

1 2014 ročník XIV

Vysoká škola báňská -Technická univerzita Ostrava

SBORNÍK

vědeckých prací Vysoké školy báňské -Technické univerzity Ostrava *Řada stavební*

> TRANSACTIONS of the VŠB - Technical University of Ostrava *Civil Engineering Series*

ISSN 1213-1962

ČAJKA Radim, MATEČKOVÁ Pavlína, FOJTÍK Roman VÝPOČET TEPLOTY V KLUZNÉ SPÁŘE NAVRŽENÉ JAKO SOUČÁST ZÁKLADOVÉ KONSTRUKCE	1
DRAHORÁD Michal PŘESYPANÉ ZDĚNÉ KLENBOVÉ MOSTY – INTERAKCE ZEMINY A KONSTRUKCE V INŽENÝRSKÝCH APLIKACÍCH	7
FILLO Ľudovít, HALVONIK Jaroslav, BORZOVIČ Viktor PRETLAČENIE LOKÁLNE PODOPRETÝCH BETÓNOVÝCH STROPNÝCH A ZÁKLADOVÝCH DOSIEK	17
HALVONIK Jaroslav, FILLO Ľudovít PRETLAČENIE – PRÍČINY HAVÁRIE V KOMPLEXE TRINITY	25
LABUDKOVÁ Jana, ČAJKA Radim POROVNÁNÍ EXPERIMENTÁLNĚ NAMĚŘENÉ DEFORMACE DESKY NA PODLOŽÍ A VÝSLEDKŮ 3D NUMERICKÉHO MODELU	
ODROBIŇÁK Jaroslav VERIFICATION OF FLEXURAL BEHAVIOR AND SIMPLIFIED MODELING OF STEEL-CONCRETE COMPOSITE BRIDGE	43
STARÁ Marie, JANULÍKOVÁ Martina EXPERIMENTÁLNÍ MĚŘENÍ PŘEDPJATÉHO ZDIVA S POUŽITÍM KLUZNÉ SPÁRY	51
PETRŮ Jiří MOŽNOSTI APLIKACE PŘÍRODNÍHO ZEOLITU JAKO AKTIVNÍ PŘÍMĚSI DO BETONU	
DANIEL Ľuboš, KORTIŠ Ján NUMERICKÉ MODELOVANIE INTERAKCIE VOZIDLA A MOSTNEJ KONŠTRUKCII	67
GRZYWIŃSKI Maksym, POKORSKA Iwona STOCHASTIC ANALYSIS OF CYLINDRICAL SHELL	
KOKTAN Jiří, BROŽOVSKÝ Jiří NUMERICKÉ MODELOVÁNÍ ČASOVĚ ZÁVISLÉHO CHOVÁNÍ ŽELEZOBETONOVÉ KONSTRUKCE S VYUŽITÍM MODELU B3	77
KOTRASOVÁ Kamila FLUID IN RECTANGULAR TANK – FREQUENCY ANALYSIS	
KRÁLIK Juraj PROBABILISTIC NONLINEAR ANALYSIS OF REINFORCED CONCRETE BUBBLER TOWER STRUCTURE FAILURE	91

KREJSA Jan, HOLICKÝ Milan, SÝKORA Miroslav UNCERTAINTY IN SHEAR RESISTANCE OF REINFORCED CONCRETE BEAMS WITH STIRRUPS – COMPARISON OF EN 1992 1 1 AND fib MC 2010 APPROACHES 103
MELCER Jozef, MARTINICKÁ Ivana VOZIDLO – CESTA NUMERICKÉ RIEŠENIE VO FREKVENČNEJ OBLASTI
MELCER Jozef, MARTINICKÁ Ivana VZÁJOMNÉ POROVNANIE FFP PRE RÔZNE VÝPOČTOVÉ MODELY VOZIDLA 123
MORAVČÍK Milan PRENOS VIBRÁCIÍ KONŠTRUKCIOU TRATE PRI PREJAZDE VLAKOV
PSOTNÝ Martin NONLINEAR ANALYSIS OF BUCKLING & POSTBUCKLING
SLOWIK Ondřej, NOVÁK Drahomír ALGORITMIZACE SPOLEHLIVOSTNÍ OPTIMALIZACE
SOBEK Jakub ANALÝZA TVAROVÝCH FUNKCÍ PRO TĚLESA S TRHLINOU: VARIANTY ROVINNÉ ÚLOHY
VALEŠ Jan KLOPENÍ NOSNÍKU S POČÁTEČNÍMI IMPERFEKCEMI
VAŠEK Jakub, KREJSA Martin PRAVDĚPODOBNOSTNÍ POSOUZENÍ SPOLEHLIVOSTI PŘÍHRADOVÉ KONSTRUKCE V PROGRAMOVÉM SYSTÉMU MATLAB
VOŘECHOVSKÁ Dita, VOŘECHOVSKÝ Miroslav ANALYTICAL AND NUMERICAL APPROACHES TO MODELLING OF REINFORCEMENT CORROSION IN CONCRETE
ZÍDEK Rostislav, BRDEČKO Luděk TRADIČNÍ KROV – HAVARIJNÍ STAV, MODELOVÁNÍ A PŘÍČINY

číslo 1, rok 2014, ročník XIV, řada stavební

článek č. 01

Radim ČAJKA¹, Pavlína MATEČKOVÁ², Roman FOJTÍK³

VÝPOČET TEPLOTY V KLUZNÉ SPÁŘE NAVRŽENÉ JAKO SOUČÁST ZÁKLADOVÉ KONSTRUKCE

CALCULATION OF TEMPERATURE IN SLIDING JOINT DESIGNED AS A PART OF FOUNDATION STRUCTURE

Abstrakt

V případě očekávaných vodorovných deformací terénu nebo základové konstrukce je možné pro eliminaci vnitřních sil v důsledku tření použít asfaltovou reologickou kluznou spáru. Vlastnosti asfaltu jsou však závislé na teplotě. V literatuře je možné vyhledat data s odhadovanými teplotami v základové spáře, přesto pro upřesnění očekávaných teplot bylo provedeno měření teploty v základové desce v budově pro superpočítač v areálu VŠB-TU Ostrava. V článku jsou porovnány naměřené a vypočtené teploty pro první dny po vybetonování základové konstrukce. Kromě teploty venkovního prostředí se uvažuje také s významným vlivem hydratačního tepla.

Klíčová slova

Kluzná spára, základová konstrukce, měření teploty, výpočet teploty.

Abstract

In case of expected horizontal deformation of subsoil or foundation structure it is possible to use rheological asphalt sliding joint to eliminate internal forces caused with friction. Material characteristics of asphalt are temperature sensitive. In science literature it is possible to find data with temperatures expected in footing bottom, however it was decided to complement this information with temperatures measured in-situ in foundation slab for super-computer building in campus of VSB-Technical University of Ostrava. In the paper measured and calculated temperatures are compared for the first days after concreting the foundation structure. Besides the temperature of environment also significant influence of heat of cement hydration are taken into account.

Keywords

Sliding joint, foundation structure, temperature measurement, temperature calculation.

1 ÚVOD

Vlivem horizontálních deformací terénu nebo základové konstrukce vznikají třením o podloží významné vnitřní síly, které je nutné zohlednit v analýze interakce základu a podloží [2], [3]. Pro eliminaci tření je možné použít asfaltovou reologickou kluznou spáru. Na Fakultě stavební VŠB TU Ostrava probíhá již několik let výzkum smykových vlastností různých druhů asfaltových pásů.

¹ Prof. Ing. Radim Čajka, CSc., Katedra konstrukcí, Fakulta stavební, VŠB-Technická univerzita Ostrava, Ludvíka Podéště 1875/17, 708 33 Ostrava-Poruba, tel.: (+420)597 321 344, e-mail: radim.cajka@vsb.cz.

² Ing. Pavlína Matečková, Ph.D., Katedra konstrukcí, Fakulta stavební, VŠB-Technická univerzita Ostrava, Ludvíka Podéště 1875/17, 708 33 Ostrava-Poruba, tel.: (+420) 597 321 394, e-mail: pavlina.mateckova@vsb.cz.

³ Ing. Roman Fojtík, Ph.D., Katedra konstrukcí, Fakulta stavební, VŠB-Technická univerzita Ostrava, Ludvíka Podéště 1875/17, 708 33 Ostrava-Poruba, tel.: (+420) 597 321 98, e-mail: roman.fojtik@vsb.cz.

Výzkum prokázal, že vlastnosti asfaltu jsou významně závislé na teplotě [4], [5], [6]. Správný návrh kluzné spáry je vázán na odhad teploty v základové spáře, přičemž důležité jsou jak teploty krátkodobé, tak teploty dlouhodobé. Odhad krátkodobé teploty má význam při použití kluzné spáry pro eliminaci tření vlivem předpětí, teplotních změn nebo objemových změn betonu, největších právě v prvních dnech po vybetonování konstrukce. Odhad dlouhodobé teploty je významný zejména v případě dlouhodobě působící kluzné spáry pro eliminaci účinků poddolování a dlouhodobých objemových změn betonu.

2 TEPLOTY NAMĚŘENÉ IN-SITU

2.1 Popis základové konstrukce

Budova Národního Superpočítačového Centra je umístěna v areálu VŠB-TU Ostrava. Budova je založena na železobetonové desce tloušťky 400 mm se ztužujícími žebry v horní části desky. Základová deska byla vybetonována v únoru 2013, tedy v zimním období.

Stanice pro měření teplot je na obr. 1, více podrobností viz [8]. Byla měřena teplota prostředí a teploty v průřezu desky do hloubky 325 mm. Měření přímo v základové spáře nebylo možné vzhledem k technickým parametrům měřící stanice. Kromě teplot jsou měřeny také poměrná přetvoření v průřezu železobetonové desky. Na obr. 2 jsou v grafu znázorněny teploty naměřené v prvních 50 dnech po vybetonování základové desky. Na obr. 3 jsou teploty naměřené in-situ znázorněné v závislosti na souřadnici tloušťky desky. V současné době měření ještě stále probíhají, ale v delších časových intervalech.



Obr. 1: Stanice pro měření teplot a napětí v průřezu základové desky

3 VÝPOČET TEPLOTY V PRŮŘEZU ZÁKLADOVÉ DESKY

3.1 Teplota prostředí

Pro výpočet teploty v průřezu desky se teplota prostředí uvažuje podle rovnice (1), převzaté z publikace [9], pomocí které lze postihnout kolísání teploty v průběhu dne.

$$T_e(t) = T_{med} + A_e \cdot \sin\frac{\pi}{12} t \tag{1}$$

kde:

 T_{med} – je průměrná teplota v zimním prostředí, ve výpočtu se uvažuje doporučená hodnota 5°C,

 A_e – teplotní amplituda, ve výpočtu se uvažuje doporučená hodnota 6°C.



Obr. 2: Dílčí teploty naměřené in-situ



Obr. 3: Teploty v průřezu desky naměřené in-situ

Teplota prostředí in-situ je na obr. 4 porovnána s teplotou, která se uvažuje ve výpočtu. Jak se očekávalo, teploty naměřené a teploty předpokládané ve výpočtu se liší, nicméně kolísání teplot během dne je patrné i na průběhu teplot naměřených in-situ.

3.2 Hydratační teplo

Pro výpočet hydratačního tepla bylo odvozeno množství různých závislostí. Ve výpočtu teplot v průřezu desky byl použit model vývoje hydratačního tepla podle ČSN 73 1208 [7], [10]. Uvedený model byl zvolen pro jeho jednoduchost, snadné zahrnutí do numerického výpočtu a relativní dostupnost všech vstupních parametrů.

Změna teploty v čase při zohlednění hydratačního tepla se uvažuje pomocí exponenciální funkce (2), (3), (4):

$$\Delta T_a(t) = \Delta T_a(1 - e^{-\beta t}) \tag{2}$$

$$\Delta T_a = \frac{m.Q_h}{c.\rho} \tag{3}$$

$$\beta = \beta_{10} \cdot 2^{\frac{T_{or} - 10}{10}} \tag{4}$$

kde:

- m je hmotnost cementu v 1 m³ betonu [kg.m³],
- *c* měrná tepelná kapacita [J.kg⁻¹.K⁻¹],
- ρ je hustota betonu [kg.m³],
- Q_h hydratační teplo, stanovené experimentálně nebo podle doporučení normy [kJ.m⁻³],
- T_{or} počáteční teplota betonu [°C],
- β_{10} základní hodnota součinitele β pro teplotu 10°C [-].

Derivací změny teploty se pak vypočítá tepelný tok a tuto veličinu lze použít pro numerický výpočet teploty (5):



$$q(t) = c.\rho.\frac{\partial T}{\partial t} = c.\rho.\Delta T_a \left(0 + \beta.e^{-\beta t} \right) = c.\rho.\Delta T_a.\beta.e^{-\beta.t}$$
(5)

Obr. 4: Přepokládaná a naměřená teplota prostředí

Parametry pro výpočet hydratačního tepla cementu, použitého pro přípravu betonu na základovou konstrukci Národního Superpočítačového Centra, se nepodařilo získat, protože dodavatelská společnost je odmítla sdělit. Podařilo se zjistit, že byl použit směsný cement. Ve výpočtu se tedy uvažuje maximální a minimální množství cementu a maximální a minimální hydratační teplo podle EN 206 [11] a ČSN 731208 [10]. Koeficient β_{10} , který reprezentuje rychlost uvolňování hydratačního tepla, se uvažuje minimální hodnotou 0,15 pro pomalé uvolňování hydratačního tepla a maximální hodnotou 0,25 pro rychlé uvolňování hydratačního tepla. Minimální teploty byly stanoveny pro množství cementu m = 300 kg.m⁻³ a hydratační teplo $Q_h = 260$ kJ.m⁻³.

3.3 Vypočtené teploty

Teploty v průřezu desky se zohledněním předpokládané teploty prostředí a se započtením vlivu hydratačního tepla byly vypočteny pomocí programu NONSTAC, který řeší numericky Fourierovu rovnici vedení tepla pro jednorozměrné teplotní pole [1].

Na obr. 5 jsou graficky znázorněny vypočtené minimální a maximální teploty v základové spáře pro pomalý i rychlý vývoj hydratačního tepla. Na obr. 6 jsou porovnány teploty na souřadnici 325 mm od povrchu desky naměřené in-situ a teploty vypočtené. Teploty jsou porovnány na souřadnici 325 mm od povrchu desky, tedy na souřadnici nejblíže základové spáře.



Obr. 5: Vypočtené maximální a minimální teploty v základové spáře

Vypočtené teploty reprezentuje křivka pro minimální množství cementu a pomalý vývoj hydratačního tepla, která se nejvíce průběhem a dosaženými teplotami blíží průběhu teplot, naměřených in-situ.



Obr. 6: Vypočtené a naměřené teploty pro souřadnici desky 325 mm od povrchu

3.4 Diskuse

Z obrázku 6 je zřejmé, že předpokládaná teplota stanovená výpočtem pro souřadnici 325 mm od povrchu desky je vyšší než teplota naměřená. Obdobný rozdíl teplot se očekává také v základové spáře. Rozdíl teplot naměřených se očekával, protože pro výpočet byla použita rozdílná teplota prostředí, než naměřená in situ, viz obr. 4. Další nepřesnosti jsou v jednoduchém modelu vývinu hydratačního tepla dle exponenciální křivky podle ČSN [10], ke kterému se navíc nepodařilo získat přesné vstupní parametry, tj. hydratační teplo a množství cement v 1 m³ betonu.

Rozdíl v teplotách vypočtených a naměřených je třeba zohlednit při návrhu reologické asfaltové kluzné spáry, kde jsou materiálové charakteristiky teplotně závislé.

4 ZÁVĚR

Výstižný návrh reologické kluzné spáry je spojen s odhadem teploty v základové spáře. Teplota ovlivňuje smykové deformace asfaltového pásu a tím také jeho smykovou odolnost. V článku byly porovnány teploty naměřené in-situ v základové desce budovy Národního Superpočítačového Centra a teploty vypočtené na základě předpokládané teploty prostředí při zvoleném modelu vývoje hydratačního tepla. Předpokládané teploty jsou v uvedeném případě vyšší než naměřené. Pro vyšší

teploty byly prokázány vyšší deformace a tedy nižší smyková odolnost. Při návrhu kluzné spáry je vhodné vzít výše uvedené skutečnosti v úvahu.

PODĚKOVÁNÍ

Příspěvek byl realizován za finančního přispění MŠMT, podpora specifického vysokoškolského výzkumu Koncepčního rozvoje FAST VŠB-TU Ostrava v roce 2014.

