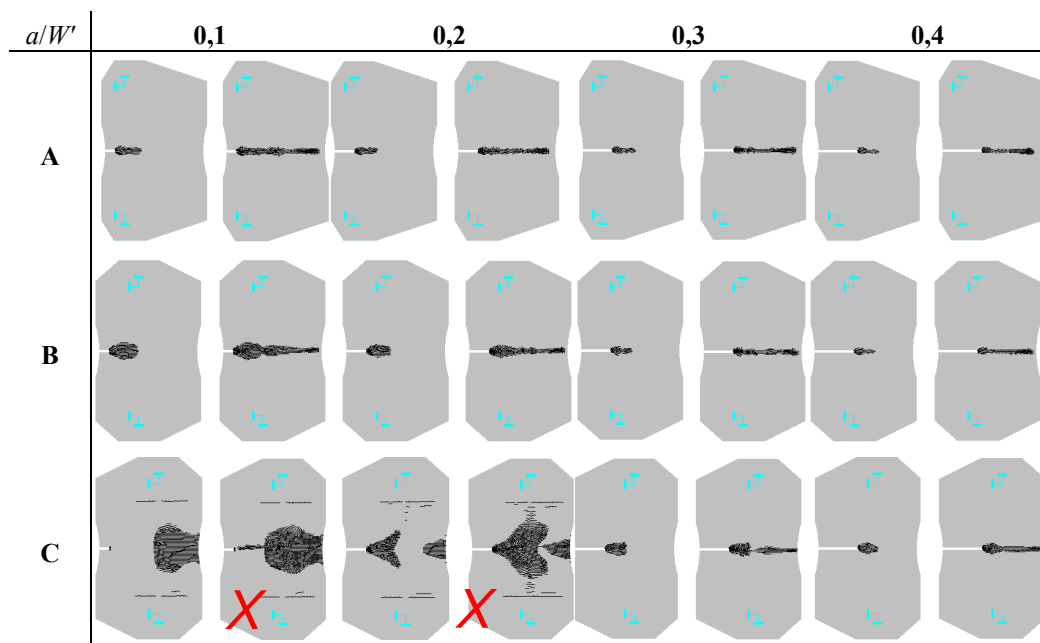
Obr. 7: Ukázky porušení pro různé délky zářezů a pozice tahové síly pro variantu z obr. 2

4 ZÁVĚR

Pro potřeby experimentální kampaně je třeba volit variantu ekonomicky výhodnou a zejména technicky/technologicky proveditelnou. Z předběžného vyhodnocení studie se jako nejvýhodnější jeví varianta s přilepenými příložkami (typicky pomocí epoxidového lepidla), v nichž jsou vytvořeny otvory pro zatěžovací čepy, a vykrojením tělesa v místě ligamentu, viz obr. 4. Vhodné zkušební konfigurace budou zahrnovat tělesa o velikostech v poměru 4 : 2 : 1 s výškou ligamentu $W' = \{76, 38, 19\}$ mm, s relativními délkami trhliny $a/W' = \{0,2; 0,3; 0,4\}$ a excentricitou vnášené tahové síly ve variantách A, B i C (kromě $a/W' = 0,2$ u varianty C). Detailní numerická studie lomového testu v této konfiguraci pro očekávané materiálové parametry je před dokončením, zde jsou prezentovány výsledky pouze pro velikost L. Zda se varianty S a M budou chovat podobně, rozhodne až další studie, zpracovaná také s ohledem na vliv velikosti, včetně výsledků reálných experimentů vyrobených těles.



Obr. 8: Ukázky porušení pro různé délky zářezů a pozice tahové síly pro variantu z obr. 3



Obr. 9: Ukázky porušení pro různé délky zářezů a pozice tahové síly pro variantu z obr. 4

Na obr. 10 jsou zobrazeny již hotové formy, určené pro odlévání vzorků. Modifikovaná CT tělesa budou v plánovaných testech doplněna klasickými tříbodově ohýbanými trámečky se zářezem.



Obr. 10: Formy určené pro výrobu modCT těles
(doplněné o formy pro trámečky zkoušené ve tříbodovém ohybu)
(foto © Keršner 2013)

PODĚKOVÁNÍ

Výzkum byl realizován za finanční podpory GA ČR (projekt P105/11/1551) a VUT v Brně (projekt specifického vysokoškolského výzkumu FAST-S-12-21/1653). Na návrhu a výrobě forem se podíleli také Ing. Hana Šimonová, Ph.D., Ing. Ivana Havlíková, Miroslav Friedl a prof. Ing. Zbyněk Keršner, CSc., za což jim autoři vřele děkují.

LITERATURA

- [1] KORTE S., V. BOEL, W. DE CORTE, G. DE SCHUTTER and S. SEITL. Experimental study of the influence of the initial notch length in cubical concrete wedge-splitting test specimens, *Key Engineering Materials* Vols. 525–526 (2013), pp. 209–212, ISSN: 1662-9795.
- [2] SEITL S., J. KLUSÁK and Z. KERŠNER. The influence of a notch width on a crack growth for various configurations of three-point bending specimens. *Materials Engineering*, XIV/3 (2007), pp. 213–219. ISSN 1335-0803.
- [3] BAŽANT, Z.P. Analysis of work-of-fracture method for measuring fracture energy of concrete. *ASCE Journal of Engineering Mechanics*. 1996, 122(2), pp. 138–144.
- [4] DUAN, K., X-Z. HU and F.H. WITTMANN. Size effect on specific fracture energy of concrete. *Engineering Fracture Mechanics*. 2007, 74, pp. 87–96.
- [5] VAVŘÍK, D., T. FÍLA, I. JANDEJSEK, V. VESELÝ, P. FRANTÍK a Z. KERŠNER. Fracture Process in Silicate Composite Specimens – X-ray Dynamic Observation and Numerical Modelling. In: *Proceedings of the 19th ECF*, Kazan, Russia, Kazan Scientific Centre of the Russian Academy of Science, Kazan, 2012, 9 p. ISBN 978-5-905576-18-8.
- [6] VAVŘÍK D., I. JANDEJSEK, T. FÍLA a V. VESELÝ. Radiographic observation and semi-analytical reconstruction of fracture process zone in silicate composite specimen. *Acta Technica*. 2013, 58, pp. 315–326.
- [7] ČERVENKA V., L. JENDELE a J. ČERVENKA. *ATENA Program Documentation, Theory*. Praha: Cervenka Consulting, 2010.

Oponentní posudek vypracoval:

Prof. Ing. Michal Šejnoha, Ph.D., DSc., Katedra mechaniky, Fakulta stavební, ČVUT v Praze.

Doc. Ing. Ondřej Jiroušek, Ph.D., Ústav teoretické a aplikované mechaniky AV ČR, v. v. i.

Miroslav VOŘECHOVSKÝ¹, Jana KADĚROVÁ²

VÝVOJ NOREM KORELACE PŘI NÁHODNÝCH ZÁMĚNÁCH POŘADÍ ELEMENTŮ

DEVELOPMENT OF NORMS OF CORRELATION RESULTING FROM RANDOM SWAPPING OF ORDER OF ELEMENTS

Abstrakt

Příspěvek se zabývá vlastnostmi procesu vývoje statistické korelace dvou náhodných vektorů při náhodných záměnách pořadí jednotlivých elementů. V praxi se tato metoda používá pro zavedení požadované korelace nebo pro odstranění nechtěné statistické závislosti mezi vektory vzorků (souřadnice) náhodných veličin.

Klíčová slova

Vzorkování metodou Monte Carlo, zavádění korelace, simulované žihání, Gaussovský stacionární náhodný proces.

Abstract

The contribution deals with properties of a process of statistical correlation between two vectors – samples of random variables. The process results from random swaps of the mutual order of elements. This method is being applied when controlling correlations or removing undesired statistical dependence.

Keywords

Monte Carlo Sampling, correlation control, simulated annealing, Gaussian stationary random process.

1 ÚVOD

Vzorkování náhodných vektorů je důležité nejen pro statistiku, ale také pro celou řadu jiných oborů výzkumu a odborné praxe jako např. ekonomie, návrh experimentů nebo operační výzkum. Vzorkování je také důležitým krokem v metodách typu Monte Carlo, které lze použít pro inženýrskou praxi. Tam se často pracuje se vzorky náhodných vektorů, které reprezentují náhodné či neurčité proměnné ve studovaném problému. Informace o sdružené hustotě pravděpodobnosti náhodných vektorů, které se vyskytují v inženýrství, je často zúžena na znalost (i) marginálních hustot jednotlivých veličin a (ii) korelační matice \mathbf{T} . Reprezentace marginálních hustot se s výhodou provádí pomocí vzorků vybraných metodou Latin Hypercube Sampling (LHS) [1], neboť tato metoda ve variantě „medián“ zajišťuje rovnoměrné pokrytí oboru veličiny vzhledem k pravděpodobnostem. Dalším důležitým aspektem vzorkování vektorů je schopnost vystihnout požadovanou korelační strukturu. Nejobecněji se požaduje jednotková matice \mathbf{T} , která odpovídá po párech nekorelovaným náhodným veličinám. Taková korelační matice je nejčastější a vyřešení

¹ doc. Ing. Miroslav Vořechovský, Ph.D., Ústav stavební mechaniky, Fakulta stavební, Vysoké učení technické v Brně, Veveří 95, 602 00 Brno, tel.: (+420) 541 147 370, e-mail: vorechovsky.m@fce.vutbr.cz.

² Ing. Jana Kaděrová, Ústav stavební mechaniky, Fakulta stavební, Vysoké učení technické v Brně, Veveří 95, 602 00 Brno, tel.: (+420) 541 147 131, e-mail: kadero.j@fce.vutbr.cz.

problému odstranění nechtěné korelace bývá navíc důležitým krokem před zavedením libovolné korelační matice (např. v metodách lineární transformace náhodného vektoru).