LITERATURA

- [1] CAJKA, R., Numerical Solution of Temperature Field for Stress Analysis of Plate Structures (2013). *Applied Mechanics and Materials*, Vol. 470 (2014), pp 177-187. Trans Tech Publications, Switzerland, ISSN: 16609336, ISBN: 978-303785651-2, doi:10.4028/www.scientific.net/AMM.470.177
- [2] CAJKA, R., Soil structure interaction in case of exceptional mining and flood actions. *Final Conference of COST Action C12: Improvement of Buildings' Structural Quality by New Technologies*, Innsbruck, Austria, 20 January 2005 through 22 January 2005, ISBN: 0415366097; 978-041536609-0
- [3] CAJKA, R., A Subsoil Model based on Numerical Integration of a Nonlinear Halfspace. 8th International Conference on Engineering Computational Technology, ECT 2012, Dubrovnik; Croatia; 4 September 2012 through 7 September 2012, Civil-Comp Proceedings, Volume 100, 2012, ISBN 978-1-905088-55-3, doi:10.4203/ccp.100.114
- [4] CAJKA, R., MATECKOVA, P., JANULIKOVA, M., Bitumen Sliding Joints for Friction Elimination in Footing Bottom. *Applied Mechanics and Materials, Volume 188, (2012), pp.* 247-252, Trans Tech Publications, Switzerland, ISSN: 1660-9336, ISBN: 978-303785452-5, DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMM.188.247
- [5] CAJKA, R., JANULIKOVA, M., MATECKOVA, P., STARA, M., Laboratory Testing of Asphalt Belts with the Influence of Temperature. *Transactions of the VSB - Technical University of Ostrava, Construction Series, Volume XI, Issue 2, Pages 1–6, ISSN (Online)* 1804-4824, ISSN (Print) 1213-1962, DOI: 10.2478/v10160-011-0020-0, December 2011
- [6] CAJKA, R., JANULIKOVA, M., MATECKOVA, P., STARA, M., Modelling of Foundation Structures with Slide Joints of Temperature Dependant Characteristics. Proceedings of the 13th International Conference on Civil, Structural and Environmental Engineering Computing, CC 2011. 10 p., Chania, Crete, Greece, 6 September 2011 through 9 September 2011, ISBN 978-1-905088-45-8, doi:10.4203/ccp.96.208
- [7] CAJKA, R., MATECKOVA, P., Temperature Distribution of Slide Joint in Reinforced Concrete Foundation Structures. 17th International Conference on Engineering Mechanics 2011, Svratka, May 09-12, 2011. Engineering Mechanics 2011, pp. 95-98, ISBN 978-80-87012-33-8, WOS: 000313492700017
- [8] CAJKA, R., FOJTIK, R., Development of Temperature and Stress during Foundation Slab Concreting of National Supercomputer Centre IT4, *Procedia Engineering*, Volume 65, 2013, Pages 230-235, ISSN 1877-7058, doi: 10.1016/j.proeng.2013.09.035
- [9] HALAHYA, M., Tepelná technika, osvětlení, akustika. ALFA Bratislava, 1970.
- [10] ČSN 73 1208 The design of waterworks concrete structures. UNMZ Prague, 2010.
- [11] EN 206 Concrete Part 1: Specification, performance, production and conformity. UNMZ Prague, 2001.

Oponentní posudek vypracoval:

Doc. Ing. Július Šoltész, PhD., Katedra betónových konštrukcií a mostov, Stavebná fakulta, STU v Bratislave.

Doc. Ing. Miloš Zich, Ph.D., Ústav betonových a zděných konstrukcí, Fakulta stavební, VUT v Brně.

Sborník vědeckých prací Vysoké školy báňské - Technické univerzity Ostrava

číslo 1, rok 2014, ročník XIV, řada stavební

článek č. 02

Michal DRHORÁD¹

PŘESYPANÉ ZDĚNÉ KLENBOVÉ MOSTY – INTERAKCE ZEMINY A KONSTRUKCE V INŽENÝRSKÝCH APLIKACÍCH

BURRIED MASONRY ARCH BRIDGES – MODELLING OF THE SOIL-STRUCTURE INTERACTION IN ENGINEERING APLICATIONS

Abstrakt

Tato práce se zabývá možnostmi modelování interakce zděných klenbových mostních konstrukcí s materiálem zásypu v inženýrských aplikacích. Hlavním cílem práce je vývoj numerického modelu konstrukce vystihujícího s dostatečnou přesností skutečné chování mostu a jeho spolupůsobení se zeminou náspu na úrovni použitelné v běžné inženýrské praxi. V článku jsou uvedeny základní předpoklady, definice modelu interakce zeminy s klenbou a rozbor dosažených výsledků.

Klíčová slova

Klenbový most, interakce se zeminou, zemní tlak.

Abstract

The paper deals with modeling of soil-structure interaction of buried masonry arch bridges. The main scope of this work is developing of a numerical model with sufficient accuracy for engineering applications. Basic presumptions, numerical model definition and analyses of results are introduced in the paper.

Keywords

Masonry arch bridge, soil interaction, earth pressure.

1 ÚVOD

Zděné klenbové mosty s přesypávkou jsou jedním z nejstarších druhů trvalých mostů. Stavba zděných klenbových mostů je z řemeslného hlediska relativně jednoduchá, jejich únosnost a trvanlivost je však při správném provedení značná. Dlouhou dobu byly tyto mosty jedinou alternativou k mostům dřevěným, jejichž trvanlivost je však významně nižší. Uvedené skutečnosti byly důvodem rozsáhlého rozšíření těchto mostů jak po světě, tak i na území ČR. Zděné klenbové konstrukce začaly být vytlačovány až s nástupem moderních trvalých konstrukčních materiálů, tj. oceli a betonu, přičemž poslední běžné aplikace těchto konstrukcí spadají přibližně do 30. let minulého století.

V současné době lze odhadovat, že celkový počet aktivně užívaných zděných klenbových mostů na komunikační síti v ČR se pohybuje kolem 10.000, přitom průměrné stáří jednotlivých mostů přesahuje 100 let (zdroj systém BMS – http://bms.vars.cz). Uvážíme-li předpokládanou životnost konstrukce 100 let, vývoj zatížení dopravou po dobu jejich užívání a stávající stav dlouhodobé údržby mostních konstrukcí, je zřejmé, že tyto mosty vyžadují, nebo v nejbližší době budou vyžadovat, zásadní opravu, zesílení, či dokonce náhradu novou konstrukcí.

¹ Ing. Michal Drahorád, Ph.D., Katedra betonových a zděných konstrukcí, Fakulta stavební, České vysoké učení technické v Praze, Thákurova 7, 166 29 Praha 6, e-mail: michal.drahorad@fsv.cvut.cz.

S ohledem na výše uvedený počet aktivně užívaných klenbových mostů jistě budou finanční náklady na jejich opravu vysoké a s ohledem na současný stav veřejných financí nebude možné všechny nevyhovující mosty nahradit novými ani je v nejbližší době opravit. Ve světle těchto skutečností proto nabývá na významu stanovení skutečného stavu a únosnosti, resp. zatížitelnosti, zděných klenbových mostů. V souvislosti s touto úlohou jsou klíčovými záležitostmi správný konstrukční model zděné klenby a správná implementace jejího spolupůsobení s materiálem zásypu.

2 TYPICKÉ USPOŘÁDÁNÍ A STATICKÉ PŮSOBENÍ KONSTRUKCE

Zděný klenbový most (viz Obr. 1 a 2) je tvořen zděnou klenbovou konstrukcí (kamennou nebo cihelnou), zásypem a bočními (poprsními) zídkami ohraničujícími materiál zásypu. Na materiálu zásypu je provedena vozovka, boční zídky zpravidla přecházejí do parapetních zídek a křídel. Zásyp konstrukce je zpravidla tvořen dobře zrněným nenamrzavým materiálem, izolace proti vodě je obvykle tvořena jílovou vrstvou. V pozdější době byly v prostoru pod vozovkou za účelem zvýšení únosnosti zřizovány roznášecí železobetonové desky. Touto problematikou se však tento příspěvek nezabývá.



Obr. 1: Typické uspořádání zděného klenbového mostu - pohled



Obr. 2: Typické uspořádání zděného klenbového mostu - příčný řez

Z konstrukčního hlediska je hlavním nosným prvkem konstrukce zděná klenba, která podporuje celou konstrukci zásypu a boční zídky. Klenba je v patách vetknuta do opěr a základů, které jsou zpravidla provedeny z kamenné rovnaniny nebo jsou zděné, založení klenbových mostů bývá plošné, případně na roštu z dřevěných pilot. Na klenbě jsou zpravidla provedeny poprsní zídky, které klenbu ve svislém směru u okraje ztužují. V příčném směru jsou poprsní zídky namáhány

zemním tlakem a vodorovnými účinky dopravního zatížení, což způsobuje příčné namáhání klenby a obvykle vede ke vzniku podélných trhlin rovnoběžných s volným okrajem klenby.

Ze statického hlediska je zpravidla nevhodné modelovat klenbovou konstrukci jako prostorovou (objemové nebo plošné prvky spolupůsobící v příčném směru), protože existuje velká nejistota v příčném působení zdiva konstrukce. Navíc je prostorová úloha složitá z hlediska zadání modelu a správného vyhodnocení výsledků. V inženýrské praxi se proto obvykle používá modelů konstrukce v podélném směru (řezu), kdy je celá klenba nahrazena klenbovým pasem jednotkové šířky s uvažováním vlivu zásypu a okolního zemního prostředí v tomto výseku. Z hlediska typologie lze rozlišit modely prutové (Obr. 3), plošné (tvořené plošnými prvky - ve svislém řezu) a kombinované (tvořené plošnými a prutovými prvky – Obr. 4) – podrobně např. [2]. Rozhodujícím článkem modelu z hlediska chování je implementace interakce zeminy zásypu a klenbové konstrukce, resp. definice vlastností materiálu zásypu.



Obr. 3: Prutový model klenbové konstrukce



Obr. 4: Kombinovaný model klenbové konstrukce tvořený plošnými a prutovými prvky

3 ZPŮSOBY MODELOVÁNÍ INTERAKCE ZÁSYPU A KONSTRUKCE

Interakci zemin s klenbovou konstrukcí v podélném řezu (viz výše) lze modelovat v zásadě dvěma způsoby. Prvním je modelování materiálu zásypu a jeho spolupůsobení s klenbou vhodnými plošnými (příp. prutovými) prvky v jeho skutečné geometrii a vlastnostech (zejména nelineárních), druhým je vhodná náhrada působení zásypu jinými metodami (např. náhradním silovým zatížením). Hlavní zásadou při tvorbě numerického modelu přitom zůstává, aby jeho chování odpovídalo skutečnému chování modelované konstrukce.

První uvedený způsob, tedy kompletní numerický model materiálu zásypu a klenby (viz např. Obr. 4), poskytuje obecně lepší výsledky, v nichž jsou při správném zadání automaticky zahrnuty vlivy výstavby a provozu mostu (míra překonsolidace zásypu, roznášení dopravního zatížení materiálem zásypu, apod.). Klíčovým faktorem je volba vhodných materiálových modelů zeminy (např. hypoplastický, mohr-coulombův) a zdiva (nelineární model materiálu zahrnující změnu tuhosti konstrukce v závislosti na jejím namáhání) a definice styčné spáry mezi zeminou a řádově tužší zděnou klenbou. Pro správné nastavení materiálových modelů je obvykle potřeba provedení alespoň základního diagnostického průzkumu, odebrání vzorků a provedení základních zkoušek materiálů. Z hlediska inženýrských aplikací je hlavní nevýhodou tohoto modelu celková složitost a skutečnost, že jej zpravidla není možné sestavit v běžně používaných programech pro analýzu stavebních

konstrukcí. Celá situace je zpravidla navíc komplikována chabými znalostmi o konstrukci, kdy jsou obvykle známy jen vnější rozměry konstrukce a ostatní rozměry (mocnost zásypu, tloušťka klenby, tloušťka křídel, atd.) je nutno odhadovat. Uvedené skutečnosti a nejistoty ve vstupních parametrech materiálových modelů použití komplexního modelu konstrukce značně komplikují. Výsledky výpočtu jsou tak z uvedených důvodů zatíženy nepřesnostmi, jejichž velikost lze zpravidla jen odhadovat. To staví výsledky získané těmito modely na úroveň výsledků modelů zjednodušených.

Druhý způsob modelování, tedy vhodnou náhradu působení zásypu, lze realizovat celou řadou způsobů. Nejvíce používanými metodami jsou náhrada působení zásypu silovým, deformačně závislým, zatížením a náhrada působení zásypu pružným podepřením klenbové konstrukce na zasypaných částech, přičemž tuhost podepření je závislá na velikosti a směru zatlačení deformované klenbové konstrukce do zásypu. Stanovení velikosti náhradního zatížení nebo tuhosti podepření přitom zpravidla vychází ze zavedených postupů mechaniky zemin, příp. z provedených zkoušek. Výhodami těchto modelů jsou značné zjednodušení celé úlohy z hlediska výpočtu a aplikace ověřených postupů při stanovení působení zásypu s klenbovou konstrukcí. Nevýhody lze spatřovat jednak ve složitější implementaci proměnných zatížení (resp. tuhosti) do výpočtu v rámci běžných projekčních programů a jednak v omezených možnostech aplikace modelu v případě obecného materiálu zásypu (soudržné zeminy). Další drobnou nevýhodou modelu je způsob zavedení proměnného zatížení působícího na povrchu vozovky, jehož působení je nutno stanovit odděleně, např. vhodnými metodami mechaniky zemin.

Řadu výše uvedených nevýhod náhrady působení zásypu klenby lze v případě běžných inženýrských aplikací odstranit vhodnými opatřeními, např. předepsáním použití konkrétního materiálu zásypu konstrukce. Při výběru vhodné metody náhrady působení zásypu se pak uplatní i celkové charakteristiky mostu. Protože zděné klenbové konstrukce mají vysokou reálnou tuhost (maximální deformace konstrukce jsou v řádu jednotek milimetrů), je pro modelování zásypu klenby zvolena náhrada působení zásypu silovým, deformačně závislým zatížením.

4 NAVRŽENÝ MODEL PŮSOBENÍ ZÁSYPU V INŽENÝRSKÝCH APLIKACÍCH

4.1 Všeobecně

Při stanovení náhradního působení materiálu zásypu v inženýrských aplikacích se zpravidla používají klasické postupy mechaniky zemin. Zásyp klenbové konstrukce je v naprosté většině aplikací tvořen dobře zrněným nesoudržným a nenamrzavým materiálem, což zajišťuje vhodné chování konstrukce při provozu a zároveň značně zjednodušuje modelování jeho chování. Při stanovení materiálových charakteristik zásypu je z inženýrského hlediska nutno uvažovat nejhorší možné charakteristiky materiálu z hlediska dlouhodobého chování konstrukce (proměnná hladina spodní vody, proměnný stupeň saturace, míra ulehlosti atd.) a jejího nejnepříznivějšího možného zatížení. Z tohoto důvodu se v modelu zeminy uvažují zpravidla efektivní charakteristiky, přičemž soudržnost c se zhusta zanedbává.

Působení zásypu klenby lze z hlediska modelu konstrukce rozdělit na několik samostatných částí, které působí současně na materiálově nelineární model klenby, a to v závislosti na jejím tvaru (viz např. [1]):

- Zatížení materiálem zásypu (svislé i vodorovné) v klidovém stavu
- Zatížení od dopravy (svislé i vodorovné)
- Reakce od zatlačení konstrukce (vodorovné)

4.2 Působení zásypu v klidovém stavu

Při modelování působení zásypu na nosnou konstrukci v klidovém stavu (stav konstrukce zatížené pouze stálým zatížením) se předpokládají zcela minimální deformace konstrukce a vodorovné účinky zatížení f_h se uvažují jako klidové (viz Obr. 5). Účinky zatížení f_v působícího ve svislém směru se rovnají vlastní tíze materiálu nadloží, která je závislá na mocnosti přesypávky a

objemové tíze zeminy γ_z . Ve vodorovném směru se zatížení f_h stanoví v závislosti na svislém napětí v zemině od vlastí tíhy σ_{gz} a součiniteli zemního tlaku v klidu K_0 .

S ohledem na obecně známé deformační chování zemin a jejich "strukturní paměť" lze konstatovat, že zásadním faktorem ovlivňujícím náhradní zatížení konstrukce v klidovém stavu je míra zhutnění (překonsolidace) materiálu zásypu (viz Obr. 6 a publikace [7]). Toto zhutnění vzniká během výstavby konstrukce, kdy je materiál zásypu klenby hutněn na napětí σ_{hut} . Míra překonsolidace je potom vyjádřena součinitelem překonsolidace OCR.

$$OCR = \frac{\sigma_{v,\max}}{\sigma_v} \tag{1}$$

Součinitel OCR vyjadřuje poměr maximálního svislého napětí $\sigma_{v,max}$ dosaženého v celé historii konstrukce (zásypu) ke svislému napětí v aktuálním stavu σ_v (zpravidla napětí od vlastní tíhy nadloží σ_{gz}). Vlivem maximálního svislého napětí $\sigma_{v,max}$, které na zeminu v minulosti působilo, totiž došlo k modifikaci vnitřní struktury zeminy a její chování v oboru napětí menších než $\sigma_{v,max}$ je potom silně odlišné od chování normálně konsolidované zeminy (N.C.), tj. materiálu se součinitelem OCR = 1,0 (viz Obr. 6). Maximální svislé napětí $\sigma_{v,max}$ dosažené v historii zásypu se pro stanovení součinitele OCR uvažuje jako větší z hodnot svislého napětí od hutnění σ_{hut} a svislého napětí od vlastní tíhy zeminy σ_{gz} .



 $f_v = B \cdot \sigma_v$ $f_h = B \cdot \sigma_h$

Obr. 5: Náhradní zatížení materiálem zásypu klenbového pasu šířky *B* v klidovém stavu



Obr. 6: Vliv překonsolidace na chování zeminy (N.C. normálně konsolidovaná, O.C. překonsolidovaná)

Z úrovně počáteční napjatosti (definované součinitelem OCR) je v závislosti na efektivním úhlu vnitřního tření φ° stanoven součinitel bočního tlaku v klidu $K_{0,OC}$, a to podle vztahu (2). Při stanovení součinitele $K_{0,OC}$ současně platí, že jeho maximální hodnota je rovna součiniteli pasivního zemního tlaku K_p stanoveného pro příslušný materiál zásypu (viz kapitola 4.4).

$$K_{0,OC} = (1 - \sin \varphi') \cdot OCR^{\sin \varphi'} \le K_{\rm p} \tag{2}$$

Hodnoty vodorovného napětí v zásypu σ_h (resp. vodorovného zatížení konstrukce f_h) jsou potom stanoveny na základě mocnosti zásypu, resp. na velikosti svislých napětí v zemině $\sigma_v = \sigma_{gz}$ podle vztahu (3).

$$\sigma_h = K_0 \cdot \sigma_{gz} = K_0 \cdot \sigma_v \tag{3}$$

Příklad stanovení součinitelů OCR, K_0 a průběhy vodorovného zatížení f_h v hutněném zásypu v závislosti na hloubce pod terénem a napětí od hutnění σ_{hut} je uveden na Obr. 7. Získané výsledky jsou v souladu s dalšími autory, kteří se problematikou zabývali (viz [5] a [6]).