Problém zavádění požadované korelace byl ústředním tématem např. prací [2,3]. V článkách [4,5] je navrženo zavádění požadované korelace záměnami vzájemného pořadí vzorků jednotlivých náhodných veličin. Délky obou vektorů (počty elementů) jsou shodné a budou nadále označovány jako počet simulací N_{sim} . Proces záměn pořadí je doporučeno provádět za pomoci metody simulovaného žihání (SA), která se ukázala jako mimořádně robustní a výkonná pro uvedený problém. Studie publikované v [6] ukazují, že popsaná metoda je mnohem výkonnější, než jiné obecně známé metody pro zavádění korelace nebo odstraňování nechtěné korelace. Co však schází, je teoretický rozbor a zdůvodnění účinnosti metody. Tato práce si klade za cíl položit základy pro zdůvodnění výkonnosti metody simulovaného žihání. V textu je pro jednoduchost studován problém pro pár náhodných veličin a Spearmanův korelační koeficient s tím, že zobecnění výsledků pro větší počet náhodných veličin a jiné míry statistické korelace není složitý.

Problém zavádění statistické závislosti (zde omezeno pouze na korelaci) mezi vektory vzorků náhodných veličin lze chápat jako optimalizační úlohu [4]. Cílem je nalézt optimální nebo suboptimální vzájemné pořadí vzorků pro každou z N_{var} veličin tak, aby odhadnutá korelační matice byla co nejbližší požadované korelační matici (nejčastěji jednotkové matici). Rozdíl těchto matic lze vyjádřit vhodnou maticovou normou (skalár). V pracích [4,5,6] je pracováno se dvěma normami označenými jako ρ_{max} a ρ_{rms} . Obě normy se sobě rovnají v případě, že počet náhodných veličin (vektorů) je roven dvěma: $N_{\text{var}} = 2$. V tomto případě je norma chyby korelační matice rovna absolutní hodnotě mimodiagonálního členu, tedy:

$$\rho_{\text{max}} = \rho_{\text{rms}} = |\rho|, \quad (1)$$

kde ρ je odhadnutý korelační koeficient mezi dvěma vektory dat.

Proces zavádění požadované korelace ve dříve zmíněné metodě simulovaného žihání probíhá tak, že pořadí hodnot vektoru první náhodné veličiny je netknutý a u ostatních vektorů jsou postupně prováděny záměny pořadí s cílem dosáhnout minimalizace ρ_{max} a ρ_{rms} . Změny jsou realizovány tak, že je náhodně vybrán index veličiny k provedení změny, a poté jsou vybrány dva různé vzorky této veličiny s indexy $\{j, k\} \in \{1, 2, \dots, N_{\text{sim}}\}$. Tyto dvě hodnoty si pořadí vymění, čímž je obecně ovlivněno $N_{\text{var}} - 1$ korelačních koeficientů odhadnuté korelační matice. Uvedené záměny jsou přijímány podmíněně, v závislosti na hodnotě náhodné veličiny vybrané z Boltzmanova pravděpodobnostního rozdělení [4]. V tomto příspěvku budeme uvažovat případ, kdy jsou všechny záměny (trials) přijaty a celkový počet takových prohození párů hodnot bude označen N_{trials} . To odpovídá počátečním stádiím v metodě simulovaného žihání, kdy má systém velkou teplotu (excitaci) a prakticky všechny navržené změny konfigurace/pořadí se zrealizují.

V předložené práci jsou studovány vlastnosti procesu náhodné korelace a normy korelace (chyby), které vznikají záměnami párů vzorků jedné náhodné veličiny vůči vzorkům druhé náhodné veličiny. Je ukázáno, že počáteční náhodné párování vzorků vede na normální rozdělení korelačního koeficientu (Kap. 2), a proces záměn párů je Gaussovský, stacionární s exponenciální autokorelační funkcí o korelační délce vztažené k počtu realizací (vzorků) veličin N_{sim} (Kap. 4). Je odvozeno rozdělení hodnot změny korelace vyvolané jednotlivými záměnami (rozdíl korelačního koeficientu po a před záměnou pořadí) – Kap. 3. Dále jsou studovány vlastnosti absolutních hodnot výše popsaného procesu, který má polonormální (Half-Normal) rozdělení (Kap. 4). U tohoto procesu chyby korelace je studováno rozdělení minima po N_{trials} záměnách pořadí (Kap. 5). Je ukázáno, že pro dostatečný počet náhodných záměn lze autokorelaci procesu zanedbat a minima uvažovat za použití teorie extrémních hodnot nezávislých a stejně rozdělených veličin. Na závěr je

studován počet náhodných záměn pořadí, který je nutný k dokonalému vynulování odhadnuté korelace mezi veličinami (Kap. 6). Příspěvek tedy plně charakterizuje výsledky, kterých lze při zavěšení/odstraňování korelace dosáhnout proudem náhodných záměn pořadí vzorků.

2 NÁHODNÁ KORELACE

Uvažujme dva vektory o délce N_{sim} . Pro obecnost uvažujme Spearmanovu neparametrickou korelaci. Její bodový odhad se provádí obdobně jako odhad Pearsonova korelačního koeficientu s tím, že namísto hodnot vektorů se používají transformovaná pořadová čísla r (pořadí podle hodnot vektorů), detailně viz (8) v práci [5]:

$$\rho^{\text{Spear}} = \frac{\sum r_j r_k}{\sqrt{\sum r_j^2 \sum r_k^2}} \quad (2)$$

V práci [5] bylo ukázáno, že při náhodném vzájemném pořadí elementů vektoru je odhadnutá korelace náhodná veličina s asymptoticky normálním rozdělením s nulovou střední hodnotou a směrodatnou odchylkou závislou na počtu elementů vektoru:

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{N_{\text{sim}} - 1}} \quad (3)$$

Počet možných hodnot, kterých korelační koeficient ρ může nabýt, je $N_{\text{sim}}(N_{\text{sim}}^2 - 1)/6 + 1$, a tyto tvoří rovnoměrný grid na intervalu $\langle -1, 1 \rangle$. V absolutní hodnotě nejmenší chyba korelace ρ je pak dána:

$$\min \rho_{\text{max}}^{\text{Spear}} = \begin{cases} \frac{6}{N_{\text{sim}}(N_{\text{sim}}^2 - 1)} = \frac{\Delta t_{\text{Spear}}}{2} & N_{\text{sim}} = 4l + 6, l = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \quad (4)$$

V další práci budeme volit N_{sim} tak, aby bylo možné číselně dosáhnout nulové hodnoty ρ . Minimální vzdálenosti mezi dosažitelnými hodnotami ρ jsou:

$$\Delta t_{\text{Spear}} = \frac{12}{N_{\text{sim}}^3 - N_{\text{sim}}} \quad (5)$$

Znalost normálního rozdělení hodnot ρ lze využít při stanovení rozdělení chyby korelace ρ_{max} . Vzhledem k definici chyby ρ_{max} je rozdělení polonormální, tedy hustota a distribuční funkce chyby ρ_{max} jsou:

$$f_{\text{max}}(x) = \frac{2}{\sigma_i} \phi\left(\frac{x}{\sigma_i}\right), \quad F_{\text{max}}(x) = 2\Phi\left(\frac{x}{\sigma_i}\right) - 1 = \text{erf}\left(\frac{x}{\sigma_i \sqrt{2}}\right), \quad (6)$$

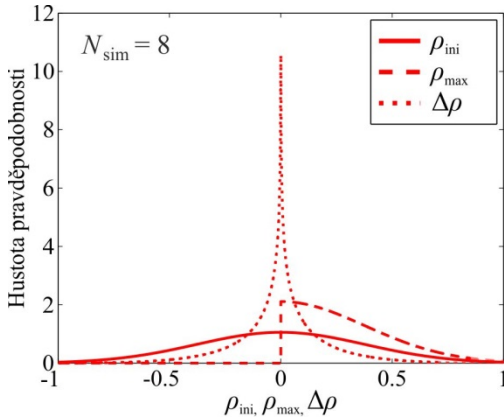
kde $\phi(\cdot)$, $\Phi(\cdot)$ jsou hustota a distribuční funkce standardizovaného normálního rozdělení a kde $\text{erf}(x) = 2\Phi(x\sqrt{2}) - 1$ je tzv. *chybová funkce* (error function) známá ze statistiky a počtu pravděpodobnosti. Inverzní distribuční funkce je dána:

$$F_{\text{max}}^{-1}(p) = \sigma_i \Phi^{-1}\left(\frac{p+1}{2}\right) = \sigma_i \sqrt{2} \text{erf}^{-1}(p) \quad (7)$$

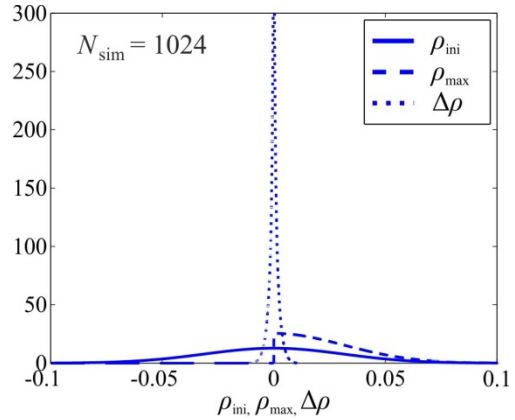
Střední hodnota a směrodatná odchylka chyby náhodné korelace jsou tedy [5]:

$$\mu_{\max} = \sigma_i \sqrt{2/\pi}, \quad \sigma_{\max} = \sigma_i \sqrt{(\pi-2)/\pi} \quad (8)$$

Obr. 1 a 2 znázorňují plnými čarami rozdělení pravděpodobnosti počáteční hodnoty korelačního koeficientu ρ při náhodném třídění pro dvě různé hodnoty N_{sim} (8 a 1024) – jde o Gaussovo rozdělení se střední hodnotou nula a směrodatnou odchylkou danou v (3). Rozdělení pravděpodobnosti pro normu chyby korelační matice ρ_{\max} danou v (1) je znázorněno čerchovaně – jde o polonormální rozdělení s parametry definovanými v (8). Obr. 1 a 2 prezentují rovněž hustotu veličiny $\Delta\rho$, tedy změny hodnoty korelace, která je studována v následující kapitole.