Obr. 7: Příklad stanovení klidového vodorovného napětí σ_h s vlivem překonsolidace (O.C.) v hutněném zásypu ($\sigma_{hut} = 20$ kPa) a jeho porovnání s průběhem pro normálně konsolidovanou zeminu (N.C.)

4.3 Působení zásypu při proměnném zatížení dopravou

Proměnné zatížení dopravou je pro klenbové mosty (zejména malých rozpětí) charakteristické svým rychlým průběhem a zpravidla velmi krátkým trváním. Z hlediska zatížení zeminy se jedná o zatížení okamžité, v případě saturované zeminy je zatížení dopravou zpravidla klasifikováno jako zatížení nedrénované (neodvodněné).

Proměnné zatížení dopravou působí na povrchu zásypu, kde je v naprosté většině případů provedena konstrukce vozovky. Konstrukce vozovky je tvořena krytem vozovky a zpevněnými podkladními vrstvami, jejichž základní funkcí je roznesení (distribuce) zatížení F z kontaktní plochy kola vozidla A_w do zeminy zásypu klenby. Minimální tloušťka vozovkového souvrství je podle předpisu platného v ČR (Technické podmínky TP170 – MD ČR) cca 400 mm. Při uvážení základní návrhové tíhy kola 150 kN a dotykové ploše A_w o rozměrech 0,4 x 0,4 m (viz model zatížení 1 v ČSN EN 1991-2) je kontaktní napětí na spodním líci vozovkového souvrství cca 130 kPa. Toto napětí se přibližuje reálným hodnotám napětí σ_{hut} dosahovaným při hutnění zásypu konstrukce běžnými prostředky (např. vibrační pěch), a lze proto předpokládat, že chování zásypu bude v oboru působení proměnného zatížení dopravou přibližně lineární (viz Obr. 6).



Obr. 8: Distribuce proměnného zatížení od dopravy na konstrukci klenby a stanovení šířky pasu B

Z uvedených skutečností plyne, že pro stanovení distribuce dopravního zatížení na klenbovou konstrukci lze s dostatečnou přesností použít metod založených na předpokladu lineárního chování materiálu zásypu. V inženýrské praxi se nejvíce používá silně zjednodušeného a konzervativního předpokladu lineárního roznášení zatížení materiálem zásypu klenby pod úhlem (90° – φ °) – viz Obr. 8. Roznášení zatížení vozovkovými vrstvami se uvažuje pod úhlem 45°. Distribuce svislého zatížení $f_{v,dopr}$ musí splnit podmínku, aby výslednice zatížení působila v místě aplikace kolového tlaku. Ve vodorovném směru se působící zatížení $f_{h,dopr}$ stanoví ze vztahu (4).

$$f_{h,dopr} = K_0 \cdot f_{v,dopr} \tag{4}$$

Pro stanovení distribuce dopravního zatížení na klenbu lze využít i další modely (např. Boussinesque formula), vždy je však nutné uvážit vliv okrajových podmínek, tj. vliv řádově tužšího "podloží" tvořeného klenbou nacházející se v malé hloubce pod terénem. To však není, s ohledem na proměnnou hloubku tuhého podloží, obecně snadné.

4.4 Působení (reakce) zásypu při deformaci konstrukce

Je obecně známo, že deformací klenbové konstrukce, tj. jejím zatlačováním/oddalováním do/od materiálu zásypu, se mění náhradní silové působení zásypu na klenbu (viz např. [8]). Nejsnáze lze tyto změny popsat teorií zemních tlaků známou z mechaniky zemin, resp. metodou závislých tlaků (viz [8]). Pro interakci zásypu klenby s nosnou konstrukcí (klenbou) se přitom předpokládá, že deformací klenby je ovlivněna pouze vodorovná složka zatížení zeminou f_h (přitom je soudržnost c^{\prime} zanedbána). Svislé zatížení zásypem f_v zůstává i během deformace klenby konstantní, rovné zatížení od vlastní tíhy zásypu klenby f_{gz} .

Extrémní (mezní) náhradní silové zatížení klenby zásypem je přitom dáno maximálními možnými vodorovnými tlaky, které může zemina přenést. Tyto tlaky jsou obecně závislé na vlastnostech materiálu zásypu. Protože materiál zásypu klenby je tvořen nesoudržnými zeminami, jsou pro stanovení mezních vodorovných tlaků využity klasické vztahy odvozené z Rankinovy teorie zemních tlaků a odpovídají smykovým únosnostem na kritických smykových plochách. Minimální hodnota vodorovného zatížení $f_{h,min}$ přitom odpovídá aktivnímu zemnímu tlaku (součinitel K_a) podle vztahu (5), hodnota maximální $f_{h,max}$ potom pasivnímu zemnímu tlaku (součinitel K_p) podle vztahu (6).

$$f_{h,\min} = K_a \cdot \sigma_v \cdot B \tag{5}$$

$$f_{h,\max} = K_p \cdot \sigma_v \cdot B \tag{6}$$

Velikosti mezních součinitelů zemních tlaků K_a a K_p pro nesoudržné zeminy podle Rankinovy teorie jsou definovány vztahy (7) a (8).

$$K_a = tg^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi'}{2}\right) \tag{7}$$

$$K_p = tg^2 \left(45^\circ + \frac{\varphi'}{2} \right) \tag{8}$$

Obecně je velikost vodorovného zatížení, resp. příslušného součinitele bočního tlaku *K*, závislá na zatlačení konstrukce (klenby) do zásypu – viz Obr. 9. Zatlačení do zásypu se obvykle definuje relativní hodnotou $\Delta u/h$, vztaženou k mocnosti (výšce) zásypu *h* v daném místě. Absolutní hodnota deformace (zatlačení) konstrukce do zásypu pro plnou aktivaci pasivního tlaku je přitom cca 5-krát větší než deformace pro plnou aktivaci aktivních hodnot bočního tlaku. Křivka závislosti bočního tlaku na zatlačení konstrukce do zásypu je pro normálně konsolidovanou zeminu (OCR = 1) uvedena na Obr. 9.



Obr. 9: Obecný průběh závislosti součinitele bočního tlaku na relativním zatlačení klenby do zásypu (normálně konsolidovaná zemina)

Pro účely výpočtu je obecná křivka z Obr. 9 nahrazena multi-lineární závislostí podle [4].

Z hlediska konstrukce a působení zásypu má zásadní význam pro hodnoty vodorovného tlaku při zatlačení konstrukce hutnění zásypu během výstavby a provozu (definované součinitelem OCR), které zásadně ovlivňuje hodnoty součinitele bočního tlaku v klidu K_0 . Základní křivka závislosti bočního tlaku na zatlačení (OCR = 1 v Obr. 10) je proto modifikována s ohledem na počáteční hodnoty K_0 stanovené podle kap. 4.2. Modifikace je provedena tak, že pro stanovený součinitel K_0 se vyhledá odpovídající relativní zatlačení do zeminy ($\Delta u/h$)₀ a část křivky mezi nulovým zatlačením a hodnotou ($\Delta u/h$)₀ se odstraní. Hodnota K_a a odpovídající poměrné oddálení od zeminy ($\Delta u/h$)_a přitom zůstává zachováno (je konstantní pro všechny hodnoty OCR). Příklady průběhů modifikovaných křivek pro různé hodnoty OCR, resp. různé hodnoty K_0 , jsou uvedeny na Obr. 10.



Obr. 10: Závislosti součinitele vodorovného tlaku K na zatlačení do zeminy pro různé hodnoty OCR (počáteční hodnoty K_0)

5 IMPLEMENTACE MODELU ZÁSYPU DO MODELU KONSTRUKCE

Protože odpor zeminy zásypu proti zatlačení je pro výše uvedený model nelineární, vede jeho použití k nutnosti použití nelineární analýzy konstrukce. Tato skutečnost není při výpočtu na závadu, protože i model vlastní klenby je materiálově nelineární a probíhá tedy po krocích.

V jednotlivých (lineárních) krocích výpočtu se vždy stanoví deformace konstrukce od zatížení a z ní relativní zatlačení/oddálení klenby do/od materiálu zásypu. Na základě dosažené relativní deformace materiálu zásypu se stanoví odpovídající součinitel bočního tlaku K a z něj potom

odpovídající náhradní vodorovné zatížení zděné klenbové konstrukce. Upravená hodnota bočního zatížení $f_{\rm h}$ se potom zavede do dalšího kroku výpočtu. Kritériem pro ukončení iteračního výpočtu je dosažení dostatečně malé změny bočního zatížení f_h mezi krokem i a (i+1). Konvergence metody je vzhledem k charakteru problému a obvyklým napjatostním poměrům v konstrukci rychlá. Příklad konvergence implementované metody je uveden na Obr. 13.

Jak vyplývá z výše uvedeného textu, je implementace modelu zásypu do konstrukčního modelu nosné konstrukce jednoduchá, pro jednodušší varianty běžně používaných inženýrských aplikací ji lze nahradit manuální změnou bočního zatížení zaváděného do statického výpočtu konstrukce.

V rámci práce na níže uvedeném grantovém projektu byla tato metoda interakce implementována do jednoduchého programu vytvořeného autorem, který používá prutovou variantu metody konečných prvků pro rovinnou analýzu klenbových konstrukcí. Vlastní model klenby je materiálově nelineární a zohledňuje rozevírání trhliny ve zděném průřezu. Závislost součinitele vodorovného tlaku K na zatlačení do zeminy se stanovuje zvlášť pro každý uzel modelu konstrukce. při uvážení individuální výšky zásypu a příslušné hodnoty součinitele OCR.

Pro ilustraci rvchlosti konvergence popsané metody je provedena numerická analýza segmentové klenbové konstrukce světlosti s = 4.5 m s přesvpávkou mocnosti minimálně 0.5 m (viz Obr. 11) podle kritérií uvedených v [3]. Zatížení konstrukce je bodové F = 50 kN působící ve středu rozpětí (ve vrcholu) klenby. Výsledné deformace po 8-mi krocích výpočtu jsou uvedeny na Obr. 12, vývoj zatlačení konstrukce klenby do zásypu v místě největší vodorovné deformace (viz Obr. 11) je uveden na Obr. 13. Z průběhu zatlačení je patrné, že po 8-mi krocích výpočtu jsou deformace již ustáleny a výpočet je ukončen.



Obr. 12: Deformace konstrukce

1,000

Defo vaný tva - - - Pův.tvar

2,000

3,000



Obr. 13: Vývoj zatlačení konstrukce do zásypu v průběhu analýzy konstrukce

6 ZÁVĚR

V rámci práce na níže uvedeném grantovém projektu byl definován model interakce hutněného zásypu s přesypanou zděnou klenbovou konstrukcí. Uvedený model byl implementován do numerického modelu konstrukce a je v současnosti ověřován v praxi.

PODĚKOVÁNÍ

Projekt byl realizován za finanční podpory ze státních prostředků prostřednictvím Technologické agentury České republiky. Registrační číslo projektu je TA03031099.

LITERATURA

- [1] FOGLAR, M., KŘÍSTEK, V. Centre-line optimisation of buried arch bridges. Proceedings of the Institution of Civil Engineers: Bridge Engineering, 165 (3), 2012, pp. 159-168.
- [2] DRAHORÁD, M., POSCH, M. Stanovení maximální provozního zatížení zděných klenbových mostů s přesypávkou, In: Modelování v mechanice, Sborník příspěvků, Ostrava, 2007, s. 45-46.
- [3] ČSN P 73 6213 Navrhování zděných mostních konstrukcí, ÚNMZ, 2012
- [4] ČSN 73 0037 Zemní tlak na stavební konstrukce, ÚNMZ, 1990
- [5] BROMS, B.B, Lateral Earth Preassures due to Compaction of Cohesionless Soils, 4th Conference on Soil Mechanics and Foundantions Engineering, Budapest 1971, pp. 373–384
- [6] CLOUGH, G.W., DUNCAN, J.M, Earth Preassures. Foundantion Engineering Handbook, Springer London 1991.
- [7] ATKINSON, J.H., The Mechanics of Soils and Foundantions, New York : Routledge, 2007
- [8] BARTÁK, J, BUCEK, M., Zemní tlaky na tenkostěnné ostění přesypaných staveb- 11. Geotechnické symposium, Znojmo 1991, pp. 115-125.

Oponentní posudek vypracoval:

Prof. Ing. Juraj Králik, PhD., Katedra stavebnej mechaniky, Stavebná fakulta, STU v Bratislave. Doc. Ing. Jiří Brožovský, Ph.D., Katedra stavební mechaniky, Fakulta stavební, VŠB-TU Ostrava. číslo 1, rok 2014, ročník XIV, řada stavební

článek č. 03

Ľudovít FILLO¹, Jaroslav HALVONIK², Viktor BORZOVIČ³

PRETLAČENIE LOKÁLNE PODOPRETÝCH BETÓNOVÝCH STROPNÝCH A ZÁKLADOVÝCH DOSIEK

PUNCHING OF CONCRETE FLAT AND FOUNDATION SLABS

Abstrakt

V príspevku je prezentovaná problematika pretlačenia lokálne podopretých betónových stropných a základových dosiek. V príspevku sú tiež uvedené hraničné hodnoty maximálnej šmykovej odolnosti predmetných konštrukcií s krehkým a náhlym spôsobom porušenia. Prezentované sú grafy pre návrh hrúbky lokálne podopretých stropných a základových dosiek v závislosti od veľkosti zaťaženia, rozpätia a stupňa vystuženia.

Klíčová slova

Pretlačenie, lokálne podopretá stropná a základová doska, krehké porušenie, reťazové zrútenie.

Abstract

Paper deals with punching phenomenon of reinforced concrete flat and foundation slabs. There are presented limits of maximum punching resistance of these structures with brittle and sudden mode of failure. There are also presented graphs for design of flat and foundation slab thicknesses, depending on an intensity of load, span length and reinforcement ratio.

Keywords

Punching, flat and foundation slab, brittle failure, progressive collapse.

1 ÚVOD

Vzhľadom na rozsiahly výskum pôsobenia lokálne podopretých dosiek [1],[2],[3], pre ktoré je typický náhly spôsob porušenia navrhla Subkomisia CEN/TC250/SC2 limity maximálnej šmykovej odolnosti takýchto konštrukcií. Jednotlivé členské štáty CEN upravili tieto obmedzenia do svojich národných príloh. V príspevku uvádzame tieto obmedzenia a ich vplyv na návrh minimálnej hrúbky lokálne podopretých stropných dosiek a základových dosiek.

¹ Prof. Ing. Ľudovít Fillo, PhD., Katedra betónových konštrukcií a mostov, Stavebná fakulta, Slovenskej technickej univerzity v Bratislave, Radlinského 11, 813 68 Bratislava, tel.: (+421) 259 274 508, e-mail: ludovit.fillo@stuba.sk.

² Prof. Ing. Jaroslav Halvonik, PhD., Katedra betónových konštrukcií a mostov, Stavebná fakulta, Slovenskej technickej univerzity v Bratislave, Radlinského 11, 813 68 Bratislava, tel.: (+421) 259 274 555, e-mail: jaroslav.halvonik@stuba.sk.

³ Ing. Viktor Borzovič, PhD., Katedra betónových konštrukcií a mostov, Stavebná fakulta, Slovenskej technickej univerzity v Bratislave, Radlinského 11, 813 68 Bratislava, tel.: (+421) 259 274 542, e-mail: viktor.borzovic@stuba.sk.

2 PRETLAČENIE LOKÁLNE PODOPRETEJ DOSKY

Na obr.1 je schematicky znázornené pretlačenie lokálne podopretej dosky, ktoré môže nastať porušením tlakovej diagonály (drvenie betónu) alebo šmykovo – ťahovým porušením betónu, resp. šmykovej výstuže v uvažovanom kontrolnom obvode.

Limity uvedené vzťahom (1) a (3) sa týkajú celkovej šmykovej odolnosti a túto hodnotu nemožno prekročiť aj za predpokladu silnejšieho vystuženia šmykovou výstužou.