Obr. 1 Rozdělení pravděpodobnosti $\rho_{\text{ini}}, \rho_{\text{max}}, \Delta\rho$ pro $N_{\text{sim}} = 8$



Obr. 2 Rozdělení pravděpodobnosti $\rho_{\text{ini}}, \rho_{\text{max}}, \Delta\rho$ pro $N_{\text{sim}} = 1024$

3 NÁHODNÁ ZÁMĚNA POŘADÍ

Studované algoritmy pro zavádění požadované korelace mezi dvěma vektory pracují se záměnami pořadí jednoho vektoru vůči druhému vektoru, ve kterém pořadí elementů zůstává netknuté. Pro rychlý výpočet korelace před a po záměně je výhodné standardizovat oba vektory, které vstupují do vztahu (2) a následně tyto hodnoty normovat číslem $\sqrt{(N_{\text{sim}} - 1)}$. Pak lze totiž bodový odhad korelace psát jako skalární součin, jehož výpočet je mimořádně rychlý:

$$\rho = \sum_{j=1}^{N_{\text{sim}}} x_j \cdot y_j \quad (9)$$

Náhodnou záměnou pořadí dvou hodnot vektoru \mathbf{x} , jmenovitě x_j a x_k , vůči vektoru \mathbf{y} , vznikne potřeba upravit vztah (9) následovně:

$$\rho^{\text{new}} = \rho^{\text{ini}} - x_j y_j - x_k y_k + x_j y_k + x_k y_j = \rho^{\text{ini}} + \Delta\rho \quad (10)$$

Nás zajímá pravděpodobnostní rozdělení veličiny $\Delta\rho$, tedy změny hodnoty korelace. Přeznačme nyní x_j, x_k a y_j, y_k na náhodné veličiny X_1 až X_4 . Pak lze říci, že $\Delta\rho$ vzniká transformací čtyř náhodných veličin X_1 až X_4 . Uvažujme nyní situaci, kdy N_{sim} je velké a počáteční korelace je přibližně nulová. Pak lze předpokládat, že X_1 až X_4 jsou čtyři nezávislé a shodně rozdělené náhodné veličiny s rovnoměrným rozdělením na intervalu $\langle -b, b \rangle$, kde

$$b = \sqrt{3} \frac{N_{\text{sim}} - 1}{\sqrt{N_{\text{sim}} (N_{\text{sim}}^2 - 1)}} \quad (11)$$

Změnu korelace při náhodné volbě dvou hodnot vektoru k prohození pořadí lze pak přepsat jako součin dvou veličin Y_1 a Y_2 :

$$\Delta\rho = -X_1X_2 - X_3X_4 + X_1X_4 + X_2X_3 = \underbrace{(X_4 - X_2)}_{Y_1} \underbrace{(X_1 - X_3)}_{Y_2} = Y_1Y_2 \quad (12)$$

Veličiny Y_1 a Y_2 lze považovat za nezávislé náhodné veličiny, které vznikají rozdílem dvou shodně rovnoměrně rozdělených nezávislých veličin. Y_1 a Y_2 mají tedy shodné symetrické trojúhelníkové rozdělení na intervalu $\langle -2b, 2b \rangle$ se střední hodnotou nula a směrodatnou odchylkou:

$$\sigma_Y = \frac{\sqrt{6}}{3} b = \sqrt{2} \frac{N_{\text{sim}} - 1}{\sqrt{N_{\text{sim}} (N_{\text{sim}}^2 - 1)}} \quad (13)$$

Nyní je třeba vyřešit rozdělení součinu dvou nezávislých veličin Y_1 a Y_2 . V našem případě analyzujeme rozdělení součinu dvou nezávislých veličin s trojúhelníkovým rozdělením. Řešením je hustota definovaná na intervalu $\langle -m, m \rangle$, kde $m = 4b^2$:

$$f_{\Delta\rho}(\Delta\rho) = \frac{2}{m^2} \left[2(|\Delta\rho| - m) + (|\Delta\rho| + m) \ln \left(\frac{m}{|\Delta\rho|} \right) \right], \quad -m \leq \Delta\rho \leq m, \quad \Delta\rho \neq 0 \quad (14)$$

Rozdělení pravděpodobnosti změny korelačního koeficientu $\Delta\rho$ pro dvě různá N_{sim} (8 a 1024) je znázorněno na obr. 1 a 2 tečkovaně. Střední hodnota změny korelace $\Delta\rho$ je nulová:

$$\mu_{\Delta\rho} = \int_{-m}^m (\Delta\rho) f_{\Delta\rho}(\Delta\rho) d(\Delta\rho) = 0 \quad (15)$$

Směrodatná odchylka $\Delta\rho$ má hodnotu:

$$\sigma_{\Delta\rho} = \frac{2}{3} b^2 = 2 \frac{N_{\text{sim}} - 1}{N_{\text{sim}} (N_{\text{sim}} + 1)} \approx \frac{2}{N_{\text{sim}}} \quad (16)$$

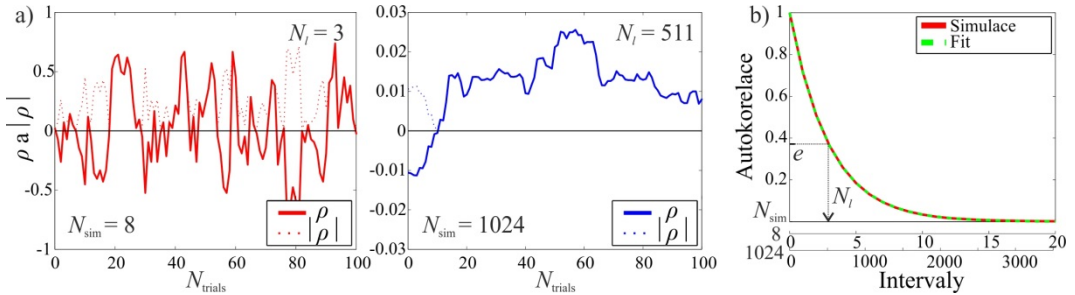
Je třeba si uvědomit, že odvozené rozdělení náhodné změny korelace oproti výchozímu stavu platí pouze pro případ, kdy je výchozí korelace (přibližně) nulová: $\rho^{\text{ini}} \approx 0$. Je zřejmé, že pokud mají například oba vektory souhlasné pořadí hodnot, je počáteční korelace $\rho^{\text{ini}} = 1$ a jakákoliv záměna vede na snížení této korelace (rozdělení je nenulové pouze na záporné poloose a je značně nesymetrické). My se však spokojíme s rozdělením pro $\rho^{\text{ini}} = 0$, neboť nás zajímají výsledky pro velká N_{sim} s náhodným tříděním, kde je korelace přibližně nulová (viz výše).

4 PROCES ZÁMĚN POŘADÍ

Nyní, když je detailně popsána situace počáteční náhodné korelace, a je jasné, jakou (náhodnou) změnu způsobí záměna pořadí, zajímá nás, zda proudem takových záměn lze dosáhnout cíle, tedy minimalizovat normu ρ_{max} . Uvažujme proces, při kterém se provádí N_{trials} náhodných záměn indexovaných pomocí i , a sledujme proces korelace a rovněž proces doposud nejlepší (minimální) hodnoty normy ρ_{max} . Tuto sledovanou hodnotu nazveme ρ_{best} :

$$\rho_{\text{best}} = \min_{i=1, \dots, N_{\text{trial}}} \{\rho_{\text{max}, i}\} = \min_{i=1, \dots, N_{\text{trial}}} \{|\rho_i|\}, \quad \text{kde} \quad \rho_i = \rho_{i-1} + \Delta\rho_i \quad (17)$$

Je zřejmé, že na proces lze nahlížet jako na náhodnou procházku s velikostí kroku $\Delta\rho_i$, která je náhodná (rozdělení náhodné délky kroku procházky je odvozeno výše v Kap. 3). Pravděpodobnost přijetí tohoto kroku budeme uvažovat jako jedna, neboť analyzujeme stav, kdy v metodě simulovaného žihání je na počátku velmi vysoká teplota v Boltzmanově pravděpodobnosti přijetí změny a všechny změny pořadí jsou přijímány.



Obr. 3 a) Náhodná procházka, proces ρ a $|\rho|$ pro různá N_{sim} ;

b) Autokorelační funkce pro různá N_{sim} .

Vzhledem k charakteru problému s diskrétními hodnotami korelace rovnoměrně rozdělenými na intervalu $\langle -1, 1 \rangle$ lze problém analyzovat také pomocí Markovských řetězců. V praktických případech je ale N_{sim} vysoké a počet možných stavů řetězce je značný. Uchýlíme se tedy k analýze náhodného procesu korelací a budeme ho analyzovat s přechodem na spojitou náhodnou veličinu ρ .

Obr. 3a ukazuje plnou čarou dvě realizace náhodné procházky (procesu ρ) pro $N_{\text{trials}} = 100$ záměn z počátečního náhodného stavu. Porovnání je provedeno pro $N_{\text{sim}} = 8$ a 1024, a je zřejmé, že zatímco náhodná korelace má směrodatnou odchylku úměrnou $1/\sqrt{N_{\text{sim}}}$, náhodná záměna má směrodatnou odchylku úměrnou $1/N_{\text{sim}}$. Pro velké N_{sim} má tedy proces relativně menší krok změn oproti situaci s malým N_{sim} .

Obrázky s realizacemi připomínají realizace autokorelovaných náhodných procesů. Vskutku, zjistili jsme, že proces korelace je stacionární Gaussovský náhodný proces se střední hodnotou nula a směrodatnou odchylkou σ , s exponenciální autokorelační funkcí (obr. 3b):

$$c = \exp(-|i - j|/N_i), \quad (18)$$

kde číselník značí rozdíl v pořadích záměn (trials) a N_i je autokorelační délka. Ověřili jsme, že pro autokorelační délku platí

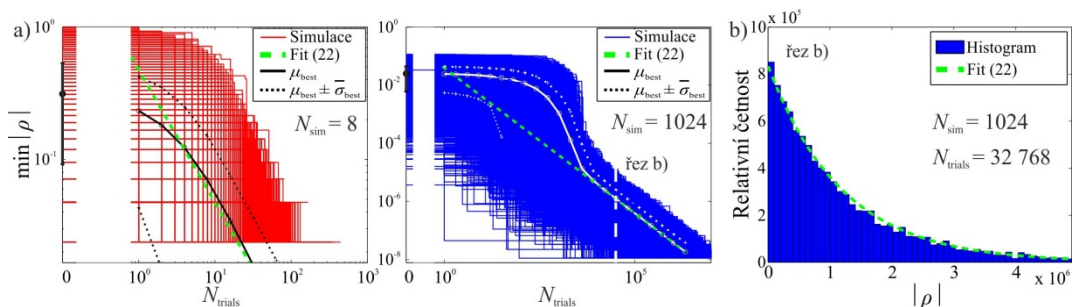
$$N_i = (N_{\text{sim}} - 2)/2 \quad (19)$$

Náhodné procesy jsou vidět pro dvě různá N_{sim} (8 a 1024) na obr. 3a; hodnoty autokorelačních délek se v těchto případech rovnají $N_i(8) = 3$ a $N_i(1024) = 511$. Na tomto místě lze znovu zdůraznit, že pokud se náhodná procházka významně odchýlí od počáteční hodnoty korelace (přibližně nula), pak se změní i rozdělení náhodné změny $\Delta\rho$ a proces má tendenci nedivergovat dále směrem k velkým absolutním hodnotám korelace, ale navrací se zpět směrem k nulové

korelaci. Dále lze zmínit, že stacionarita procesu má velkou souvislost s tím, že počáteční náhodný stav korelace lze dosáhnout např. značným množstvím záměn N_{trials} z libovolného pořadí, tedy i z pořadí, které vykazuje značnou statistickou závislost mezi vektory. Pokud je tedy provedeno přibližně $2 \cdot N_l$ náhodných záměn, lze konečný stav jistě považovat za náhodný.

5 PROCES DOSAVADNÍHO MINIMA CHYBY KORELACE

V předchozí kapitole byl proces náhodné korelace při proudě záměn pořadí plně charakterizován. Zajímá nás nyní, jaké vlastnosti má proces absolutních hodnot korelace (Obr. 3a, tečkovaně) a zejména proces dočasných minim ρ_{best} jako funkce počtu záměn.



Obr. 4 a) Proces ρ_{best} pro různá N_{sim} (dvojitě logaritmické měřítko); b) Hustota pravděpodobnosti pro $N_{\text{sim}} = 1024$ po $N_{\text{trials}} = 32768$ záměnách.

Obr. 4a ukazuje náhodně vybrané realizace procesů ρ_{best} pomocí logaritmických souřadnic.

Proces dosavadních minim ρ_{best} je nerostoucí schodovitá funkce, která je definována jako minimum ze značného počtu náhodných veličin vybraných ze shodného polonormálního rozdělení. Pokud zanedbáme autokorelaci procesu z Kap. 4, mohli bychom náhodnou veličinu ρ_{best} analyzovat pomocí teorie extrémních hodnot (EVT) nezávislých veličin. Lze totiž očekávat, že pokud je počet záměn $N_{\text{trials}} > 2N_l$, lze vliv autokorelace pominout. Obr. 4a vizualizuje střední hodnotu procesu ρ_{best} označenou jako μ_{best} , která je odhadnuta z $N_{\text{run}} = 10^4$ realizací procesu ρ_{best} . Tento numerický odhad je ve stejných obrázcích porovnán s predikcí střední hodnoty získané pomocí teorie EVT (modrá čárkovaná přímka). Toto porovnání je zvoleno za pomoci dvojitě logaritmického grafu, kde se mocninné zákony zobrazují jako přímky. Je vidět, že skutečné (odhadnuté) střední hodnoty μ_{best} mají pro prvních několik záměn vodorovnou levou asymptotu. Pokud počet záměn dosáhne cca N_l , dojde k prudkému poklesu střední hodnoty chyby μ_{best} a pro $N_{\text{trials}} > 2N_l$ je vývoj střední hodnoty dobře aproximovatelný střední hodnotou minima nezávislých náhodných veličin.

Provedeme nyní odvození rozdělení náhodné chyby korelace ρ_{best} , která je minimem normy ρ_{max} po N_{trials} záměnách pořadí dvojic hodnot vektoru. Jednotlivé stavy ρ_{best} v průběhu procesu jsou náhodné veličiny s polonormální hustotou a distribuční funkcí $f_{\text{max}}(x)$, $F_{\text{max}}(x)$. Je známo, že při předpokladu o nezávislosti lze pro distribuční funkci a hustotu minima ρ_{best} psát:

$$F_{\text{best}}(x) = 1 - [1 - F_{\text{max}}(x)]^{N_{\text{trial}}} \quad f_{\text{best}}(x) = N_{\text{trial}} f_{\text{max}}(x) [1 - F_{\text{max}}(x)]^{N_{\text{trial}}-1} \quad (20)$$

Lze ukázat, že existuje limitní forma rozdělení veličiny ρ_{best} , tedy minima z polonormálních náhodných veličin. Toto elementární rozdělení spadá do oblasti přitažlivosti

Weibullova rozdělení a asymptotické rozdělení ρ_{best} pro $N_{\text{trials}} \rightarrow \infty$ je Weibullovo (exponenciální) rozdělení:

$$F_{\text{best}}(x) = 1 - \exp\left(-\frac{x}{\mu_{\text{best}}}\right) \quad f_{\text{best}}(x) = \frac{1}{\mu_{\text{best}}} \exp\left(-\frac{x}{\mu_{\text{best}}}\right) \quad (21)$$

Jedná se tedy o stejné asymptotické rozdělení minim, jako pro rovnoměrné elementární rozdělení. Je to proto, že hustota polonormálního rozdělení pro $x \rightarrow 0$ je rovnoměrná. Střední hodnota a směrodatná odchylka tohoto rozdělení jsou shodné a jsou také dány chováním levého chvostu elementárního rozdělení $f_{\text{max}}(x)$, $F_{\text{max}}(x)$ pro rostoucí N_{trials} , metodika viz [7]:

$$\mu_{\text{best}} = F_{\text{max}}^{-1}\left(\frac{1}{N_{\text{trials}}}\right) = \sigma_i \cdot \Phi^{-1}\left(\frac{1}{2N_{\text{trials}}} + \frac{1}{2}\right) = \sigma_i \cdot \sqrt{2} \operatorname{erf}^{-1}\left(\frac{1}{N_{\text{trials}}}\right) \quad (22)$$

McLaurinův rozvoj funkce $\operatorname{erf}^{-1}(\xi) = \sqrt{\pi}(\xi/2 + \pi\xi^3/24 + \dots)$ ukazuje, že pro velké počty záměn N_{trials} je dostatečně dobrou aproximací použití pouze prvního (lineárního) členu. Pak je vidět, že počet simulací a počet záměn mají, asymptoticky, na hledané minimum chyby ρ_{best} nezávislý vliv:

$$\mu_{\text{best}} = \sigma_{\text{best}} = \sigma_i \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{N_{\text{trials}}} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{N_{\text{sim}} - 1}}}_{\sigma_i} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{N_{\text{trials}}} \quad (23)$$

Průběh této střední hodnoty je vyobrazen v obr. 4a zelenou čerchovanou přímkou.

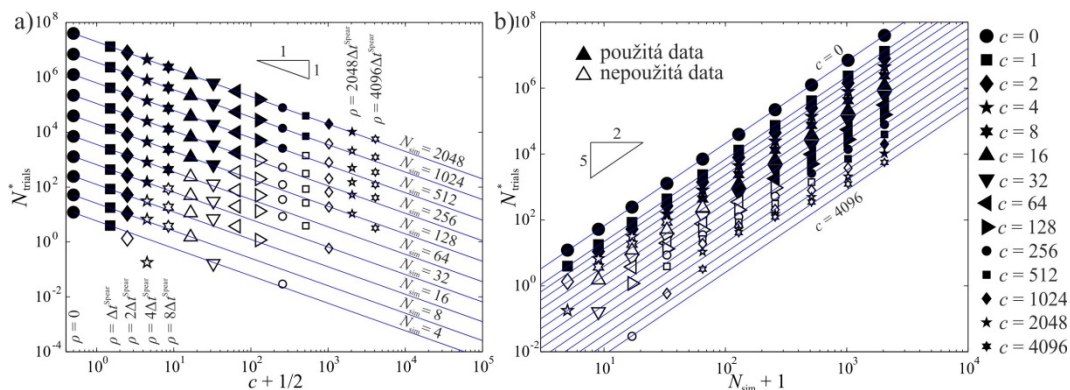
Obr. 4b demonstruje dobrou shodu mezi odhadnutým rozdělením $f_{\text{best}}(\rho_{\text{best}})$ pomocí empirického histogramu získaného simulačním programem a asymptotickou formou rozdělení odvozenou v rovnici (21).

6 NÁHODNÝ POČET ZÁMĚN NUTNÝCH K DOSAŽENÍ POŽADOVANÉ KORELACE

Poslední otázkou, kterou si lze klást, je, zda lze predikovat nutný počet záměn vedoucích k zadané hodnotě korelačního koeficientu, případně k minimální chybě korelace uvedené v rovnici (4). Problém byl studován za pomoci počítačového programu a byly zpracovány histogramy náhodného počtu nutných záměn N_{trials} pro různá N_{sim} a různé hodnoty parametru úrovně cílové korelace $c = \rho/\Delta t^{\text{Spear}}$, který vyjadřuje poměr mezi hodnotou cílové korelace ρ a minimální vzdáleností mezi dosažitelnými hodnotami korelace Δt^{Spear} (5). Nulové cílové korelaci tedy odpovídá $c = 0$.

Závislost počtu záměn N_{trials} k dosažení požadované korelace, na dané hodnotě požadované korelace ρ (resp. úrovně korelace c) a na počtu simulací N_{sim} můžeme zkoumat na následujících grafech v obr. 5. Ukázalo se, že graf v obr. 5a se jeví jako přímka, pokud je na vodorovnou osu vynesena hodnota $(c + 1/2)$. To navíc umožňuje zobrazit i hodnoty pro $c = 0$ (tedy $\rho = 0$) při použití logaritmického měřítka. Hodnoty na svislé ose jsou zprůměrované statistiky pro potřebná N_{trials} : $N_{\text{trials}}^* = (\mu_{N_{\text{trials}}} + \sigma_{N_{\text{trials}}})/2$. Histogramy náhodného počtu N_{trials} ukazují, že se jedná o veličiny s exponenciálním rozdělením, u kterých je shodná střední hodnota $\mu_{N_{\text{trials}}}$ a směrodatná odchylka $\sigma_{N_{\text{trials}}}$. Pro nalezení vhodného vztahu vystihujícího závislost počtu záměn na N_{sim} a c

byla použita pouze data znázorněna plnými značkami (pro vysoké hodnoty N_{sim} a nízká c), u kterých je minimální odchylka histogramu od aproximace exponenciálním rozdělením.