Obr. 1: Model pretlačenia lokálne podopretej stropnej dosky

1-porušenie tlakovej diagonály v obvode u_0 (drvenie vzpery); 2-ťahové porušenie betónu obvod u_1 ;

3-ťahové porušenie šmykovej výstuže obvod u_1

Drvenie vzpery na obvode stĺpa u_0 je kontrolované tlakovou pevnosťou betónu, pozri vzorec (1).

$$v = 0,6. \left[1 - \frac{f_{ck}}{250}\right] \qquad f_{ck} \ [MPa] \ v_{Ed,max} = \frac{\beta V_{Ed}}{u_0 d} \le v_{Rd,max} = 0,4 \nu f_{cd}$$
(1)

Nový limit pri kontrolnom obvode u_1 vychádza z odolnosti v pretlačení bez šmykovej výstuže $v_{\text{Rd,c}}$, pozri vzorec (2). Maximálna odolnosť v pretlačení zohľadňujúca aj zvislú šmykovú výstuž v rámci základného kontrolného obvodu sa nemá uvažovať väčšia ako k_{max} . $v_{\text{Rd,c}}$, pozri vzorec (3). Ak je $v_{\text{Rd,cs}} \ge k_{\text{max}}$. $v_{\text{Rd,c}}$, potom v_{Ed} nesmie byť väčšie ako k_{max} . $v_{\text{Rd,c}}$. Hodnota k_{max} závisí od typu šmykovej výstuže, pričom pre šmykové tŕne s obojstranne rozkovanou hlavou minimálneho priemeru 3ϕ sa môže uvažovať $k_{\text{max}} = 1,9$, kde ϕ je priemer tŕňa. Viac pozri STN EN 1992-1-1/NA a [4]. Potreba zavedenia tohto limitu vyplynula z experimentálneho výskumu, ktorý ukázal, že pri použití kvalitnejších betónov dochádza k predčasnému porušeniu prvku bez toho aby bolo dosiahnuté rozdrvenie tlakovej diagonály aj keď teoretický model predpokladal tento spôsob porušenia.

$$v_{\rm Rd,c} = \frac{0.18}{\gamma_{\rm C}} k (100\rho_{\rm l} f_{\rm ck})^{1/3} \ge 0.035 k^{3/2} f_{\rm ck}^{1/2}$$
(2)

$$v_{\mathrm{Rd,cs}} = 0.75.v_{\mathrm{Rd,c}} + \left(\frac{1.5.d}{s_{\mathrm{r}}}\right) \frac{A_{\mathrm{sw}} \cdot f_{\mathrm{ywd,ef}}}{u_{\mathrm{l}} \cdot d} \left(\sin\alpha\right) \le k_{\mathrm{max}} \cdot v_{\mathrm{Rd,c}}$$
(3)

3 NÁVRH HRÚBKY STROPNEJ DOSKY

Na základe nových limitov šmykovej odolnosti v pretlačení stropných lokálne podopretých dosiek boli vypočítané a definované grafy pre návrh hrúbky dosky v závislosti na rozpätí (osovej vzdialenosti stĺpov), na veľkosti zaťaženia a na stupni vystuženia [7]. Na základe obr.2 až obr.5 je možno navrhnúť minimálnu hrúbku lokálne podopretej dosky stĺpom štvorcového prierezu o hrane 300 a 500 mm, pre vzdialenosti stĺpov 8 m, pre betón triedy C25/30, resp. C35/45 a krytie výstuže betónom 25 mm. Hrúbka dosky je závislá aj od vystuženia hlavnou horizontálnou výstužou – v grafoch sú to čiary pre stupne vystuženia $\rho = 0,002; 0,01$ a 0,02.



Obr. 2: Návrh hrúbky lokálne podopretej stropnej dosky - betón C25/30



Obr. 3: Návrh hrúbky lokálne podopretej stropnej dosky - betón C35/45

Pre rozmer prierezu stĺpa 300 mm a rozpätie 8 m podľa obr.2, pri návrhu hrúbky dosky 250 mm, by celkové návrhové zaťaženie bolo obmedzené pri stupni vystuženia $\rho = 0,01$ (druhé obmedzenie šmykovej odolnosti stropnej dosky) na hodnotu $f_d = 16$ kNm⁻², pričom f_d je návrhové zaťaženie pre rozhodujúcu kombináciu stálych a premenných zaťažení. V tomto prípade rozhodujúce je však kritérium drvenia tlakovej diagonály - vzpery, ktoré obmedzuje zaťaženie dosky na hodnotu $f_d \cong 13$ kNm⁻². Pri výpočte účinku zaťažení bol uvažovaný faktor β pre vnútorne stĺpy 1,15.

Pri návrhu hrúbky dosky 250 mm pre betón triedy C35/45 (obr.3), by celkové návrhové zaťaženie bolo obmedzené pri stupni vystuženia $\rho = 0.01$ (druhé obmedzenie šmykovej odolnosti stropnej dosky) na hodnotu $f_d = 18 \text{ kNm}^{-2}$, kde aj kritérium drvenia tlakovej diagonály obmedzuje zaťaženie dosky na hodnotu cca $f_d \approx 18 \text{ kNm}^{-2}$.



Obr. 4: Návrh hrúbky lokálne podopretej stropnej dosky - betón C25/35

Pre rozmer prierezu stĺpa 500 mm a rozpätie 8 m (obr. 4) je pri návrhu hrúbky dosky 250 mm celkové návrhové zaťaženie obmedzené pri stupni vystuženia $\rho = 0,01$ na hodnotu $f_d \cong 19$ kNm⁻² (f_d je návrhové zaťaženie pre rozhodujúcu kombináciu stálych a premenných zaťažení). V tomto prípade kritérium drvenia tlakovej diagonály nie je rozhodujúce $f_d \cong 22$ kNm⁻².



Obr. 5: Návrh hrúbky lokálne podopretej stropnej dosky - betón C35/45

Pri návrhu hrúbky dosky 250 mm pre betón triedy C35/45 (Obr.5), by celkové návrhové zaťaženie bolo obmedzené pri stupni vystuženia $\rho = 0,01$ na hodnotu $f_d = 22$ kNm⁻², kde kritérium drvenia tlakovej diagonály nerozhoduje o únosnosti dosky $f_d \cong 30$ kN.m⁻². Ak by stupeň vystuženia pozdĺžnou výstužou bol $\rho = 0,02$, bolo by možno pri návrhu hrúbky dosky uvažovať s celkovým návrhovým zaťažením $f_d \cong 27$ kNm⁻². Vplyv vyššej pevnostnej triedy betónu je zrejmý z porovnania obr.2 a obr.3 a tiež z porovnania obr. 4 a obr.5. Pri návrhu hrúbky dosky 250 mm je pre betón triedy C25/30 návrhové zaťaženie $f_d = 13$ kNm⁻² a pre betón triedy C35/45 návrhové zaťaženie $f_d = 18$ kNm⁻². Odolnosť lokálne podopretej dosky v pretlačení je možno takto zvýšiť o cca 5 kNm⁻², čo predstavuje 28 %.

4 PRETLAČENIE ZÁKLADOVEJ DOSKY

Na obr. 6 je schematicky znázornené pretlačenie lokálne zaťaženej základovej dosky, porušenie tlakovej diagonály pri obvode okolo stĺpa u_0 a šmykovo - ťahové porušenie betónu v druhom 0,5*d* až n - tom kontrolnom obvode ohraničenom vzdialenosťou 2*d*. Uvádzané obmedzenia sa týkajú opäť celkovej šmykovej odolnosti a túto hodnotu nemožno prekročiť aj za predpokladu vyšsieho vystuženia šmykovou výstužou.



Obr. 6: Model pretlačenia lokálne zaťaženej časti základovej dosky

Prvé obmedzenie šmykovej odolnosti základovej dosky vychádza z overenia šmykovej odolnosti v kontrolnom obvode u_0 - okolo stĺpa, kde ide o drvenie betónu v tlačenej diagonále.

$$v_{\rm Ed,max} = \beta_0 \frac{V_{\rm Ed}}{u_0.d} \le v_{\rm Rd,max} = 0, 4.0, 6. \left(1 - \frac{f_{\rm ck}}{250}\right) f_{\rm cd}$$
(4)

Druhé obmedzenie šmykovej odolnosti základovej dosky vychádza z overenia šmykovej odolnosti betónu v kontrolných obvodoch u_i (i = 1 až n) a odolnosť v týchto kontrolných obvodoch sa nesmie uvažovať väčšia ako k_{max} násobok šmykovej odolnosti betónu $v_{Rd,ca}$. Maximálna šmyková odolnosť v pretlačení základových pätiek, resp. dosiek so šmykovou výstužou, sa vypočíta a obmedzuje podľa vzorca (5) pre kontrolné obvody vzdialené od líca stĺpa $0,5d \le a \le 2d$. Príspevok šmykovej výstuže v tejto oblasti navrhujeme stanoviť ako hodnotu podľa vzorca (6). Pre kontrolné obvody vo vzdialenosti a > 2d platia vzorce (2) a (3). Šmyková sila $V_{Ed}(a)$ sa vypočíta od zaťaženia (reakcia zemného tlaku), ktoré leží za oblasťou ohraničenou kontrolným obvodom u(a).

$$v_{\rm Ed}(a) = \frac{\beta_{\rm a} V_{\rm Ed}(a)}{u(a)d} \le v_{\rm Rd,cs}(a) = \frac{2d}{a} 0.75 v_{\rm Rd,c} + v_{\rm Rd,s}(a) \le k_{\rm max} \cdot \frac{2d}{a} v_{\rm Rd,c}$$
(5)

$$v_{\rm Rd,s}(a) = \left(\frac{0.75a}{s_{\rm r}}\right) \frac{A_{\rm sw} f_{\rm ywd,ef}}{u(a)d} \sin \alpha \tag{6}$$

5 NÁVRH HRÚBKY ZÁKLADOVEJ DOSKY

Pre rozmer prierezu stĺpa o hrane 300 mm a osovej vzdialenosti stĺpov 8×8m podľa obr.7, by pri návrhu hrúbky základovej dosky 900 mm z betónu C30/37, nastalo porušenie v tlakovej diagonále pri celkovom priemernom napätí v základovej škáre $\sigma_{cg} = 60 \text{ kN/m}^2$.V tomto prípade je rozhodujúce "prvé obmedzenie šmykovej odolnosti" (4).

Pre rozmer prierezu stĺpa o hrane 500 mm a osovej vzdialenosti stĺpov 8 ×8 m podľa obr.8, by pri návrhu hrúbky základovej dosky 900 mm, nastalo porušenie v tlakovej diagonále pri celkovom priemernom napätí v základovej škáre σ_{cg} = 100 kNm⁻².

Pri výpočte sa predpokladalo rovnomerné rozdelenie napätí v základovej škáre, možné porušenie tlakovej diagonály v obvode u_0 alebo ťahové porušenie betónu v kontrolných obvodoch 0,5*d* až 2*d*. Krytie výstuže bolo uvažované 50 mm.



Obr.7: Návrh hrúbky lokálne zaťaženej základovej dosky – stĺp 300/300 mm



Obr.8: Návrh hrúbky lokálne zaťaženej základovej dosky - stĺp 500/500

Únosnosť lokálne zaťaženej základovej dosky je možno zvýšiť o cca 40 % (40 kN/m²) pri zväčšení rozmeru štvorcového stĺpa z 300 na 500 mm.

$$\frac{v_{\rm Ed}(a_{\rm crit})}{v_{\rm Rd}(a_{\rm crit})} = \max \rightarrow a_{\rm crit}$$
(7)

Z analýz pretlačenia základových dosiek tiež vyplynulo, že pre základovú dosku betónu triedy C30/37, rozmer štvorcového stĺpa 500 mm a vzdialenosť stĺpov 8 m boli pre rôzne hrúbky základovej dosky rozhodujúce nasledovné kritické kontrolné obvody:

Tab. 1: Poloha kritických obvodov stanovených podľa vzťahu (7)

h	$a_{\rm cr}$	h	$a_{\rm cr}$	h	$a_{\rm cr}$	h	$a_{\rm cr}$	h	$a_{\rm cr}$
[mm]		[mm]		[mm]		[mm]		[mm]	
400	3,5 <i>d</i>	600	2,5 <i>d</i>	800	1,75 <i>d</i>	1000	1,3 <i>d</i>	1200	1,0 <i>d</i>

6 ZÁVER

V príspevku je prezentovaná problematika betónových lokálne podopretých stropných dosiek a lokálne namáhaných základových dosiek a pätiek. Uvedené sú obmedzenia maximálnej šmykovej odolnosti v pretlačení. Na základe uvedených obmedzení (hodnota k_{max} bola uvažovaná 1,9 pre šmykovú výstuž vo forme šmykových tŕňov) boli vytvorené grafy pre návrh minimálnej hrúbky lokálne podopretých stropných dosiek a základových dosiek v závislosti od veľkosti zaťaženia, rozpätia a stupňa vystuženia hlavnou výstužou. Z prezentovaných grafov je zrejmé že limit založený na hodnote k_{max} bude rozhodovať o minimálnej hrúbke dosky z betónov vyššej pevnostnej triedy, s menším množstvom hlavnej výstuže nad/pod stĺpom a pre dosky podopreté stĺpmi s väčšími rozmermi priečneho rezu. Naopak, limit založený na zlyhaní tlakovej diagonály bude rozhodujúci u dosiek vyrobených z betónov nižšej pevnostnej triedy, s väčším množstvom hlavnej výstuže a menšími rozmermi prierezu stĺpa.

POĎAKOVANIE

Projekt bol realizovaný za finančnej podpory Vedeckej grantovej agentúry Ministerstva školstva a vedy SR. Registračne číslo projektu je VEGA č. 1/0690/13.

LITERATÚRA

- [1] RUIZ M.F. -MUTONI A.: Application of Critical Shear Crack Theory to Punching of RC Slabs with Transverse Reinforcement. ACI Structural Journal V.106 No.4, July August 2009, pp.485-494.
- [2] FEIX J. -HAUSLER F. WALKNER R.: Necessary Amendments to the Rules for Punching Design According to EN 1992-1-1. In: Proceedings of Workshop "Design of Concrete Structures and Bridges using Eurocodes", Bratislava 2011, pp.21-27.
- [3] HEGGER J. SIBURG C.: Punching Comparison of Design Rules and Experimental Data.In: Proceedings of Workshop "Design of Concrete Structures using EN 1992-1-1", Prague 2010, pp.113-124.
- [4] BUJŇÁK J. -GAVURA S.: On the maximum resistance of slabs reinforced against failure by punching Punching – Comparison of Design Rules and Experimental Data.In: Proceedings of Workshop "Design of Concrete Structures using Eurocodes", Prague 2012, pp.69-75.
- [5] REGAN P.E.:*Shear Reinforcement of Flat Slabs*.In: Proceedings of International Workshop on Punching Shear Capacity of RC Slabs, TRITA/BKN, Bulletin 57, 2000, pp.97-107.
- [6] BIRKLE G.: *Punching of Flat Slabs: The Influence of Slab Thickness and Stud Layout*.Department of Civil Engineering, University of Calgary, Calgary, AB, Canada, 2004, 152pp.
- [7] DRŽÍKOVÁ, D. FARKAŠOVÁ,K.: Upravené kritériá pre pretlačenie stropných a základovýchdosiek.Práca ŠVK, Bratislava 2013, 20s.

Oponentní posudek vypracoval:

Doc. Ing. Miloš Zich, Ph.D., Ústav betonových a zděných konstrukcí, Fakulta stavební, VUT v Brně. Ing. Martin Križma, PhD., Ústav stavebníctva a architektúry, Slovenská akadémia vied, Bratislava. číslo 1, rok 2014, ročník XIV, řada stavební

článek č. 04

Jaroslav HALVONIK¹, Ľudovít FILLO²

PRETLAČENIE – PRÍČINY HAVÁRIE V KOMPLEXE TRINITY

PUNCHING - THE REASONS OF FAILURE IN COMPLEX TRINITY

Abstrakt

Príspevok je venovaný objasneniu príčin zrútenia nosnej konštrukcie garáži v polyfunkčnom komplexe Trinity, ktoré nastalo v júli roku 2012 v Bratislave. Lokálne zlyhanie strešnej dosky malo za následok úplnú deštrukciu päť poschodovej budovy, ktorej stropné konštrukcie boli navrhnuté ako lokálne podopreté dosky.

Klíčová slova

Pretlačenie, lokálne podopretá doska, krehké porušenie, reťazové zrútenie.

Abstract

Paper deals with clarifying of the reasons of car garage structural collapse in multifunctional complex Trinity in Bratislava which occurred in Bratislava in July 2012. Local failure of roof slab caused total destruction of five storey building, where floors were designed as RC flat slabs.

Keywords

Punching, flat slab, brittle failure, progressive collapse.

1 ÚVOD

V nedeľu 1. júla 2012 v ranných hodinách došlo k zrúteniu stropných konštrukcií garáži obchodno-obytného komplexu Trinity v Bratislave. Nakoľko zrútená časť nebola skolaudovaná, nedošlo našťastie ku strate na ľudských životoch ani ku zraneniam osôb.

2 POPIS KONŠTRUKCIE

Polyfunkčný komplex Trinity tvoria tri dilatačné celky A,B,C. Každý dilatačný celok pozostáva zo suterénov, podnoží a obytnej časti, pozri obr.1. Stropné konštrukcie suterénov, ktoré slúžia ako garážové státia a podnoží v ktorých majú byť situované obchodné prevádzky predstavujú lokálne podopreté dosky hrúbky 220 mm, okrem dosky nad 1.PP, ktorej hrúbka je zväčšená na 350 mm a v mieste stĺpov ďalej zosilnená hlavicami hrúbky 500 mm. Dosky sú väčšinou podopreté stĺpmi 400×500 mm, alebo kruhovými stĺpmi s \u03c6 600 mm a pod obytnou časťou 500×800 mm. Dosky majú maximálne rozpätia 7,5×6,0 m. Obytnú časť tvoria tri výškové budovy s 22, resp. 26 poschodiami, kde je navrhnutý stenový nosný systém. V súčasnosti je dokončený dilatačný celok "A", hrubá stavba dilatačného celku "B" a pri dilatačnom celku "C" sú dokončené podnože.

¹ Prof. Ing. Jaroslav Halvonik, PhD., Katedra betónových konštrukcií a mostov, Stavebná fakulta, Slovenskej technickej univerzity v Bratislave, Radlinského 11, 813 68 Bratislava, tel.: (+421) 2 59 274 555, e-mail: jaroslav.halvonik@stuba.sk.

² Prof. Ing. Ľudovít Fillo, PhD., Katedra betónových konštrukcií a mostov, Stavebná fakulta, Slovenskej technickej univerzity v Bratislave, Radlinského 11, 813 68 Bratislava, tel.: (+421) 2 59 274 508, e-mail: ludovit.fillo@stuba.sk.



Obr. 1: Modely nosnej konštrukcie komplex Trinity DC "A" a DC "B"



Obr. 2: Celkový pohľad na deštrukciu 5 podlažnej budovy



Obr. 3: Pohľad na deštrukciu 5 podlažnej budovy

3 ZLYHANIE KONŠTRUKCIE

V objekte dilatačného celku "B" sa zrútila časť, ktorá mala slúžiť ako parkovací dom a wellness. Strecha objektu bola navrhnutá ako zelená s premennou vrstvou zeminy hrúbky od 1050 do 1350 mm. Táto vrstva zeminy bola umiestnená na lokálne podopretej doske hrúbky len 200 mm, pozri obr.4. Strešná doska bola podopretá stĺpmi 400×500 mm. Rozpätia polí boli premenné, stredné pole 7,5×5,5 m, krajné polia 4,75×5,5 m, resp. 6,75×5,5 m. Stropné dosky mali hrúbku 220 mm a nakoľko v tom čase neboli zaťažené (okrem vlastnej tiaže) dalo sa predpokladať, že ako prvá sa zrútila silne zaťažená strešná doska a strhla ostatné stropné konštrukcie tak, že v mieste objektu vznikol kráter hlboký viac ako 30 m, pozri obr.2.



Obr. 4: Pôdorys zrútenej konštrukcie

Charakteristický tvar poruchovej zóny v okolí stĺpov, pozri obr.5, naznačil, že k zlyhaniu došlo v dôsledku pretlačenia strešnej dosky. Zlyhanie malo krehký charakter a bolo progresívne - reťazové, t.j. pretlačenie dosky okolo prvého stĺpa spôsobilo preťaženie oblasti susedných stĺpov a takto sa postupne porucha rozšírila po celej konštrukcií. Pád strešnej dosky potom spôsobil postupne zrútenie ďalších stropov.

4 ANALÝZA PRÍČIN ZRÚTENIA KONŠTRUKCIE

Pre účely zistenia príčin pádu konštrukcie bola urobená statická analýza, ktorá zahŕňala výpočet účinkov zaťaženia na strešnú dosku a výpočet šmykovej odolnosti v pretlačení.



Obr. 5: Charakteristický tvar poruchovej oblasti v okolí stĺpa

4.1 Účinky zaťaženia

Strešná doska bola pri zrútení okrem vlastnej tiaže, zaťažená ostatným stálym zaťažením s intenzitou až 19,0 kN/m². Ostatné stále zaťaženie tvorili izolačné vrstvy a tiaž zemného substrátu hrúbky 1,05 až 1,35 m. Je potrebné zdôrazniť, že objemová hmotnosť substrátu bola značne premenná v závislosti od nasýtenosti vodou. Pri nafúkavaní substrátu na strechu bola objemová hmotnosť len 900 kg/m³. V statickom výpočte bola uvažovaná 1410 kg/m³, ale zistená po páde konštrukcie až 1670 kg/m³. S vodou nasýtenom stave narástla objemová hmotnosť až na 1760 kg/m³.

Zaťaženie dosky potom predstavovali:

- Izolačne vrstvy hrúbky 230 mm...... 1,5 kN/m²
- Zemný substrát pri základnej hrúbke 1,05 m

-	Projektovaná obj. tiaž	: 14,1 kN/m ³ \rightarrow	 plošné zaťaženie 	.14,8 kN/m ²
-	Zistená pri zlyhaní:	16,7 kN/m ³ \rightarrow		17,5 kN/m ²

Navyše oproti navrhovanej hrúbke 1,05 m bol substrát vymodelovaný do kopcov s maximálnou hrúbkou až 1,35 m. Preto ostatné stále zaťaženie sa menilo v závislosti od uvažovanej objemovej tiaže substrátu od:

- 14,8÷ 18,9 kN/m² pri projektovanej objemovej tiaži
- 17,5÷ 22,6 kN/m² pri objemovej tiaži v čase zlyhania konštrukcie
- 18,8 ÷ 23,7 kN/m² pri objemovej tiaži vodou nasýteného substrátu.
- Premenné zaťaženie na doske bolo predpokladané 2,0 kN/m².
- Návrhové zaťaženie strešnej dosky podľa ČSN 730035:

 $f_{d} = 1,1.5,0 + 1,2.1,5 + 1,2.15,1 + 1,4.2,0 = 28,2 \div 33,3 \text{ kN/m}^{2}$ $f_{d} = 31,6 \div 37,6 \text{ kN/m}^{2} \text{ (s obj. tiažou pri zlyhaní)}$ $f_{d} = 32,7 \div 39,0 \text{ kN/m}^{2} \text{ (vodou nasýtený)}$

- Návrhové zaťaženie strešnej dosky podľa STN EN 1990 (zväčšenie o cca 11%) $f_d = 1,35.(5,0+1,50+14,8) + 1,5.0,7.2,0 = 31,3 \div 37,0 \text{ kN/m}^2$ $f_d = 35,0 \div 40,0 \text{ kN/m}^2$ (s obj. tiažou pri zlyhaní) $f_d = 36,2 \div 43,4 \text{ kN/m}^2$ (vodou nasýtený)
- Zaťaženie pri zlyhaní konštrukcie:
 - $f_{\rm qp} = 5.0 \pm 1.50 \pm 17.5 = 24.0 \pm 29.1 \text{ kN/m}^2$

Účinky zaťažení na konštrukciu boli analyzované s použitím FEM modelu strešnej dosky. Vnútorné sily boli vybraté v oblasti dvoch stĺpov "A" a "B" podľa obr.4, ktoré predstavujú dve kritické oblasti. Prvá reprezentuje oblasti vystužené šmykovou výstužou a druhá oblasti bez šmykovej výstuže. Sily použité pre overenie pretlačenia sú zhrnuté v tab.1 až tab.4.

4.2 Odolnosť konštrukcie v pretlačení

Strešná doska bola navrhnutá z betónu pevnostnej triedy C25/30 (B30). Priemerná hodnota účinnej výšky d v oblasti nad stĺpmi bola 155 mm, hlavná výstuž ¢20 mm po 150 mm v oboch smeroch. Niektoré oblasti v okolí stĺpov boli vystužené šmykovou výstužou, ktorú tvorili dva obvody šmykových tŕňov ¢10 mm v počte 12 ks (rad stĺpov "A" na obr.4). Niektoré oblasti boli bez šmykovej výstuže (rad stĺpov "B" na obr.4). Odolnosť v pretlačení bola vypočítaná podľa normy ČSN 731201 a STN EN 1992-1-1 a to s návrhovými aj strednými hodnotami pevnosti materiálov. Šmykové odolnosti v pretlačení sú zhrnuté v tab.1 až tab.4.

4.3 Overenie spol'ahlivosti

V tab.1 sú účinky zaťažení a odolnosti stanovené ako návrhové s predpísanou úrovňou spoľahlivosti podľa normy STN EN 1990. Aj keď šmyková sila V_{Ed} pôsobiaca v oblastí bez šmykovej výstuže "B" je menšia ako v oblasti so šmykovou výstužou "A", pre veľké nevyrovnané momenty, ktoré sa vnášajú do stĺpov bolo šmykové namáhanie βV_{Ed} takmer identické pre obe oblasti. Vďaka absencií šmykovej výstuže bola šmyková odolnosť v pretlačení v oblasti "B" prekročená o viac ako 300%, kým v prípade oblasti so šmykovou výstužou bolo prekročenie odolnosti o 111%.

Stĺp	$V_{\rm Ed}$	$\Delta M_{\rm Exd}$	$\Delta M_{ m Eyd}$	β	$\beta V_{\rm Ed}$	V _{Rd}	$\beta V_{\rm Ed}/V_{\rm Rd}$
	[kN]	[kN.m]	[kN.m]		[kN]	[kN]	[%]
Α	1671	115	18	1,111	1856	881	211
В	1453	234	0	1,261	1832	450	407

Tab. 1: Overenie odolnosti v pretlačení podľa EC2 - návrhové hodnoty

V tab.2 je porovnanie s modelmi pre overenie odolnosti v pretlačení v zmysle STN EN1992-1-1, ale s použitím $\gamma_{\rm C} = 1,0$ a $v_{\rm Rm,c} \approx 1,19.v_{\rm Rk,c}$, pozri [3]. Na konštrukcií bolo uvažované zaťaženie, ktoré tam bolo reálne v čase kolapsu strešnej dosky. Vidíme, že kým v oblastiach so šmykovou výstužou sú účinky zaťaženia porovnateľné s odolnosťou, v prípade oblastí bez šmykovej výstuže účinok zaťaženia prekračuje odolnosť o 60%.

Tab. 2: Overenie odolnosti v pretlačení podľa EC2 - stredné hodnoty

Stĺp	$V_{\rm E}$	$\Delta M_{\rm Ex}$	$\Delta M_{\rm Ey}$	β	$\beta V_{\rm E}$	V _{Rk}	V _{Rm}	$\beta V_{\rm E}/V_{\rm Rm}$
	[kN]	[kN.m]	[kN.m]		[kN]	[kN]	[kN]	[%]
Α	1169	81	12	1,111	1299	1113	1235	105
В	1016	164	0	1,261	1281	676	805	159

V tab.3 je posúdenie v zmysle pôvodných československých noriem rady ČSN s výpočtovým (návrhovými) hodnotami. Opäť možno konštatovať, že aj keď šmyková sila Q_d v okolí uvažovaného stĺpa je v oblastiach vystužených šmykovou výstužou väčšia ako v oblastiach bez šmykovej výstuže, skutočné šmykové namáhanie β . Q_d je veľmi podobné. V tomto prípade pre obidve oblasti prekročenie únosnosti v pretlačení predstavuje cca 230%. Dôvodom je skutočnosť, že kontrolný obvod uvažovaný v ČSN norme je vo vzdialenosti h/2 = 100 mm od líca podpery, kým v modeloch EC2 až 2.d = 310 mm. Takže v rámci prvého kontrolného obvodu bolo možne v modeloch normy ČSN uvážiť len jeden obvod šmykových tŕňov, kým v prípade EC2 modelu až dva obvody. Zároveň v modeloch ČSN sa redukuje príspevok betónu Q_{bu} na polovicu, ak sa uvažuje s príspevkom šmykovej výstuže do odolnosti.

Stĺp	$Q_{ m d}$	$\Delta M_{\rm Ex}$	$\Delta M_{ m Ey}$	β	$\beta Q_{\rm d}$	$Q_{ m ud}$	$\beta Q_{\rm d}/Q_{\rm ud}$
	[kN]	[kN.m]	[kN.m]		[kN]	[kN]	[%]
А	1500	103	17	1,138	1707	528	323
В	1304	210	0	1,323	1725	491	351

Tab. 3: Overenie odolnosti v pretlačení podľa STN 731201 - návrhové hodnoty

V tab.4 sú účinky zaťažení vypočítané s reálnym zaťažením na strešnej doske a odolnosti so strednými hodnotami pevnosti materiálov. Napr. pri výpočte Q_{bu} je návrhová pevnosť betónu v ťahu $R_{btd} = 1,2$ MPa nahradená strednou hodnotou pevnosti $R_{btm} = 2,7$. V prípade modelu ČSN sa vypočítané odolnosti viac priblížili účinkom pôsobiaceho zaťaženia. Na prvý pohľad by sa mohlo zdať že model ČSN je presnejší ako model EC2, ale nie je to celkom tak, nakoľko v lokálne podopretých doskách vznikajú membránové sily, ktoré zvyšujú šmykovú odolnosť v pretlačení a tento efekt ani jeden z modelov nevystihuje.

Stĺp	$Q_{ m m}$	$\Delta M_{\rm Ex}$	$\Delta M_{ m Ey}$	β	$\beta Q_{\rm m}$	$Q_{ m um}$	$\beta Q_{\rm m}/Q_{\rm um}$
	[kN]	[kN.m]	[kN.m]		[kN]	[kN]	[%]
А	1169	81	12	1,138	1330	1350	99
В	1016	164	0	1,323	1344	1039	129

Tab. 4: Overenie odolnosti v pretlačení podľa STN 731201 - stredné hodnoty

6 ZÁVER

Na základe pomerne jednoduchej analýzy bolo možne konštatovať, že príčinou zrútenia objektu garáži v obchodno-obytnom centre Trinity bolo pretlačenie strešnej dosky spôsobené veľkým stálym zaťažením naimä od vrstvy zemného substrátu, ktorého hrúbka sa pohybovala v rozmedzí 1,05 až 1,35 m. Porucha sa začala zrejme šíriť od oblasti stĺpa, označeného ako "B" na obr.4. Pretlačením dosky týmto stĺpom došlo k postupnému preťaženiu susedných oblasti a následnému pádu strešnej dosky na nižšie položené stropne konštrukcie a nakoniec celkovému kolapsu časti budovy. Prekročenie šmykovej odolnosti v pretlačení bolo viac ako 3 násobné v zmysle požadovanej úrovne spoľahlivosti podľa Eurokódov a 2,5 násobné v zmysle požiadaviek noriem ČSN. Ak sa porovnali skutočné účinky zaťaženia so strednými hodnotami šmykovej odolnosti tak v prípade oblasti bez šmykovej výstuže boli stále odolnosti prekročené o 60% podľa modelu EC2 a o 30% podľa modelu normy ČSN 731201. Je preto viac ako podivuhodné, že strešná doska vydržala takto veľké zaťaženie viac ako 8 mesiacov, aj keď veľkosť zaťaženia sa postupne zvyšovala zväčšujúcou sa vlhkosťou zemného substrátu. Našťastie vďaka ekonomickej kríze stavba meškala niekoľko rokov a priestory dilatačného celku "B" neboli v čase havárie skolaudované. Šťastím bolo tiež, že k zrúteniu došlo v nedeľu v ranných hodinách takže v priestoroch objektu sa nikto nenachádzal. Záverom chceme zdôrazniť že príspevok nemal ambíciu vysvetliť prečo došlo k tak fatálnemu poddimenzovaniu strešnej dosky, ale skôr poukázať na závažnosť fenoménu pretlačenia pri navrhovaní lokálne podopretých doskových konštrukcií.

POĎAKOVANIE

Projekt bol realizovaný za finančnej podpory Vedeckej grantovej agentúry Ministerstva školstva a vedy SR. Registračne číslo projektu je VEGA č. 1/0690/13.

LITERATÚRA

- RUIZ,M.F.- MUTTONI,A. Application Critical Shear Crack Theory to Punching of RC Slabs with Transverse Reinforcement. ACI Structural Journal V.106 No.4, July – August 2009, pp.485-494.
- [2] FEIX,J.- HAUSLER,F.- WALKNER,R.: Necessary Amendments to the Rules for Punching Design According to EN 1992-1-1. In: Proceedings of Workshop "Design of Concrete Structures and Bridges using Eurocodes". Bratislava 2011, pp.21-27.
- [3] HEGGER,J.- SIBURG,C.: Punching Comparison of Design Rules and Experimental Data. In Proceedings of Workshop "Design of Concrete Structures using EN 1992-1-1". Prague 2010, pp.113-124.
- [4] BILČÍK, J. FILLO, Ľ. BENKO, V. HALVONÍK, J.: Betónové konštrukcie. Navrhovanie podľa EN 1992-1-1. Bratislava 2008, 374s.

Oponentní posudek vypracoval:

Doc. Ing. Václav Cepek, CSc., Ostrava.

Doc. Ing. Martin Moravčík, Ph.D., Katedra stavebných konštrukcií a mostov, Stavebná fakulta, Žilinská univerzita v Žiline.
číslo 1, rok 2014, ročník XIV, řada stavební

článek č. 05

Jana LABUDKOVÁ¹, Radim ČAJKA²

POROVNÁNÍ EXPERIMENTÁLNĚ NAMĚŘENÉ DEFORMACE DESKY NA PODLOŽÍ A VÝSLEDKŮ 3D NUMERICKÉHO MODELU

COMPARISON OF EXPERIMENTALLY MEASURED DEFORMATION OF THE PLATE ON THE SUBSOIL AND THE RESULTS OF 3D NUMERICAL MODEL

Abstrakt

Cílem článku je porovnání sedání základu naměřeného při experimentu a sedání získaného z 3D modelu na bázi MKP. Při tvorbě prostorového numerického modelu s využitím 3D prvků je problematické zejména správně stanovit velikost modelované oblasti představující podloží, zvolit okrajové podmínky a velikost konečnoprvkové sítě. V parametrické studii zpracované ze 168 variant modelů je znázorněna grafická závislost svislých deformací na zmíněných parametrech modelu podloží.

Klíčová slova

Základové konstrukce, podloží, interakční modely, kontaktní napětí, interakce základ – podloží, 3D model MKP.

Abstract

The purpose of this paper is to compare the measured subsidence of the foundation in experiments and subsidence obtained from FEM calculations. When using 3D elements for creation of a 3D model, it is, in particular, essential to choose correctly the size of the model area which represents the subsoil, the boundary conditions and the size of the finite element network. The parametric study evaluates impacts of those parameters on final deformation. The parametric study is conducted of 168 variant models.

Keywords

Foundation structure, soil – structure interaction, interaction models, contact stress, 3D FEM element.

1 ÚVOD

V důsledku nesouladu vypočtených a skutečných hodnot sedání základů se provádí výzkumy a experimentální měření zaměřená na sedání základové půdy pod stavbami, deformace základových desek a závislost napětí v základových deskách na charakteristikách podloží. Výsledky dosažené při experimentech slouží ke zpřesnění metod výpočtů sedání. O interakci základových konstrukcí s podložím je také pojednáno v [5, 6, 8, 9, 16, 19].