Obr. 5 Vývoj N_{trials}^* v závislosti na c a N_{sim} : a) závislost N_{trials}^* na c pro různá N_{sim} ;
b) závislost N_{trials}^* na N_{sim} pro různá c .

V obr. 5b je znázorněna závislost N_{trials}^* na N_{sim} pro různé hodnoty c . Opět byly hodnoty vynášené na vodorovnou osu upraveny tak, aby se graf jevil jako přímka – vynášeny jsou hodnoty $(N_{\text{sim}} + 1)$. Pro nalezení vztahu závislosti N_{trials}^* na N_{sim} a c byly opět použity pouze hodnoty s plnými značkami, kde lze uplatnit předpoklady o asymptotickém chování.

Z grafů je patrné, že se jedná o vliv dvou nezávislých proměnných, a to úrovně c a počtu vzorků/simulací N_{sim} . Navrhujeme tedy aproximaci ve tvaru

$$N_{\text{trials}}^*(N_{\text{sim}}, c) = k \cdot f_{N_{\text{sim}}}(N_{\text{sim}}) \cdot f_c(c) \quad (24)$$

kde dvě funkce určíme zvlášť a součinitel k pomocí regrese. Z grafu 5a je patrný tvar funkce $f_c(c)$ a z grafu 5b nahlédneme snadno na tvar funkce $f_{N_{\text{sim}}}(N_{\text{sim}})$. Obě funkce jsou mocninné a hledané mocniny jsou vyznačeny jako sklony přímek na obr. 5, takže píšeme:

$$f_c(c) = \frac{1}{c + 0.5} \quad , \quad f_{N_{\text{sim}}}(N_{\text{sim}}) = (N_{\text{sim}} + 1)^{5/2} \quad (25)$$

Dosažením obou navržených funkcí a stanovením konstanty $k \approx 1/9.6$ pomocí lineární regrese obdržíme aproximaci ve tvaru

$$N_{\text{trials}}^* \approx \frac{1}{9.6} (N_{\text{sim}} + 1)^{5/2} \frac{1}{c + 0.5} = \frac{1}{9.6} (N_{\text{sim}} + 1)^{5/2} \frac{\Delta t^{\text{Spear}}}{\rho + 0.5 \Delta t^{\text{Spear}}} \quad (26)$$

Je tedy např. vidět, že průměrný počet náhodných záměn, který povede k dosažení nulové korelace je roven $N_{\text{trials}}^*(N_{\text{sim}}, 0) = 0.21(N_{\text{sim}} + 1)^{5/2}$. Mocninu 5/2 u vlivu N_{sim} lze také odvodit přímo – uvážením faktu, že pro $N_{\text{trials}} = 0$ se ve střední hodnotě dosahuje střední hodnoty normy počáteční korelace (8)

$$N_t = 0: \quad \bar{\rho}_{\text{best}} = \mu_{\text{max}} = \sigma_t \sqrt{\frac{2}{\pi}} \quad \Rightarrow \quad \bar{c} = \frac{\bar{\rho}_{\text{best}}}{\Delta t^{\text{Spear}}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{N_{\text{sim}}^3 - N_{\text{sim}}}{\sqrt{N_{\text{sim}} - 1}} \frac{1}{12} \propto N_{\text{sim}}^{5/2} \quad (27)$$

Navržená aproximace (26) nepopisuje vhodně počáteční fázi studovaného náhodného procesu, jelikož rozdělení hodnot normy korelace v počátku je polonormální, zatímco aproximace

(26) odpovídá již rozdělení exponenciálnímu, kterého se dosahuje při vyšších hodnotách N_{trials} . V hodnotě mocniny u N_{sim} se však obě funkce (26, 27) shodují.

7 ZÁVĚR

Hlavními výsledky předložené studie jsou asymptotické vlastnosti cílových proměnných v problému zavádění požadované statistické závislosti mezi vektory hodnot reprezentujících náhodné veličiny. Výsledky jsou odvozeny pro Spearmanův korelační koeficient pořadové korelace a lze předpokládat, že podobné závislosti budou platit pro Pearsonův korelační koeficient v případě, že rozdělení vzorkovaných náhodných budou blízké normálnímu rozdělení.

Studované vlastnosti, pro které jsou odvozeny potřebné charakteristiky, jsou: (i) rozdělení náhodného korelačního koeficientu při náhodném pořadí hodnot vektorů, (ii) rozdělení změny korelace spojené s prohozením dvojice realizací v jednom z vektorů, (iii) vlastnosti procesu (náhodné procházky), který vzniká posloupností záměn pořadí, (iv) charakteristiky procesu absolutní hodnoty náhodné korelace, (v) rozdělení minima absolutní korelace (normy chyby korelace) jako funkce počtu záměn, (vi) asymptotické rozdělení počtu náhodných záměn, které vedou ke splnění požadavku předem určené korelace mezi vektory.

PODĚKOVÁNÍ

Príspevek byl realizován za finanční podpory Grantové agentury ČR (prostřednictvím projektu č. P105/11/1385) a Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy (prostřednictvím projektu Specifického vysokoškolského výzkumu pod číslem FAST-J-13-1922).

LITERATURA

- [1] CONOVER, W.J. On a Better Method for Selecting Input Variables, původně nepublikovaná zpráva z roku 1975 v Los Alamos National Laboratories, reprodukována jako Appendix A zprávy “Latin Hypercube Sampling and the Propagation of Uncertainty in Analyses of Complex Systems“ autor; J.C. Helton and F.J. Davis, Sandia National Laboratories report SAND2001-0417, listopad 2002.
- [2] OWEN, A.B.. Controlling Correlations in Latin Hypercube Samples. *Journal of the American Statistical Association (Theory and methods)*, 89(428):1517–1522, 1994, ISSN 01621459.
- [3] HUNTINGTON, D.E. a C.S. LYRINTZIS. Improvements to and limitations of Latin Hypercube Sampling. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 13(4):245–253, 1998, ISSN: 0266-8920.
- [4] VOŘECHOVSKÝ, M. a D. NOVÁK. Correlation control in small-sample Monte Carlo type simulations I: A simulated annealing approach. *Probabilistic Engineering Mechanics*. 2009, vol. 24, issue 3, s. 452-462, ISSN 0266-8920.
- [5] VOŘECHOVSKÝ, M. Correlation control in small sample Monte Carlo type simulations II: Analysis of estimation formulas, random correlation and perfect uncorrelatedness. *Probabilistic Engineering Mechanics*. 2012, vol. 29, s. 105-120, ISSN 0266-8920.
- [6] VOŘECHOVSKÝ, M. Correlation in probabilistic simulation. In: FABER, M. H. *Sborník příspěvků konference ICASP 2011 Zürich*, 2011, s. 2931-2939, ISBN 978-0-415-66986-3.
- [7] CASTILLO, E. *Extreme value theory in engineering*. Boston: Academic Press, c1988, xv, 389 p. ISBN 01-216-3475-2.

Oponentní posudek vypracoval:

Doc. Ing. Matěj Lepš, Ph.D., Katedra mechaniky, Fakulta stavební, ČVUT v Praze.

Doc. Ing. David Pustka, Ph.D., Katedra konstrukcí, Fakulta stavební, VŠB-TU Ostrava.

Iveta SKOTNICOVÁ¹, Zdeněk GALDA², Petra TYMOVÁ³, Lenka LAUSOVÁ⁴

**POROVNÁNÍ VÝSLEDKŮ EXPERIMENTÁLNÍHO MĚŘENÍ A NUMERICKÉ SIMULACE
TEPELNÉHO CHOVÁNÍ OBVODOVÉ STĚNY DŘEVOSTAVBY**

**COMPARISON OF THE EXPERIMENTAL MEASUREMENTS AND NUMERICAL
SIMULATIONS OF THE THERMAL PERFORMANCE
OF THE EXTERNAL TIMBER FRAME WALL**

Abstrakt

Príspevok analyzuje výsledky experimentálneho merania a numerické simulácie prubehů teplot uvnitř lehké dřevěné konstrukce v zimním a letním období. Vyhodnocuje vhodnost použití teoretických numerických metod pro predikce teplotního pole ve stavební konstrukci vystavené nestacionárním okrajovým podmínkám.

Klíčová slova

Numerická simulace teplotního pole, experimentální měření průběhů teplot uvnitř konstrukce, lehká stavební konstrukce.

Abstract

The paper compares the results of experimental measurements and numerical solution of a temperature within a light wooden structure in winter and summer. Suitability of theoretical numerical methods for the prediction of thermal behavior of building structures is evaluated.

Keywords

Numerical simulation of the temperature field, experimental measurements of the temperatures inside the structure, lightweight building structure.

1 ÚVOD

Základním cílem příspěvku je porovnání výsledků experimentálního měření a numerické analýzy tepelného chování obvodové konstrukce [1] reálné dřevostavby v zimním a letním období. Účelem výzkumu je ověření vhodnosti použití numerické simulační metody pro predikci teplotního chování lehkých stavebních konstrukcí na bázi dřeva, které má významný vliv na tepelnou pohodu vnitřního prostředí [2, 3].

¹ Ing. Iveta Skotnicová, Ph.D., Katedra prostředí staveb a TZB, Fakulta stavební, VŠB-Technická univerzita Ostrava, Ludvíka Podéště 1875/17, 708 33 Ostrava-Poruba, tel.: (+420) 597 321 957, e-mail: iveta.skotnicova@vsb.cz.

² Ing. Zdeněk Galda, Ph.D., Katedra prostředí staveb a TZB, Fakulta stavební, VŠB-Technická univerzita Ostrava, Ludvíka Podéště 1875/17, 708 33 Ostrava-Poruba, tel.: (+420) 597 321907, e-mail: zdenek.galda@vsb.cz.

³ Ing. Petra Tymová, Ph.D., Katedra prostředí staveb a TZB, Fakulta stavební, VŠB-Technická univerzita Ostrava, Ludvíka Podéště 1875/17, 708 33 Ostrava-Poruba, tel.: (+420) 597 321 352, e-mail: petra.tymova@vsb.cz.

⁴ Ing. Lenka Lausová, Katedra stavební mechaniky, Fakulta stavební, VŠB-Technická univerzita Ostrava, Ludvíka Podéště 1875/17, 708 33 Ostrava-Poruba, tel.: (+420) 597 321 326, e-mail: lenka.lausova@vsb.cz.

Experimentální měření průběhů teplot probíhalo na reálné dřevostavbě v pasivním standardu umístěné v areálu Fakulty stavební VŠB-TU Ostrava. Dřevostavba je využívána jako Výzkumné a inovační centrum Moravskoslezského dřevařského klastru a Fakulty stavební a je vybavena řadou měřicích senzorů monitorujících nejen průběhy teplot, ale i vlhkostí a dalších veličin ve vnitřním prostředí, ve stavebních konstrukcích a v podzácí.

Pro teoretickou analýzu tepelného chování obvodové konstrukce byla zvolena numerická implicitní metoda – metoda konečných prvků, která je pro řešení zejména nestacionárních vícerozměrných tepelných úloh vhodnější než metoda analytická. Podstata metody spočívá v diskretizaci prostoru, resp. času. Numerické metody umožňují získat řešení tepelného (resp. teplotního) problému v konečném počtu diskrétních míst (uzlů) zvolené sítě a to v celé oblasti, nebo její části. Pro numerický simulační výpočet byl použit program ANSYS.

Porovnání výsledků experimentálního měření a numerické simulace tepelného chování obvodové stěny dřevostavby bylo provedeno pro dva vybrané detaily (viz Tab. 1), které se odlišují materiálovou skladbou a orientací vůči světovým stranám: detail 1 (skladba A, jižní fasáda), detail 2 (kout, skladba B, severozápadní fasáda). Oba detaily byly hodnoceny pro zimní a letní období. Teoretická analýza obou detailů byla provedena pro reálné okrajové podmínky pro zimní a letní období získané experimentálním měřením.

2 VÝSLEDKY EXPERIMENTÁLNÍHO MĚŘENÍ

Obvodové konstrukce posuzované dřevostavby jsou řešeny jako difúzně otevřené s dřevovláknitou tepelnou izolací. V Tab. 1 jsou uvedeny skladby posuzovaných detailů obvodové stěny, v Tab. 2 jsou uvedeny základní tepelné technické vlastnosti použitých stavebních materiálů.

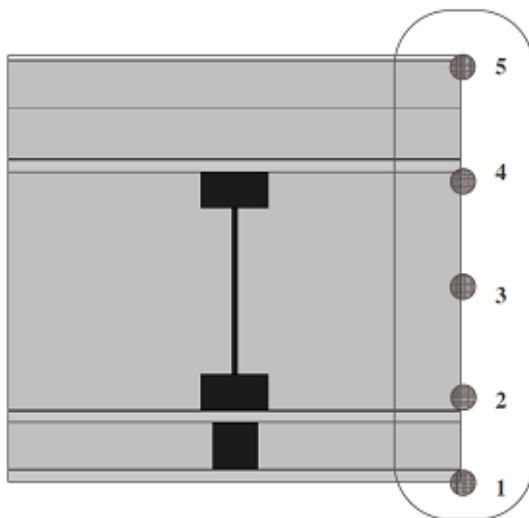
Tab. 1: Skladby obvodové stěny dřevostavby v posuzovaných detailech

Detail 1 (skladba A)	Tloušťka vrstev d [m]	Detail 2 (skladba B)	Tloušťka vrstev d [m]
deska Fermacell	0,015	deska Fermacell	0,015
tepelná izolace Steico Flex	0,060	tepelná izolace Steico Flex	0,060
deska Fermacel Vapor	0,015	deska Fermacel Vapor	0,015
tepelná izolace Steico Flex/nosník Steico Wall SW90	0,300	tepelná izolace Steico Flex/nosník Steico Wall SW90	0,300
deska Fermacell	0,015	deska Fermacell	0,015
tepelná izolace Steico Therm	0,080	tepelná izolace Steico Special	0,100
tepelná izolace Steico Protect	0,060	větrotěsná pojistná fólie	
omítka Baumit	0,007	odvětrávaná vzduchová mezera	0,040
		cementotřísková deska Cetris	0,012

Tab. 2: Tepelné technické vlastnosti stavebních materiálů

Stavební materiály	Objemová hmotnost ρ [kg/m ³]	Součinitel tepelné vodivosti λ [W/(m.K)]	Měrná tepelná kapacita c [J/(kg.K)]	Součinitel teplotní vodivosti a [m ² /s]
deska Fermacell	1250	0,320	1000	$2,56 \cdot 10^{-7}$
tepelná izolace Steico Flex	50	0,039	2100	$3,7 \cdot 10^{-7}$
tepelná izolace Steico Therm	160	0,043	2100	$1,28 \cdot 10^{-7}$
tepelná izolace Steico Protect	250	0,053	2100	$1,00 \cdot 10^{-7}$
tepelná izolace Steico Special	240	0,047	2100	$0,93 \cdot 10^{-7}$
dřevo	400	0,180	2510	$1,8 \cdot 10^{-7}$
omítka Baumit	1800	0,800	850	$5,23 \cdot 10^{-7}$

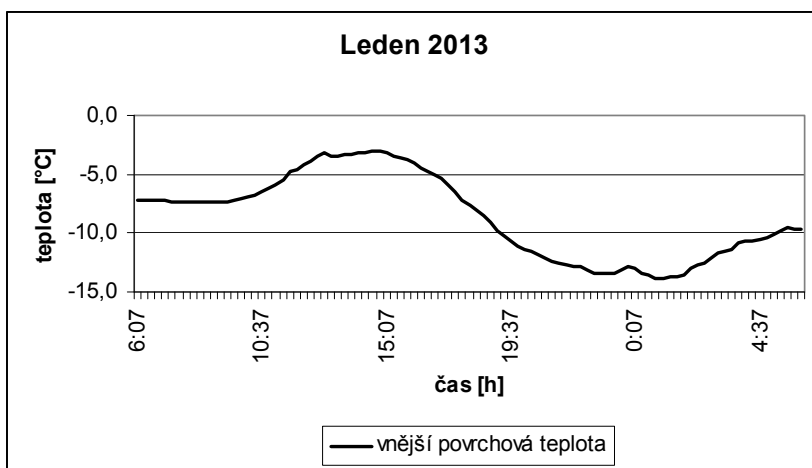
V obvodových stěnách jsou zabudovány snímače, které dlouhodobě monitorují průběhy teplot (a také vlhkosti) v příčném profilu konstrukcí. Jednotlivé pozice snímačů (celkem 5 v každém profilu – viz obr. 1) mají umožnit sledování teplotního chování konstrukce s ohledem na různé faktory - vliv skladby konstrukce, vliv orientace konstrukce na světové strany, vliv tepelných vazeb (kouty), vliv odvětrávané mezery na vnější straně konstrukce apod.



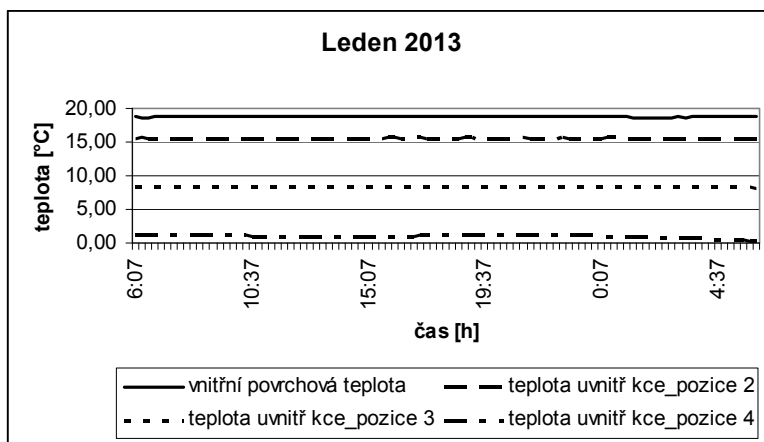
Obr. 1: Umístění teplotních snímačů uvnitř detailu 1

Současně je měřena teplota venkovního vzduchu (stíněné teplotní čidlo na severní fasádě) a vnitřní teplota (teplota vnitřního vzduchu i celková vnitřní teplota vzduchu) v jednotlivých místnostech.

Na obr. 2 a obr. 3 je znázorněn časový průběh naměřených teplot v detailu 1 obvodové stěny v zimním období pro vybrané dva dny v měsíci lednu (26.1. - 27.1. 2013), kdy teploty venkovního vzduchu dosahovaly nízkých hodnot blízkých se hodnotám normovým [4].