V roce 2012 byl v areálu Fakulty stavební VŠB – TU Ostrava uskutečněn experiment [3]. Hodnoty sedání naměřené během zatěžovací zkoušky byly následně porovnány s hodnotami vypočtenými pomocí interakčních modelů s prostorovými prvky na bázi MKP [1, 2, 18]. Tyto

¹ Ing. Jana Labudková, Katedra konstrukcí, Fakulta stavební, VŠB-Technická univerzita Ostrava, Ludvíka Podéště 1875/17, 708 33 Ostrava-Poruba, tel.: (+420) 597 321 925,e-mail: jana.labudkova@vsb.cz.

² Prof. Ing. Radim Čajka, CSc., Katedra konstrukcí, Fakulta stavební, VŠB-Technická univerzita Ostrava, Ludvíka Podéště 1875/17, 708 33 Ostrava-Poruba, tel.: (+420) 597 321 344, e-mail: radim.cajka@vsb.cz.

výpočty jsou provedeny pro několik variant, které se liší velikostí modelované oblasti podloží a okrajovými podmínkami.

2 EXPERIMENTÁLNÍ MĚŘENÍ

Předmětem vytvořeného modelu byla zatěžovací zkouška prováděná na zkušebním zařízení v areálu Fakulty stavební VŠB – TU Ostrava. Testovací zařízení umožňuje provádět experimentální měření přetvoření i napjatosti a při vzájemné interakci základových konstrukcí s podložím lze sledovat napěťově-deformační vztahy [3].

Zkušebním vzorkem byla prefabrikovaná betonová dlaždice. Betonová dlaždice byla zvolena pro jednoduchost při provádění experimentu zaměřeného na ověření zkušebních metod a zařízení. Rozměry této betonové dlaždice jsou 500 x 500 x 48 mm. Horní vrstva podloží je tvořená sprašovými hlínami s konzistencí třídy F4 a její mocnost je cca 5 m. Během zkoušky prováděné v červnu 2012 byla betonová deska uprostřed zatěžována tlakem vyvozeným hydraulickým lisem. Rozměry zatěžované plochy byly 100 x 100 mm a v době porušení mělo zatížení hodnotu 18,640 kN. Další měření související s interakcí základových konstrukcí a podloží jsou popsána v [4, 7].



Obr. 1: Zkušební vzorek a jeho centrické zatěžování

3 TVORBA MODELU V PROGRAMOVÉM SYSTÉMU ANSYS

Pro betonovou desku, která je modelována jako plocha se zadanou tloušťkou desky, je použit plošný prvek SHELL 181. Podloží je modelováno s využitím prostorového prvku SOLID 45. Prvek SOLID 45 umožňuje řešit lineární i nelineární analýzy konstrukce s velkými deformacemi, dotvarováním a zplastizováním. Velikost prvků sítě je odlišná pro řešenou oblast podloží a plochu desky, u které je použita hustší síť. Řešení kontaktních úloh na bázi MKP je uvedeno také v [14, 17].



Obr. 2: 3D model v programu ANSYS; deska z prostého betonu na podloží

Aby byly účinky zatížení působícího na základovou desku přeneseny do podloží, je nutné vytvořit jejich vzájemný kontakt a definovat kontaktní plochu. Kontaktní plocha reprezentuje styk desky s podložím a je charakteristická tím, že přenáší pouze tlakovou sílu. Vzhledem k tomu, že se jedná o jednostrannou vazbu, vstupuje do výpočtu konstrukční nelinearita, která vyžaduje iterační postup řešení a analýza je automaticky nelineární. Kontakt je zprostředkován pomocí kontaktního páru TARGE 170 – CONTA 173. Ke kontaktu dochází v momentu, kdy prvky jednoho povrchu pronikají do povrchu druhého. Numerická řešení kontaktních úloh jsou popsána také v [10, 11, 12, 13, 15]. Na kontaktní ploše je zanedbán vliv tření mezi deskou a podložím. Součinitel tření je tedy nulový. Při řešení úlohy byla zanedbána vlastní tíha zemního masivu i betonové desky. Vlastní tíha zeminy by měla vliv na výslednou hodnotu absolutních veličin (sednutí). Na hodnotu relativních veličin má vliv jen v případě nelineární analýzy.

3.1 Parametrická studie

Velikost modelované oblasti představující podloží a okrajové podmínky jsou parametry modelu, které mají při řešení trojrozměrné prostorové úlohy výrazný vliv na výsledné deformace.

Byly vytvořeny čtyři varianty s odlišnými okrajovými podmínkami (Obr. 3). Všechny varianty byly následně porovnány a byl sledován vliv okrajových podmínek na výsledné veličiny, kterými jsou deformace vzniklé při interakci desky s podložím, vnitřní síly a kontaktní napětí [1, 2, 18].



Obr. 3: Varianty okrajových podmínek

Vzájemné porovnávání různých variant modelů bylo provedeno ze čtyř hledisek. Prvním z nich byl vliv zvolených okrajových podmínek na deformace (varianty A, B, C, D).

Na Obr. 4 (vlevo) je patrný vliv a význam okrajových podmínek na výsledné svislé deformace. Největší rozdíly ve vypočtených hodnotách svislé deformace v závislosti na rostoucí hloubce bylo dosaženo pro variantu okrajových podmínek A. Pro variantu C jsou okrajové podmínky v uzlech obvodových stěn modelu podloží natolik významné, že deformace téměř nezávisí na hloubce modelu podloží [1, 2, 18].



Obr. 4: Graf závislosti svislých deformací na zvolených okrajových podmínkách (vlevo) a na hloubce modelu podloží (vpravo)

Druhým sledovaným parametrem je závislost deformací na proměnné hloubce namodelovaného podloží při zachování stejného půdorysného rozměru podloží.

Zvětšuje-li se hloubka modelu podloží, zvětšují se i výsledné svislé deformace. Na Obr. 4 (vpravo) je zřejmé, že čím je větší hloubka modelovaného podloží, tím je větší rozdíl mezi deformacemi vypočtenými pro jednotlivé varianty okrajových podmínek. S rostoucí hloubkou modelu podloží se tedy volba okrajových podmínek stává rozhodujícím kritériem ovlivňujícím výsledné svislé deformace[1, 2, 18].

Třetím sledovaným hlediskem je závislost deformací na proměnné velikosti půdorysné plochy podloží, když je zachovaná stejná hloubka. Z Obr. 5 (vlevo) vyplývá, že pro všechny varianty okrajových podmínek jejich vliv slábne se zvětšující se půdorysnou plochou podloží. Z Obr. 5 (vlevo) lze vyvodit závěr, že při dostatečné velikosti půdorysných rozměrů modelu podloží nezáleží na volbě okrajových podmínek.

Při posledním porovnání byl sledován vliv celkové velikosti prostorového modelu podloží na deformace. Z Obr. 5 (vpravo) vyplývá, že čím je větší řešená oblast, tím jsou větší také deformace. To platí bez ohledu na to, zda tento nárůst deformací ovlivňuje převážně hloubka nebo půdorysné rozměry modelu podloží [1, 2, 18].



Obr. 5: Graf závislosti svislých deformací na půdorysných rozměrech modelu (vlevo) a na celkové velikosti modelu podloží (vpravo)

3.2 Závislost svislých deformací na půdorysných rozměrech a hloubce modelu podloží

Pro naznačení závislosti svislých deformací na půdorysných rozměrech a hloubce modelu podloží byla použita varianta okrajových podmínek A.



Obr. 6: Vliv půdorysných rozměrů modelovaného podloží a jeho hloubky na svislé deformace

Nejrychlejší nárůst svislých deformací s hloubkou je pro takové půdorysné rozměry podloží, které jsou totožné s velikostí desky. V takovém případě je totiž vliv okolní zeminy zanedbán a svislé deformace se mění ve stejném poměru jako hloubka oblasti. Se zvětšující se půdorysnou plochou, a tedy rostoucím vlivem okolní zeminy, je nárůst svislých deformací s hloubkou pomalejší a není zachován poměr nárůstu hloubky a deformací (Obr. 6, Tab. 1). Při tvorbě modelu v programu ANSYS byla použita síť o velikosti prvku 0,1 x 0,1 x 0,1 m [18].



Tab. 1: Vliv půdorysných rozměrů modelovaného podloží a jeho hloubky na svislé deformace

3.3 Výsledná napjatost a deformace desky

Na základě parametrické studie a vlivu jednotlivých parametrů 3D modelu na celkové deformace byl vytvořen model podloží o rozměrech 2,5 x 2,5 x 2,5 m, s velikostí sítě 0,05 x 0,05 x 0,05 m a okrajovými podmínkami varianty D. Výsledná napjatost a deformace jsou uvedeny na následujících obrázcích. Na Obr. 7 jsou vykresleny celkové deformace, ze kterých je patrný vliv okrajových podmínek, které zabraňují horizontálním posunům obvodových stěn modelu a vertikálním posunům podstavy modelu podloží. Na obrázku je také vykreslen vertikální řez vedený středem modelu podloží [18].



Obr. 7: Model ANSYS: Celkové deformace desky, vertikální řez podložím [m];

Rozdělení kontaktního napětí je zaznamenáno na Obr. 8 až Obr. 10. Podle předpokladu dochází ke koncentraci kontaktního napětí po obvodu betonové desky a v jejich rozích, kde napětí prudce narůstá [18]. To je možné sledovat také v příčném a šikmém řezu betonovou deskou. Špičky představující rostoucí kontaktní napětí lze v programu ANSYS omezit.



Obr. 8: Model ANSYS: Kontaktní napětí a vyznačení řezů [Pa]



Svislá složka napětí v podloží σ_z je vykreslena na Obr. 11. Červeně zbarvené oblasti znázorňují tahová napětí zeminy v místě poklesové kotliny.

Při modelování konstrukce je důležitá zejména volba materiálového modelu a následné zadání parametrů zeminy. Na Obr. 11 je provedeno srovnání lineárního a nelineárního materiálového modelu. Při lineárním výpočtu není zohledněna oblast a způsob možného porušení. Nelineární materiálový model je proveden s využitím modelu Drucker – Prager, díky kterému je možné lépe vystihnout chování zeminy a popsat rozdíl mezi tahovou a tlakovou pevností.



Obr. 11: Model ANSYS: Srovnání napětí σ_z lineárního a nelineárního materiálového modelu

Při nelineární analýze dochází při překročení podmínky plasticity k trvalým deformacím. Pro model podloží velikosti 2,5 x 2,5 x 2,5 m, jehož síť měla velikost 0,1 x 0,1 x 0,1 m nebyly mezi lineárním a nelineárním materiálovým modelem zjištěny žádné odchylky. Když byla ve stejném modelu konečnoprvková síť zhuštěna na 0,05 x 0,05 x 0,05 m, extrémní hodnoty napětí v tlaku i tahu narostly téměř na dvojnásobek. V tomto případě došlo ke zplastizování (Obr. 12) a výsledky použitého lineárního a nelineárního materiálového modelu se lišily (Obr. 11). Po zplastizování se snížila tahová i tlaková napětí v zemině. V reálných podmínkách je zemina schopná přenášet v menší míře i tahová napětí. S tímto předpokladem také koresponduje použitá podmínka plasticity, ve které je vznik tahového napětí možný, jak je patrné na Obr. 11.



4 ZÁVĚR

Hodnoty deformací získané z 3D modelu s prostorovými prvky vytvořeném v programu ANSYS mají velký rozptyl způsobený jednotlivými parametry. (Obr. 13)





Ve srovnání s deformacemi naměřenými během experimentu jsou deformace získané z modelů v programu ANSYS větší. Důvodem je mimo jiné fakt, že v modelech z programu ANSYS, není zohledněna strukturní pevnost zeminy. Vlastnosti 3D modelu podloží odpovídají vlastnostem lineárně pružné hmoty. Je-li odhad velikosti řešené oblasti proveden na základě předem známé hloubky deformační zóny získané prostřednictvím opravného součinitele přitížení *m*, je v takto vytvořeném 3D modelu nepřímo zohledněn odpor přitěžované zeminy proti přetvoření. Opravný součinitel *m* ovlivňuje strukturní pevnost zeminy. Zároveň platí, že čím je opravný součinitel přitížení *m* menší, tím více se deformační chování zeminy blíží chování lineárně pružné hmoty. Pokud se hodnota *m* blíží nule, výsledky konvergují k výsledkům získaným z 3D modelů MKP. Při výpočtu sedání pružného poloprostoru modifikovaného pomocí strukturní pevnosti, který je popsán v ČSN 73 1001, byla získaná maximální hodnota sedání podloží pod středem desky 7,612 mm. Ve zmíněném výpočtu je sednutí podloží počítáno do hloubky deformační zóny z_z.

Významným parametrem 3D modelu je také stupeň diskretizace. Dělení modelu na konečné prvky má vliv na samotné výsledky a výsledný počet stupňů volnosti, čímž ovlivňuje výpočtový čas a objem výsledných dat.

PODĚKOVÁNÍ

Tento článek vznikl za finanční podpory interního grantu SGS číslo SP2014/209.

LITERATURA

- CAJKA, R. & LABUDKOVA, J. Influence of parameters of a 3D numerical model on deformation arising in interaction of a foundation structure and subsoil. *1st International Conference on High-Performance Concrete Structures and Materials (COSTMA '13)*. Budapest, Hungary, December 10-12, 2013, ISSN 2227-4359, ISBN 978-960-474-352-0.
- [2] CAJKA, R. & LABUDKOVA, J. Dependence of deformation of a plate on the subsoil in relation to the parameters of the 3D model. *International Journal of Mechanics*, 2014 (in print).
- [3] CAJKA, R. & KRIVY, V. & SEKANINA, D. Design and Development of a Testing Device for Experimental Measurements of Foundation Slabs on the Subsoil. *Transactions of the VSB -Technical University of Ostrava, Construction Series,* Volume XI, Number 1/2011, VSB - TU Ostrava, Pages 1–5, ISSN (Online) 1804-4824, ISSN (Print) 1213-1962. DOI: 10.2478/v10160-011-0002-2, 2011.
- [4] CAJKA, R. & FOJTIK, R. Development of Temperature and Stress during Foundation Slab Concreting of National Supercomputer Centre IT4, *Procedia Engineering*, Volume 65, 2013, Pages 230-235, ISSN 1877-7058, doi: 10.1016/j.proeng.2013.09.035
- [5] CAJKA, R. & BURKOVIC, K. & BUCHTA, V. Foundation slab in interaction with subsoil. Advanced Materials Research. Volume 838-841, 2014, Pages 375-380, ISSN: 10226680 ISBN: 978-303785926-1, DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMR.838-841.375
- [6] CAJKA, R., BURKOVIC, K., BUCHTA, V., FOJTIK, R. Experimental soil Concrete plate interaction test and numerical models, *Key Engineering Materials*. Volume 577-578, 2014, Pages 33-36, ISSN: 10139826 ISBN: 978-303785830-1, DOI: 10.4028/www.scientific.net/KEM.577-578.33
- [7] CAJKA, R. & MATECKOVA, P. & JANULIKOVA, M. Bitumen Sliding Joints for Friction Elimination in Footing Bottom. *Applied Mechanics and Materials*, Volume 188, (2012), pp. 247-252, ISSN: 1660-9336, ISBN: 978-303785452-5, DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMM.188.247
- [8] CAJKA, R. Determination of Friction Parameters for Soil Structure Interaction Tasks. Recent Researches in Environmental & Geological Sciences. Energy, Environmental and Structural Engineering Series No. 4, pp. 435-440. Proceedings of the 7th WSEAS

International Conference on Continuum Mechanics (CM '12). Kos Island, Greece, July 14-17, 2012, pp. 435-440, ISSN 2227-4359, ISBN 978-1-61804-110-4

- [9] CAJKA, R. General Contact Element using Jacobian of Transformation and Gauss Numerical Integration of Half-space. In Proceedings of the 3rd International Conference on Mathematical Models for Engineering Science (MMES'12), WSEAS Press, Paris, France, December 2-4, 2012, pp. 23-28, ISBN 978-1-61804-141-8
- [10] CAJKA, R. Accuracy of Stress Analysis Using Numerical Integration of Elastic Half-Space (2013), *Applied Mechanics and Materials*, 300-301, pp. 1127-1135. ISSN: 16609336, ISBN: 978-303785651-2, DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMM.300-301.1127
- [11] CAJKA, R. Horizontal Friction Parameters in Soil Structure Interaction Tasks. Advanced Materials Research, Vol. 818 (2013), pp 197-205, Trans Tech Publications, Switzerland, doi:10.4028/www.scientific.net/AMR.818.197
- [12] CAJKA, R. Analysis of Stress in Half-space using Jacobian of Transformation and Gauss Numerical Integration. Advanced Materials Research, Vol. 818 (2013), pp 178-186, Trans Tech Publications, Switzerland, doi:10.4028/www.scientific.net/AMR.818.178
- [13] CAJKA, R. Comparison of the calculated and experimentally measured values of settlement and stress state of concrete slab on subsoil. *Applied Mechanics and Materials*. Volume 501-504, 2014, Pages 867-876, ISSN: 16609336 ISBN: 978-303835005-7, DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMM.501-504.867
- [14] FRYDRYSEK, K. & JANCO, R. & GONDEK, H. Solutions of Beams, Frames and 3D Structures on Elastic Foundation Using FEM. *International Journal of Mechanics*, Issue 4, Volume 7, 2013, pp. 362-369
- [15] HALVONIK, J. & FILLO, L. The Maximum Punching Shear Resistance of Flat Slabs, *Procedia Engineering*, Volume 65, 2013, Pages 376-381, ISSN 1877-7058, doi. 10.1016/j.proeng.2013.09.058.
- [16] JANULIKOVA, M. & STARA, M. Reducing the Shear Stress in the Footing Bottom of Concrete and Masonry Structures, *Procedia Engineering*, Volume 65, 2013, Pages 284-289, ISSN 1877-7058, doi: 10.1016/j.proeng.2013.09.044.
- [17] KRALIK, J. & JENDZELOVSKY, N. Contact problem of reinforced-concrete girder and nonlinear Winkler foundation. *International Conference Geomechanics 93*, Strata Mechanics/Numerical Methods/Water Jet Cutting/Mechanical Rock Disintegration, Pages 233-236, Ostrava, Czech Republic, Sep 28-30, ISBN 90 5410 354 X, Rotterdam / Brookfield / 1994.
- [18] LABUDKOVA, J. Comparison of soil foundation interaction models with measured values, Master Thesis, VSB – TUO, Ostrava, 2013, 163 s.
- [19] MYNARCIK, P. Technology and Trends of Concrete Industrial Floors, *Procedia Engineering*, Volume 65, 2013, Pages 107-112, ISSN 1877-7058, doi: 10.1016/j.proeng.2013.09.019.

Oponentní posudek vypracoval:

Prof. Ing. Ludovít Fillo, PhD., Katedra betónových konštrukcií a mostov, Stavebná fakulta, STU v Bratislave.

Prof. Ing. Juraj Králik, PhD., Katedra stavebnej mechaniky, Stavebná fakulta, STU v Bratislave.

Sborník vědeckých prací Vysoké školy báňské - Technické univerzity Ostrava

číslo 1, rok 2014, ročník XIV, řada stavební

článek č. 06

Jaroslav ODROBIŇÁK¹

VERIFICATION OF FLEXURAL BEHAVIOR AND SIMPLIFIED MODELING OF STEEL-CONCRETE COMPOSITE BRIDGE

Abstract

An experimental verification of actual flexural behavior of composite steel-concrete girder bridge is presented. The comparison of the experimentally obtained values with the values calculated using suitable computational model is also given in the paper. Introduction of changes in stiffness of concrete slab due to concrete cracking into the global analysis is discussed, too.

Keywords

Steel-concrete bridge, experimental measurement, result comparison, real behavior, simplified modeling.

1 INTRODUCTION

With the use of modern structural analysis computer programs, the most reliable design alternative, providing the most probable response of a bridge structure due to a range of designed loads, can be identified. Even though, many simplified technical approaches are routinely used in the application of theories to practice during design and analysis process of bridges. Moreover, there is usually lack of required time to verify all details. Therefore, a proof-load test is useful in certain circumstances, [1]. The main purpose is not to verify final design of the bridge but also to validate adopted assumptions of the designer. Actual reserves in load-carrying capacity of the new bridge structure can be determined after test evaluation, [2]. Thus, proof-load test supported by finite analysis model might represent the most powerful tool for verification of real behavior of bridges, [3]. The aim of presented research, whose partial results are introduced in this paper, was to verify the actual flexural behavior of a composite steel-concrete bridge.

2 ANALYZED BRIDGE STRUCTURE

The research dealt with a road bridge shown in Fig. 1 built across a highway. The analyzed superstructure was manufactured as a four-span continuous composite steel and concrete structure, [4]. Because of an angular crossover and arch curvatures of side road approaches, theoretical spans of left and right main girders are not equal. The left main girder has spans 17.483 + 31.249 + 28.812 + 24.279 m, while in the case of right girders the corresponding values are 24.489 + 31.156 + 28.848 + 17.684 m, Fig. 1. Moreover, the deck of the bridge follows the vertical arch curvature of the road on the bridge, as well.

The bridge superstructure consists of the reinforced concrete deck composed with the two plate girders of I-section axially 4.0 m spaced. The structural depth of the girders with the basic value 1300 mm in midspan regions is increasing within the 6.5 m long linear haunches on both sides up to 1800 mm above intermediate supports. Webs of the plate girders are 12 mm thick in the span areas and 16 mm thick above supports, respectively. To save material, variable area of both flanges

¹ Ing. Jaroslav Odrobinak, PhD., Department of Structures and Bridges, Faculty of Civil Engineering, University of Zilina, Univerzitna 8215/1, 010 26 Zilina, Slovak Republic, phone: (+421) 41 513 5664, e-mail: jaroslav.odrobinak@fstav.uniza.sk.

proportioned to the longitudinal course of bending moments was used. The top flange acting with the concrete deck is of the constant 350 mm width with the varying thickness from 25 to 50 mm. The bottom flanges of 650 mm width have thickness from 30 mm in the span areas to 40 mm above the piers.



Fig. 1: Overall view on the bridge (top) and top-view on the scheme of superstructure (bottom)

Truss cross-frames consisting of horizontal chords and diagonals made of HEB sections ensure the lateral stability of the plate-girder bridge and help to distribute the vertical loads. As end cross-beams a welded I-section of 1000 mm height was designed. Low-alloy structural carbon steel of grade S355J2 has been used for steel bridge structural elements.

Reinforced concrete of quality C35/45 was used in the slab. The slab is 332 mm thick in the middle part with haunches towards the girders. In the outer parts, thickness of the slab decreases forms the value of 425 mm above the girders to the 207 mm at the ends of side cantilevers.

Shear stud connectors ø19/150 from steel grade S235J2 at the interface between the concrete slab and structural steel should ensure a full composite action.

3 EXPERIMENTAL INVESTIGATION

3.1 Measured values

During testing, the main girder's deflections in each span as well as the bearing settlements were monitored. In addition, the extra experimental investigation using 20 strain gauges was carried out. The strains in two selected cross-sections were observed in the flanges of main girders, in the concrete slab and in the bottom chord of bracings, respectively. The section almost in the middle of the longest (2nd) span was chosen in sagging moment area, just in the point, where the middle intermediate bracing is joined. For monitoring strains in hogging moment area, the same amount of gauges was installed in the bridge's cross-section in distance of 400 mm from theoretical support above the middle pier. The arrangement of strain gauges in cross-section and their denotation are shown in Fig. 2. Several of them are also visible in Fig. 3.



Fig. 2: Cross-section of the bridge and strain gauges



Fig. 3: Real position of several gauges in the "midspan" and "above-pier" cross-section

3.2 Testing load

For the purpose of the test, eight trucks Tatra 815 with the average gross-vehicle weight of 28.0 tons with deviation of $\pm 2.0\%$ were at disposal. Four load positions (load cases) represented by the group of these trucks were considered.

According to Fig. 4, load arrangements LC-1 to LC-3 consisted of the group of 5, 8 or 7 trucks, respectively, and were placed within a span in order to cause the maximum stressing and deflection of the loaded span. Actually, the applied test load represents load efficiency $\eta = 0.75 \sim 0.97$ in deflections and $\eta = 0.70 \sim 0.81$ in bending moments as compared to the values caused by traffic load given in the Eurocode 1.

The last load case LC-P consisted of two groups of four vehicles situated along the bridge axis in the adjacent spans to the middle pier. In the case of support moment above middle pier, the load efficiency of such arrangement is some $\eta = 0.74$.

A correct position of loads was determined on the basis of influence surfaces of the deck investigated on spatial finite element models described in the next chapter.



Fig. 4: Load cases - arrangement of lorries on the bridge



Fig. 5: Photography of load case LC-3 from left side

4 GLOBAL ANALYSIS

In the presented first stage of evaluation of observed data, common FEM-based software was used. A spatial numerical model combining plate and beam elements was chosen. Both the concrete slab and the steel girder were approximated considering variability of thicknesses and heights. Internal truss diaphragms and end cross-girders were considered as the beam elements respecting their characteristics including appropriate eccentricities.

As simplified modeling was the issue, no material nonlinearities were adopted into the analysis. Similarly to the simplified method given in [5], the effect of cracks in concrete was taken into account by neglecting the concrete in some area above the intermediate supports. Four concepts of modeling the concrete slab in the hogging regions were analyzed in the study. In the first one, the invariable flexural stiffness of the composite cross-section along the bridge length was thought (EI _uncracked). The second model allowed for stiffness changes due to concrete cracking in the hogging regions using simplified approach according to [5] (EI_cracked). The last two models

(EI_semi A and EI_semi B) came from an estimation of concrete stiffness somewhere between the borders represented by the "cracked" and the "uncracked" analysis.



Fig. 6: Left half of FEM model of the superstructure and highlighted division of the slab above piers

Thus, if cracks in concrete are taking into account, stiffness *EI* of composite sections should be reduced. In presented simplified models, linear analysis was applied. The stiffness reduction was made by modification of modulus of concrete material $E_{c,model}$ used in the transformation models. In the Fig. 7, the values of slab modulus $E_{c,model}$ introduced into the numerical model are illustrated as percentage of modulus of "uncracked" reinforced concrete slab E_{c+s}

$$E_{c+s} = E_{cm} + \rho \cdot E_s \tag{1}$$

where:

 E_{cm} – is modulus of elasticity of concrete [N/mm²],

 E_s – is modulus of elasticity of reinforcement [N/mm²],

 ρ – represents reinforcement ratio [-].





It should be noticed that flexural behavior of the structure can be influenced by non-structural members of the bridge, as well. For instance, the cornices together with the steel handrails should be implemented into an improved transformation model, as they act as side beams of the concrete slab. The influence of cornices depends on cornices' anchoring system and on concreting system and phases, especially. Particularly in the winter time, some stiffness of the bitumen layers can be considered, as well. Since this article is dedicated to comparing experiment with simplified modeling approach, in our case, we did not consider above mentioned effects.

4 RESULT COMPARISON

Only small part of results is presented in the paper. Anyway, conclusions are based on the critical analysis of many other results, as well.

4.1 Deflections

Comparison of the numerically obtained deformation of the girders with those observed during measurement is shown in Fig. 8. The values valid for mid-span of the second and the third bridge span are confronted. Only three load cases are presented in the Fig. 8. Comparison of girders' deflections indicates that in the case of analyzed bridge, the "uncracked" analysis can provide results close to the measured values. The other models with less concrete stiffness above support produced differences on both sides, with dependence on load position and analyzed span.



Fig. 8: Mid-span deflections in two adjacent middle spans produced by three load cases: results at the 2nd span are on the left-hand side and results at the third span are on the right-hand side

4.1 Strains/stresses

The strain measurements proved the elastic behavior of the composite steel and concrete bridge during testing.

In the next figures, the comparison of stresses in the steel girders expressed from the measured strains with the stresses obtained by means of the numerical calculations is presented. The stresses at left girder (LG) and right girder (RG) are shown through the height of corresponding girder section in the case of two load cases. The stresses calculated from measured strains in the case of track arrangement LC2 are put in Fig. 9, while Fig. 10 shows the values valid for the load case LC-P.

Presented values represent the stresses transformed from the data observed in corresponding gauges at the top or bottom flanges, respectively. In the case of two gauges glued on flanges of the left girder, the average value is given.

Unfortunately, a strain gauge glued to the bottom flange of right girder (the gauge RG-B according to Fig. 3) in the midspan cross-section got out of order during the test. Thus, only one measured point through the girder's height in the midspan can be found in that case in the Fig. 9 or. Fig. 10



Fig. 9: Stresses through the girders height in the steel girders under load case LC-2



Fig. 10: Stresses through the girders height in the steel girders under load case LC-P

Similarly to deflection-based conclusion, it could be again stated that within the four analyzed models, the "uncracked" analysis gave the strain/stress results, which are closest to the observed ones. Analyses of the other three models with reduced stiffness above piers produced higher differences, especially in hogging moment regions.

The observed values of strains at the top of the girder in the intermediate support area indicates that either the concrete cracking has les influence on slab stiffness or the reinforced concrete can transfer more tensile forces than predictions coming from common assumptions of the codes.

4 CONCLUSIONS

The strain measurements proved the possibility of approximating the composite bridge by means of combined plate-beam model providing sufficiently accurate prediction of the superstructure behavior, especially the girders within span areas.

It could be concluded, that among the four analyzed models, the "uncracked" analysis with the constant stiffness of the reinforced bridge slab described the actual behavior of this composite bridge with the best accuracy, in general.

The stresses in the girders above intermediate supports are influenced by effects like concrete cracking, tension stiffening and reinforcement yielding. Allowing for these effects seems to be quite complicated without utilization of nonlinear analysis. A technique given in [6], when additional deformation loads supply effects of cracking in "uncracked" analysis, can be alternatively applied. Probably, next research will focus on this area.

However, in the phase of bridge design it is necessary to ensure the safe determination of the bridge response to action. In that case, the stiffness reduction in the hogging regions due to concrete cracking and tension-stiffening of concrete shell be given by the corresponding codes on conservative side to fulfill the requirement of the safe design of steel girder. Especially, in the case of two-girder bridge concept, when only one girder is loaded, the effect of the stiffness change in the hogging regions over internal supports is more striking, [3].

The presented experimental observations were done in the age of concrete of 50 days. Thus, majority of shrinkage strains had already been preceded. It would be useful to repeat the experimental measurement sometimes in the future, to compare obtained results. After decades, shrinkage effect will already be subsided and most of irreversible strains developed. Particularly, the effect of cracking and development of cracks produced by repeated loads would be also observed.

ACKNOWLEDGMENT

The paper presents results of works supported by the Slovak Research and Development Agency under the contract No. APVV-0106-11 and by the Scientific Grant Agency of the Slovak Republic under the project No. 1/0364/12.

LITERATURE

- ODROBINAK, J. & VICAN, J. Behaviour analysis of composite motorway bridge during proof-load test. In: *Concrete and Concrete Structures*, Proceedings of the 5th International Conference, Zilina. EDIS - University of Zilina 2009, pp. 401-408. ISBN 978-80-554-0100-3.
- [2] CECHAKOVA, V., ROSMANIT, M. & FOJTIK, R. FEM Modeling and Experimental Tests of Timber Bridge Structure. *Procedia Engineering* (Steel Structures and Bridges 2012, Slovakia). Elsevier, 2012, Vol. 40 (2012), pp. 79–84. ISSN 1877-7058.
- [3] ODROBINAK, J., VICAN, J. & BUJNAK, J. Verification of composite steel-concrete bridge behavior. *Procedia Engineering* (Concrete and Concrete Structures 2013, Slovakia). Elsevier, 2013, Vol. 65 (2013), pp. 440-446. ISSN 1877-7058.
- [4] Design documentation general drawings and technical report. SO 207-00- Bridge on highway D1 "Hricovsky Channel" in km. 7.974. Dopravoprojekt Bratislava, a.s., 2008.
- [5] Eurocode 4: EN 1994-2: Design of Composite Steel and Concrete Structures Part 2: General Rules and Rules for Bridges. CEN, Brussels, 2005.
- [6] BUJNAK, J. & ODROBINAK, J. Cracking Of Concrete Deck in Composite Structures. In: *Eurosteel 2005: Research–Eurocodes–Practise*, Proceedings of the 4th International Conference on Steel and Composite Structures, Maastricht. Verlag-Mainz Aachen, 2005, volume B, pp. 4.2-15 – 4.2-22. ISBN 3-86130-812-6.

Reviewers:

Ing. Mikolášek David, Ph.D., Department of Structural Mechanics, Faculty of Civil Engineering, VŠB-Technical University of Ostrava.

Ing. Roman Šafář, Department of Concrete and Masonry Structures, Faculty of Civil Engineering, Czech Technical University in Prague.

číslo 1, rok 2014, ročník XIV, řada stavební

článek č. 07

Marie STARÁ¹, Martina JANULÍKOVÁ²

EXPERIMENTÁLNÍ MĚŘENÍ PŘEDPJATÉHO ZDIVA S POUŽITÍM KLUZNÉ SPÁRY

EXPERIMENTAL MEASUREMENTS OF PRESTRESSED MASONRY WITH USING SLIDING JOINT

Abstrakt

Příspěvek se věnuje experimentálnímu měření deformací v místě lokálního namáhání zdiva od dodatečného předepnutí. Měření jsou prováděna na zděném rohu, který je postaven v laboratorním zařízení. Laboratorní zařízení bylo navrženo a vyrobeno na Stavební fakultě VŠB-TUO v ČR a je určené pro měření trojosé napjatosti zdiva. Do zdiva jsou vloženy dvě předpínací tyče umístěné v různých výškách a upevněny do kotevních desek, které slouží pro přenos předpínacích sil do zdiva. Zděný roh je proveden v poměru ke skutečnosti 1:1. V patě zdiva je vložena asfaltová lepenka. Ta působí ve zdivu jako kluzná spára a zajišťuje snížení smykového napětí v základové spáře zděných popř. betonových konstrukcí. Získané výsledky jsou porovnány s výsledky zdiva bez použití kluzné spáry včetně komentáře vlivu kluzné spáry na předpínání zděných konstrukcí.

Klíčová slova

Experimentální měření, deformace, předpínání, zdivo, kluzná spára.

Abstract

Contribution deals with experimental measurements of deformations in the place exposed to local load caused by additional pre-stressing. The measurements are made at the masonry corner built in the laboratory equipment. The laboratory equipment was designed at Faculty of Civil Engineering VSB – TU Ostrava for measurement tri-axial stress-strain conditions in masonry. In this masonry corner two pre-stressing bars are placed. These bars are in different height and are anchored to the anchor plates, which transfer pre-stressing forces to the masonry. The specimen for laboratory testing is performed in the proportion to the reality of 1:1. In the bottom part masonry is inserted asphalt strip. It operates in the masonry like a sliding joint and reduces the shear stress at interface between concrete and masonry structures. The results are compared with the results of masonry without the use of sliding joints, including comment on the effect of sliding joints on the pre-stressing masonry structures.