Obr. 2: Časový průběh vnější povrchové teploty obvodové stěny (detail 1)

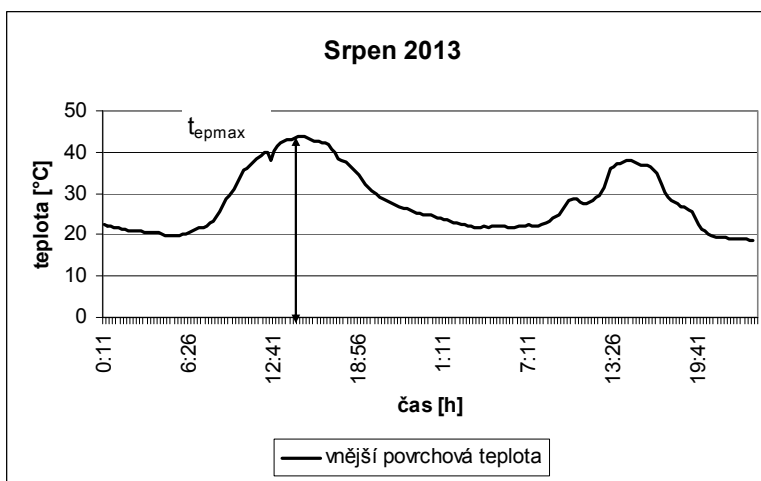


Obr. 3: Časový průběh teplot uvnitř obvodové stěny (detail 1)

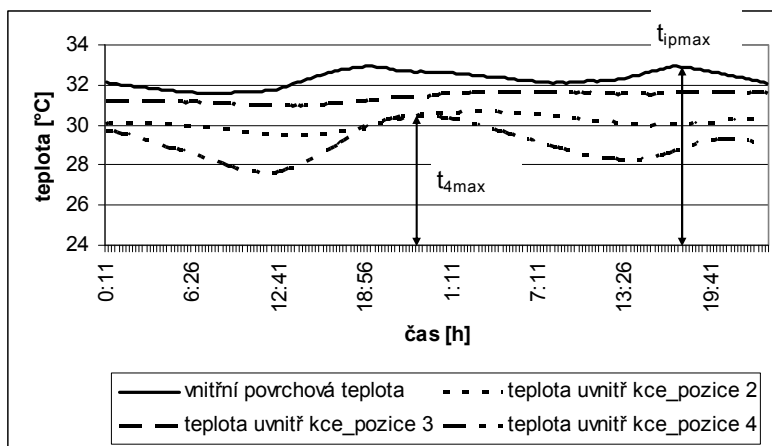
Naměřené průběhy teplot ukazují, jakým způsobem se konstrukce díky svým tepelně izolačním vlastnostem vyrovnává s nízkými teplotami na vnějším povrchu v zimním období. Zatímco vnější povrch konstrukce je zatěžován rozdílem povrchových teplot v průběhu dne od $-13,9\text{ }^{\circ}\text{C}$ do $-3,1\text{ }^{\circ}\text{C}$, vnitřní vrstvy konstrukce včetně vnitřního povrchu vykazují velice malé odchylky v teplotách ($17,8\text{ }^{\circ}\text{C}$ až $18,8\text{ }^{\circ}\text{C}$). Přičemž průběh vnitřní povrchové teploty je ovlivněn vnitřní teplotou vzduchu a provozním režimem vytápění.

Na obr. 4 a obr. 5 je znázorněn časový průběh naměřených teplot v detailu 1 obvodové stěny v letním období pro vybraný den (8.8. – 9.8. 2013), kdy teploty venkovního vzduchu dosahovaly vysokých hodnot blížící se hodnotám normovým [5].

V průběhu dne 8.8. byla naměřena maximální vnější povrchová teplota konstrukce $43,8\text{ }^{\circ}\text{C}$ a minimální vnější povrchová teplota konstrukce $19,8\text{ }^{\circ}\text{C}$. Zatímco vnitřní vrstvy konstrukce včetně vnitřního povrchu vykazují velice malé odchylky v teplotách od $31,6\text{ }^{\circ}\text{C}$ do $33,4\text{ }^{\circ}\text{C}$. Časový rozdíl mezi maximem teploty na vnitřním povrchu konstrukce a maximem teploty na vnějším povrchu konstrukce (vzduchu) nazýváme fázovým posunutím teplotních kmitů ψ . V případě detailu 1 vychází hodnota fázového posunutí v hodnoceném dni 25 hod.



Obr. 4: Časový průběh vnější povrchové teploty obvodové stěny (detail 1)



Obr. 5: Časový průběh teplot uvnitř obvodové stěny (detail 1)

Z průběhu teplot je zřejmé, jakým způsobem se konstrukce dokáže vyrovnat s působením velkého rozdílu teplot na vnějším povrchu během dne.

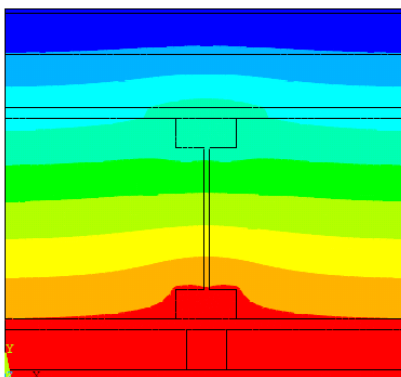
Naměřené vyšší vnitřní teploty vzduchu byly ovlivněny provozním režimem větrání, kdy v rámci zajištění stejných okrajových podmínek pro měření nebyl vnitřní prostor ochlazován větráním venkovního vzduchu v nočních hodinách.

V detailu 2 obvodové stěny (kout) byla v průběhu dne 8. 8. naměřena maximální vnější povrchová teplota konstrukce 39,2 °C a minimální vnější povrchová teplota konstrukce 21,1 °C. Na teplotě se projevil vliv odvětrávané vzduchové mezery a také severozápadní orientace hodnoceného detailu.

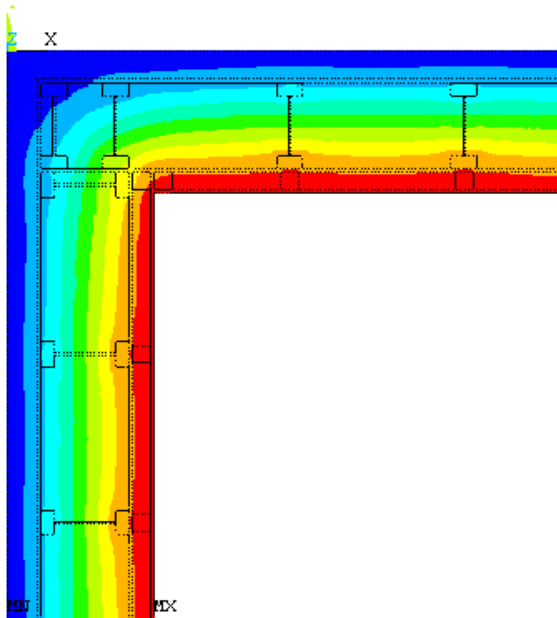
3 NUMERICKÝ SIMULAČNÍ VÝPOČET

Pro numerické modelování tepelného chování stavební konstrukce byl použit numerický výpočet metodou konečných prvků v programu ANSYS. Celý proces přípravy a výpočtu simulačního modelu v programu ANSYS lze rozdělit do tří základních fází:

Preprocessing – příprava vstupních dat. Řešené modely obvodových konstrukcí byly vytvořeny pomocí plošných konečných prvků typu PLANE55 (obr. 6, obr. 7). Každý materiál byl definován pomocí tepelně technických vlastností: objemové hmotnosti, měrné tepelné kapacity, součinitele tepelné vodivosti. V rámci tvorby sítě byly přiřazeny jednotlivým plochám modelu jejich atributy, celý prvek byl rozdělen sítí s hustotou 0,01 m a byly vytvořeny uzly.



Obr. 6: Numerický model typu PLANE55 obvodová stěna (detail 1)



Obr. 7: Numerický model typu PLANE55 – kout obvodových stěn (detail 2)

Processing – výpočet (numerické jádro). Analýza výpočtu byla řešena jako dvourozměrná stacionární a nestacionární úloha. Nestacionární úloha vyžaduje zadání času a časového kroku. Pro výpočet byl použit minimální časový krok 100 s a maximální časový krok shodný s časovým krokem měření (3600 s). Celková délka hodnoceného časového úseku byla zvolena 24 hodin.

Počáteční podmínka výpočtu, která popisuje rozložení teploty v tělese na počátku děje v čase t_0 , byla do výpočtu pro letní období řešena pomocí referenční teploty $\theta = 30$ °C. Tato teplota byla ověřována simulačními výpočty, aby počáteční teplotní stav konstrukce odpovídal skutečným naměřeným teplotám v čase t_0 . Pro zimní období byla počáteční podmínka rozložení teploty uvnitř konstrukce nejdříve nastavena pomocí simulačního výpočtu teplotního pole za stacionárních podmínek (pro detail 1: $\theta_{se} = -6,5$ °C, $\theta_{si} = 18,8$ °C, pro detail 2: $\theta_{se} = -5,0$ °C, $\theta_{si} = 17,1$ °C) a tento stav byl dále použit jako počáteční podmínka pro nestacionární výpočet. Počáteční podmínka rozložení teplotního pole byla ověřována simulačními výpočty, aby počáteční teplotní stav konstrukce v čase t_0 odpovídal skutečným naměřeným teplotám.

Okrajové podmínky nestacionárního výpočtu pro zimní období byly definovány pro vnější stranu konstrukce pomocí podmínky 1. druhu Dirichletovy - vnější povrchové teploty konstrukce byly dosazeny z reálných naměřených hodinových hodnot v časovém úseku od 6,00 hod. dne 26.1. do 5.00 hod. dne 27.1 2013. Pro vnitřní stranu konstrukce byla nastavena okrajová podmínka 1. druhu Dirichletova – průměrná vnitřní povrchová teplota konstrukce $\theta_{sim} = 18,8$ °C, která byla uvažována konstantní v celém časovém úseku 24 hodin pro detail 1 a pro detail 2 byla uvažována konstantní povrchová teplota $\theta_{sim} = 17,1$ °C.

Okrajové podmínky nestacionárního výpočtu pro letní období byly definovány pro vnější stranu konstrukce pomocí podmínky 1. druhu Dirichletovy - vnější povrchové teploty konstrukce byly dosazeny z reálných naměřených hodinových hodnot pro den 8.8. 2013 (od 1,00 hod. do 24,00 hod.). Pro vnitřní stranu konstrukce byla nastavena okrajová podmínka 1. druhu Dirichletova – vnitřní povrchová teplota konstrukce $\theta_{si} = 32,1$ °C, která byla uvažována konstantní v celém časovém úseku 24 hodin pro detail 1 a pro detail 2 byla uvažována konstantní povrchová teplota $\theta_{si} = 33,2$ °C.

Postprocessing – zpracování dat. V tab.3 a tab.4 jsou uvedeny výsledné naměřené a vypočtené teploty v jednotlivých pozicích teplotních snímačů pro dva řešené detaily obvodové stěny ve vybrané hodině v obou reprezentativních dnech pro zimní a letní období.

Tab. 3: Průběhy teplot v příčném profilu řešených detailů v zimním období

Číslo pozice teplotního snímače	5	4	3	2	1
Teploty v detailu 1 – jižní fasáda [°C]					
Experimentální měření 27.1. 2013 v 5,00 hod	-10,1	0,4	8,2	15,5	18,8
ANSYS – b) pro naměřené okrajové podmínky v 5,00 hod	-10,1	0,2	8,5	15,7	18,8
Teploty v detailu 2 – severozápadní kout [°C]					
Experimentální měření 27.1. 2013 v 5,00 hod	-9,6	-5,0	0,1	9,8	17,1
ANSYS – b) pro naměřené okrajové podmínky v 5,00 hod	-9,6	-5,7	0,4	10,2	17,1

Z uvedených hodnot v tab. 3 je zřejmé, že výsledky numerické simulace průběhů teplot uvnitř konstrukce se přibližují skutečným naměřeným teplotám v dané konstrukci. Rozdíly teplot se pohybují maximálně v rozmezí $\pm 0,3$ °C.

V detailu 2 (kout) je ve výsledcích patrný vliv deformace teplotního pole v místě tepelné vazby [6], kdy v příčném profilu dochází k výraznějšímu ochlazení konstrukce. Vyšší vnější povrchová teplota v detailu 2 (než v detailu 1) je ovlivněna odvětrávanou vzduchovou mezerou.

Tab. 4: Průběhy teplot v příčném profilu řešených detailů v letním období

Číslo pozice teplotního snímače	5	4	3	2	1
Teploty v detailu 1 – jižní fasáda [°C]					
Experimentální měření 8.8. 2013 ve 14 hodin	43,0	28,0	29,5	31,0	32,1
ANSYS – b) pro naměřené okrajové podmínky ve 14 hodin	43,0	29,0	30,1	31,1	32,1
Teploty v detailu 2 – severozápadní kout [°C]					
Experimentální měření 8.8. 2013 ve 14 hodin	37,7	28,2	29,2	31,4	33,2
ANSYS – b) pro naměřené okrajové podmínky ve 14 hodin	37,7	28,9	29,5	30,5	33,2

Z uvedených hodnot v tab. 4 je zřejmé, že výsledky numerické simulace průběhů teplot uvnitř konstrukce se přibližují skutečným naměřeným teplotám v dané konstrukci. Rozdíly teplot se pohybují maximálně v rozmezí ± 1 °C.

Nížší vnější povrchová teplota v detailu 2 (než v detailu 1) je ovlivněna odvětrávanou vzduchovou mezerou.

4 ZÁVĚR

Cílem příspěvku bylo porovnání výsledků experimentálního měření a numerické simulace teplotního pole v obvodové konstrukci reálné dřevostavby v zimním a letním období. Účelem výzkumu bylo ověření vhodnosti použití numerické simulační metody pro predikci průběhů teplot uvnitř lehkých stavebních konstrukcí na bázi dřeva. Zhodnocení uvedených výsledků lze shrnout do následujících bodů:

- Použití numerických simulačních metod pro predikci průběhů teplot uvnitř stavebních konstrukcí se jeví jako vhodný nástroj – průběh vypočtených teplot v jednotlivých pozicích teplotních snímačů koresponduje s naměřenými hodnotami.
- Výsledky simulačních výpočtů vychází s dostatečnou přesností na straně bezpečnosti.
- Simulační výpočty při uvažování nestacionárního přenosu tepla se více přibližují svými výsledky k naměřeným veličinám a poskytují podrobnější informace o tom, jak se v závislosti na čase a změnách okrajových podmínek mění rozložení teplot v konstrukci, než simulační výpočty při uvažování stacionárního přenosu tepla.

PODĚKOVÁNÍ

Příspěvek byl realizován za finanční podpory z prostředků Koncepčního rozvoje vědy, výzkumu a inovací pro rok 2013, přidělených VŠB-TU Ostrava Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy české republiky. A dále za finanční podpory Evropského sociálního fondu a státního rozpočtu ČR v rámci projektu OPVK pod názvem: „Tvorba a internacionalizace špičkových vědeckých týmů a zvyšování jejich excelence na Fakultě stavební“, číslo projektu CZ.1.07/2.3.00/20.0013.

LITERATURA

- [1] BARRIOS, Guillermo et al. Envelope wall/roof thermal performance parameters for non air-conditioned buildings. *Energy and Buildings*. 2012, v. 50, pp. 120–127. ISSN 0378-7788. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.enbuild.2012.03.030>.
- [2] KALOUSEK, Michal & David Bečkovský. Thermal comfort of lightweight building in summer time. In *Healthy buildings 2006*. Lisabon: TU Lisabon, 6.-8. 6. 2006, pp. 64–67. ISBN 80-214-3129- 6.
- [3] ŠIKULA, O. Model dynamického tepelného chování konstrukčních detailů. In *Simulace budov a techniky prostředí Sborník 5. konference IBPSA- CZ*. Brno: IBPSA-CZ, ČVUT, 2008. s. 133-137. ISBN: 978-80-254-3373- 7.
- [4] ČSN 73 0540 *Tepelná ochrana budov*. Praha: Úřad pro technickou normalizaci, metrologii a státní zkušebnictví, 2011. 356 s.
- [5] ČSN 73 0548 *Výpočet tepelné zátěže klimatizovaných prostorů*. Praha: Úřad pro technickou normalizaci, metrologii a státní zkušebnictví, 1986. 30 s.
- [6] KOSUTOVA, Katarina, Ondrej ŠIKULA a Josef PLASEK. Thermal Bonds of Buildings Structures in Energy Conservation - A Case Study. In: DENG, W. AASRI Procedia. 2012, s. 14-19. ISSN 22126716. DOI: 10.1016/j.aasri.2012.09.007.

Dostupné z: <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S2212671612001060>

Oponentní posudek vypracoval:

Doc. Dr. Ing. Zbyněk Svoboda, Katedra konstrukcí pozemních staveb, Fakulta stavební, ČVUT v Praze.

Doc. Ing. Ondřej Šikula, Ph.D., Ústav technických zařízení budov, Fakulta stavební, VUT v Brně.

Sborník vědeckých prací
Vysoké školy báňské – Technické univerzity Ostrava
číslo 2, rok 2013, ročník XIII, řada stavební
Transactions of the VŠB – Technical University of Ostrava
No. 2, 2013, Vol. XIII, Civil Engineering Series

Redakční rada / Editorial board:

Šéfredaktor / Editor in chief: doc. Ing. Martin Krejsa, Ph.D.,
VŠB-TU Ostrava, Fakulta stavební
Zástupce šéfredaktora / Deputy editor: doc. RNDr. Eva Hrubešová, Ph.D.,
VŠB-TU Ostrava, Fakulta stavební

Členové redakční rady / Members of the editorial board:

prof. Michael Beer, University of Liverpool, Spojené království
prof. Ing. Radim Čajka, CSc., VŠB-TU Ostrava, Fakulta stavební
Dr. Peter Dusicka, Ph.D., P.E., Portland State University, USA
Pratanu Ghosh, Ph.D., Assistant Professor, California State University, Fullerton, USA
prof. David Hui, University of New Orleans, USA
prof. Chih Chen Chang, Ph.D., FHKIE,
Hong Kong University of Science and Technology, Hong Kong
prof. Qi Chengzhi, Beijing University of Civil Engineering and Architecture, Čína
doc. Ing.arch. Ján Ilkovič, CSc., Fakulta architektúry STU v Bratislave, Slovensko
doc. Ing. Petr Janas, CSc., VŠB-TU Ostrava, Fakulta stavební
prof. RNDr. Zdeněk Kaláb, CSc., Ústav geoniky AV ČR
a VŠB-TU Ostrava, Fakulta stavební
prof. Gela Kipiani, Georgian Technical University, Tbilisi, Gruzie
prof. Ing. Jozef Melcer, DrSc., Žilinská univerzita v Žiline,
Stavebná fakulta, Slovensko
prof. Suren Mkhitarian, Doctor of Sciences
Corresponding Member of the National Academy of Sciences, Arménie
doc. Ing. Jaroslav Navrátil, CSc., Vysoké učení technické v Brně, Fakulta stavební
Ing. arch. Hana Pačlová, Ph.D., VŠB-TU Ostrava, Fakulta stavební
Assoc. Prof. Doncho Partov, PhD. Eng., Higher School of Civil Engineering
"Lyuben Karavelov", Sofie, Bulharsko
Ing. Jindřich Pater, ČKAIT, oblastní kancelář Ostrava
prof. Dr.hab. inž. Jaroslav Rajczyk, Fakulta stavební,
Polytechnika Czestochowa, Polsko
doc. Ing. Miloslav Řezáč, Ph.D., VŠB-TU Ostrava, Fakulta stavební
doc. Ing. Vlastislav Salajka, CSc., Vysoké učení technické v Brně, Fakulta stavební
doc. Ing. Jaroslav Solař, Ph.D., VŠB-TU Ostrava, Fakulta stavební
doc. Ing. Richard Šňupárek, CSc., Ústav geoniky AV ČR
prof. Hovhannes Tokmajyan, Doctor of Sciences
Yerevan State University of Architecture and Construction, Arménie
prof. dr hab. inž. Jerzy Wyrwal, Fakulta stavební, Polytechnika Opole, Polsko
prof. Alphose Zingoni, PrEng, CEng, PhD, FSAAE, FIABSE, FStructE
University of Cape Town, Jihoafrická republika

Technický redaktor:

Ing. Markéta Maluchová, VŠB-TU Ostrava, Fakulta stavební

Publikované články jsou recenzovány.
Za jazykovou správnost odpovídá autor.

Adresa redakce:

Ludvíka Podéště 1875/17
708 33 Ostrava - Poruba
Česká republika

web: <http://www.fast.vsb.cz/cs/okruhy/veda-a-vyzkum/odborna-cinnost-fakulty/sbornik-vedeckych-praci>

© Vydala Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava
Tisk a vazba: in-PRESS cz, Opletalova 608/2, 736 01 Havířov-Šumbark

Náklad: 150 ks

Neprodejné

ISSN 1213-1962