Keywords

Experimental measurements, deformations, pre-stressing, masonry, sliding joint.

1 ÚVOD

Metoda snižování smykových napětí v základových spárách aplikací reologické kluzné spáry je účinná a snadno proveditelná v praxi. Kluzné spáry jsou obvykle tvořeny nataveným či volně

¹ Ing. Marie Stará, Katedra konstrukcí, Fakulta stavební, VŠB-Technická univerzita Ostrava, Ludvíka Podéště 1875/17, 708 33 Ostrava-Poruba, tel.: (+420) 596 991 375, e-mail: marie.stara@vsb.cz.

² Ing. Martina Janulíková, Katedra konstrukcí, Fakulta stavební, VŠB-Technická univerzita Ostrava, Ludvíka Podéště 1875/17, 708 33 Ostrava-Poruba, tel.: (+420) 597 321 925, e-mail: martina.janulikova@vsb.cz.

položeným asfaltovým pásem na vyrovnávací betonové vrstvě, případně litým asfaltem či umělohmotnou fólií. Současné metody [1] návrhu kluzných spár jsou s ohledem na stále se vyvíjecí nové materiály již nedostačující a lze je použít pouze pro orientační výpočty. Správnost návrhu reologické kluzné spáry je podmíněna zejména znalostí mechanické odezvy asfaltového pásu při dlouhodobě působícím smykovém zatížení, protože ve většině případů má na konstrukce vliv především dlouhodobé přetváření.

V rámci výzkumu Studentské grantové soutěže VŠB-TU Ostrava je prováděno ověření vhodnosti pro kombinování sanačního opatření pomocí dodatečného předpínání zdiva a současně použití kluzné spáry ve zdivu.

Předpětí ve zdivu můžeme dosáhnout pomocí ocelových lan nebo táhel. Tyto ocelové prvky se vkládají do předem vyfrézovaných drážek, které mohou být při vnějším nebo vnitřním líci zdiva. Konce ocelových prvků se upínají do ocelových úhelníků nebo speciálních kotev. U těchto způsobů rekonstrukce je nutné dodržet postupy a technologie předpínání. Důležité je vhodně zvolit předpínací systém kotev, zvolit vhodné uspořádání a uložení předpínacích kabelů, určení postupu předpínání a stanovení velikosti předpínacích sil v jednotlivých kabelech.

V dostupné literatuře [2~10] můžeme nalézt, na základě provedených experimentů, doporučené hodnoty poměru předpínací síly a pevnosti zdiva v tlaku kolmo a rovnoběžně s ložnou spárou. Konkrétně v literatuře [4;5;6] jsou uvedeny hodnoty, které jsou dosaženy ve svislém řezu horizontálně předpjatého stěnového pásu.

Pro experimentální zkoušky zdiva byly postaveny dva zkušební vzorky. Pro přehlednost jsou označeny jako ZDIVO_1 a ZDIVO_2. Oba vzorky byly postaveny s použitím stejných materiálů, ale měly rozdílnou pevnost malty a tím i výslednou pevnost zdiva jako celku. Vzorek ZDIVO_1 byl postaven bez použití asfaltové lepenky, zatímco zkušební vzorek ZDIVO_2 byl postaven s vloženou asfaltovou lepenkou v patě zdiva, která představovala kluznou spáru ve zdivu. Použitým asfaltovým pásem je oxidovaný asfaltový pás s obchodním názvem IPA V60 S35 viz [11;12].

Předpínací síly v experimentálním měření deformací, popsaném v tomto příspěvku, jsou voleny bezpečně s ohledem na kvalitu vyplnění spár maltou jako 10 až 50 % pevnosti zdiva v tlaku kolmo na ložné spáry, které jsou dosaženy přímo pod kotevní deskou, což odpovídá přibližně 12,5 % napětí dosaženého ve svislém řezu horizontálně předpjatého stěnového pásu. Záměrem tohoto zkoušení, není pouze samotné měření deformací, ale také sledování chování zdiva v místě lokálního namáhání od postupně zvyšujícího se předpětí a v místě kluzné spáry.

2 PRINCIP MĚŘENÍ

2.1 Použitý materiál a jeho materiálové charakteristiky

Zařízení pro zkoušení trojosé napjatosti je ocelová konstrukce o rozměrech 900 x 900 x 1550 mm, která byla navržena a sestavena dle [13]. V této konstrukci je postaven zděný roh o výšce 870 mm. Tloušťka zdi je 440 mm, povrch zdiva byl neomítnutý. Použitými zdícími prvky jsou cihly CP 290x140x65, P15 a jako spojovací materiál byla použita vápenná malta, smíchaná s pískem v poměru 1:4.

Průměrná pevnost cihel v tlaku byla stanovena zkouškou dle normy [14] na hodnotu 12,87 MPa pro oba zkušební vzorky. Z této hodnoty je pak odvozená normalizovaná průměrná pevnost v tlaku zdícího prvku $f_b = 9,9$ MPa. Průměrná pevnost malty v tlaku byla normou [15] stanovena na hodnotu $f_{m,1} = 0,77$ MPa pro vzorek ZDIVO_1 a hodnota $f_{m,2} = 0,351$ MPa pro vzorek ZDIVO_2.

Testovaný zděný roh je uvažován jako část stávající konstrukce a proto při výpočtu charakteristické pevnosti zdiva v tlaku je postupováno podle normy [16] – Hodnocení existujících konstrukcí, která se odkazuje při stanovení pevnostních charakteristik na dříve platné normy, pro zdivo např. na již neplatnou přednormu [17]. Výsledná charakteristická pevnost zdiva v tlaku kolmo k ložným spárám pro vzorek ZDIVO_1 je $f_k = 1,663$ MPa a pro zkoušený vzorek ZDIVO_2 je výsledná pevnost zdiva $f_k = 1,366$ MPa.

V průběhu zdění byly do zdiva vloženy dvě předpínací tyče v různých výškách a spáry byly doplněny maltou, viz obr. 1. Každá předpínací tyč byla označena dle směru, ve kterém byla kladena (směr A, směr B). Výškový rozdíl umístění čidel a předpínacích tyčí u obou zkoušených vzorků zdiva byl v rámci pouze jednoho centimetru, což lze považovat za zanedbatelný rozdíl. Ve směru A byla umístěna ve výšce 390 mm, ve směru B byla umístěna ve výšce 530 mm. Dle výrobce byly předpínací tyče typu HPT 26 z oceli 11 523 o průměru 26 mm, modul pružnosti 185 \pm 10 GPa. Tyče byly hladké bez drážek nebo jiných povrchových úprav. Po konečném vyzdění celého zděného rohu, byla horní část konstrukce vyrovnána vrstvou malty s ocelovou roznášecí deskou o tloušťce 12 mm. Na předpínací tyče se osadily ocelové kotevní desky na vrstvu malty pro vyrovnání povrchu zdiva.

2.2 Zatížení testovaných vzorků

Svislé zatížení bylo vnášeno pomocí hydraulického lisu, který se umístil mezi roznášecí deskou a I profilem přišroubovaným k laboratornímu zařízení. Vzorek byl zatížen svislým zatížením 0,1 MPa. Svislé zatížení bylo stanoveno na základě statického výpočtu rodinného domu v obci Staříč, jež byl z důvodu stávajících trhlin sanován dodatečným předepnutím v úrovni základů a úrovni ŽB věnců 1.pp a 1.np.

Předpínací síla byla vnesena do předpínacích tyčí rovněž pomocí hydraulických lisů přes kotevní desky o rozměrech 300 x 300 mm a tloušťce 10 mm a také kotevních desek 300 x 300 mm s tloušťkou 20 mm, které byly zkoušeny na obou vzorcích zdiva. Hodnoty předpínacích sil jsou uvedeny v tab. 1.

Měřené deformace byly zaznamenávány pomocí potenciometrických čidel upevněných k laboratornímu zařízení, označených dle připojení k měřící stanici. V každém směru bylo upevněno celkem osm čidel, ve směru A čidla s označením M21 až M28 a ve směru B čidla s označením M1 až M8. Rozmístění jednotlivých čidel v obou směrech je patrné na obr. 1.



Obr. 1: Schéma rozmístění měřících čidel ve směru A, ve směru B



Obr. 2: Zkušební vzorek ZDIVO_2, detail kluzné spáry v patě zdiva

Vzorek byl zatěžován postupně předpínací silou o velikosti 10 % až 50 % z pevnosti zdiva v tlaku kolmo na ložné spáry, vždy nejprve ve směru B a poté ve směru A. Na zkušebním vzorku byly provedeny pouze dvě měření a to z důvodu eliminace chyb při měření, která by byla způsobena trvalou deformací vzorku.

V tab. 1 jsou uvedeny vstupní hodnoty zatížení zdiva. V prvním sloupci jsou uvedeny procentuální hodnoty, ve druhém a čtvrtém jsou hodnoty napětí v kotevní oblasti, odvozené z charakteristické pevnosti zdiva v tlaku kolmém na ložné spáry, ve třetím a pátém sloupci jsou uvedeny velikosti předpínacích sil, vnášených do zdiva přes kotevní desku o velikosti 300 x 300 mm. Plocha kotevní desky a také plocha zdiva pod kotevní deskou, se uvažovala bez oslabení otvorem, který byl ponechán pro průchod předpínací tyče, jelikož rozměry otvoru jsou v tomto případě zanedbatelné.

	ZDIVO_1 (j	$f_k = 1,663MPa$)	ZDIVO_2 ($f_k = 1,366MPa$)		
	Napětí [kPa]	Předpínací síla [kN]	Napětí [kPa]	Předpínací síla [kN]	
10 %	166,3	14,97	136,6	12,29	
20 %	332,6	29,93	273,2	24,59	
30 %	498,9	44,90	409,8	36,88	
40 %	665,2	59,87	546,4	49,18	
50 %	831,5	74,84	683,0	61,47	

2.3 Výsledky měření a jejich srovnání

Průběhy výsledných deformací z měření, lze vidět na níže uvedených grafech (obr. 3 a obr. 10). Na x-ové souřadnici jsou uvedeny hodnoty deformací se záporným znaménkem od tlaku kotevní desky na zdivo. Výsledné deformace jsou získané zprůměrováním měření ve svislých řezech M21 ~ M24 a M25 ~ M28 ve směru A, M1 ~ M4 a M5 ~ M8 ve směru B. Na svislé ose jsou uvedeny výškové souřadnice umístění jednotlivých čidel dle obr. 1. Všechna čidla byla umístěna na cihlách popř. kotevních deskách, nikoliv však v maltové spáře. Vodorovná přímka v grafu označuje umístění předpínací síly.

Uvedené obrázky, obou zkušebních vzorků ZDIVO_1 a ZDIVO_2, představují stlačení kotevních desek a jejich okolí. Průběhy deformací kotevních desek s různou tuhostí ukazují, že v případě kotevní desky s tloušťkou 20 mm dochází k vyšším deformacím přímo pod kotevní deskou, ale také v jejím nejbližším okolí než v případě kotevní desky o tloušťce 10 mm. Důvodem chování kotevních desek je vyšší ohybová tuhost kotevních desek s tloušťkou 20 mm. Ohybová tuhost je závislá na tloušťce desky a poměr tuhostí obou použitých desek je 1:8.

Jak je patrné z obr. 3 až obr. 6 tvar deformace zdiva v obou směrech, v místě předpínací tyče, odpovídá koncentraci napětí přímo pod kotevní deskou, zatímco nad a pod úrovní kotevní desky jsou deformace mnohem menší. Průběhy deformací jsou přibližně ve stejných odstupech pro jednotlivé velikosti předpínacích sil, především pak ve směru B.

Ke srovnání hodnot výsledných průběhů, ze zkušebního vzorku ZDIVO_1 s deskou 300 x 300 x 10 mm (obr. 3 a obr. 4), v obou předpínaných směrech, dochází nad hranicí napětí odpovídající 50 % z pevnosti z tlaku kolmo na ložné spáry, která působí přímo pod kotevními deskami. Zatímco v případě vzorku s deskou 300 x 300 x 20 mm (obr. 5 a obr. 6), dochází ke srovnání hodnot výsledných deformací v obou směrech, již při napětí odpovídající 30 % a více z pevnosti z tlaku kolmo na ložné spáry působící přímo pod kotevními deskami.

Na základě uvedených výsledků zkušebního vzorku ZDIVO_1, lze tedy říct, že při použití kotevních desek s vyšší ohybovou tuhostí je zajištěno souměrnější zatížení od předpětí v obou směrech (již při nižších předpínacích silách) než v případě kotevních desek s nižší ohybovou tuhostí. Samozřejmě nesmíme opomenout výškové umístění předpínacích tyčí, velikosti ploch kotevních desek a samozřejmě modul pružnosti malty a cihel, jež mají rozhodující vliv na výsledné průběhy.











Obr. 4: Deformace ZDIVO_1 ve směru B, kotevní deska 300 x 300 x 10 mm





Obr. 7 až obr. 10 tvar deformace zdiva v obou směrech, v místě předpínací tyče, odpovídá koncentraci napětí přímo pod kotevní deskou. Zatímco nad úrovní kotevní desky jsou deformace takřka zanedbatelné, v místě pod kotevní deskou a především v patě zdiva můžeme vidět vliv kluzné spáry na výsledné deformace.

Významně se deformace projevují na obr. 7, kde je použita kotevní deska s nižší tuhostí a umístění předpínací tyče je 340 mm od kluzné spáry. V tomto místě lze vidět posunutí zdiva po asfaltové lepence současně se zvyšující se předpínací silou (shodné hodnoty v patě a v místě předpínací síly).

Při použití desky s větší tloušťkou, viz obr. 9, je pohyb zdiva po kluzné spáře rovněž významný, ale nedochází zde k posunu kotevní desky současně s kluznou spárou. Tyto posuny jsou menší než s deskou o menší tuhosti.

Vliv kluzné spáry zkušebního vzorku ZDIVO_2 na směr B nebyl prakticky žádný. Můžeme tedy říct, že důležité pro kombinování sanačního opatření pomocí předpínání zdiva a použitím kluzné spáry, je především výškové umístění předpínacích tyčí a také tuhost použitého kotevního systému.









3 ZÁVĚR

Příspěvek se věnuje laboratornímu měření předpínaného zděného rohu. Simuluje tak případy zesilování a sanací zděných budov.

Srovnání výsledných deformací s použitím kotevních desek s různou tloušťkou desky, ukázalo rozdílné stlačení zdiva v místě kotevních desek u obou zkušebních vzorků. Tyto rozdíly byly způsobeny rozdílnou ohybovou tuhostí samotných desek a tím i eliminace deformace samotné kotevní desky při zatěžování předpínací silou.

Pro ověření hypotéz je potřeba provést měření předpínání zdiva s použitím desek s větší ohybovou tuhostí než doposud a provést srovnání s již získanými hodnotami, které jsou uvedeny v tomto příspěvku.



Obr. 8: Deformace ZDIVO_2 ve směru B, kotevní deska 300 x 300 x 10 mm



Obr. 10: Deformace ZDIVO_2 ve směru B, kotevní deska 300 x 300 x 20 mm

Výsledné posuny zdiva s použitím kluzných spár se liší v závislosti na použitém materiálu pro kluznou spáru a jejím umístění ve zdivu. Dále také výškovým umístěním předpínacího zařízení a tuhosti použitého kotevního systému. Podrobné měření kluzných spár jsou řešeny v rámci finanční podpory Ministerstva průmyslu a obchodu, program TIP projekt číslo FR-TI2/746 - Reologická kluzná spára s teplotně řízenými viskoelastickými vlastnostmi [18;19;20].

Cílem práce by mělo být využití softwaru, na bázi MKP, pro návrh nebo posouzení sanačních opatření poškozených zděných konstrukcí [21~29].

PODĚKOVÁNÍ

Příspěvek byl realizován za finančního přispění MŠMT, podporou specifického vysokoškolského výzkumu Studentské grantové soutěže VŠB-TU Ostrava pod identifikačním číslem SP2013/39.

LITERATURA

- [1] ČSN 73 0039: Navrhování objektů na poddolovaném území. Praha: ČNI, 1989.
- [2] ČAJKA, R. Strengthening of Historical Structures on Flooded and Undermined Territory. International Geotechnical Engineering, Saint Petersburg. 17-19. September 2003, Russian, ISBN 5-93093-204-2.
- [3] ČAJKA, R. Lifetime Enhancement of Historical Structures on Flooded and Undermined Territory. Integrated Lifetime Engineering of Buildings and Civil Infrastructures, and International Symposium ILCDES 2003. 1-3. December 2003, Kuopio, Finland, ISSN 0356-9403, ISBN 951-758-436-9.
- [4] SCHUBERT, P.; HOFFMANN, G. Druckfestigkeit von Mauerwerk parallel zu den Lagerfugen. *Mauerwerk-Kalender 1994*, Ernst Sohn & Berlin 2004.
- [5] BAŽANT, Z.; KLUSÁČEK, L. Statika při rekonstrukcích objektů. VUT Brno, 2004.
- [6] KLUSÁČEK, L.; BAŽANT, Z. Předpínání staveb ve vztahu k podloží. Sborník příspěvků 13. mezinárodního semináře 2008, Ostrava 2008. VŠB-TU Ostrava 2008, s. 21 – 26. ISBN 978-80-248-1715-6
- [7] KOŠATKA, P.; LORENZ, K.; VAŠKOVÁ, J. Zděné konstrukce 1. ČVUT Praha, 2006
- [8] TERZIJSKI, I.; KLUSÁČEK, L.; BAŽANT, Z. a kol.: Stanovení deformačních charakteristik zdiva. *Stavební obzor 1/2012*, Fakulta stavební ČVUT, Praha, 2012, ISSN 1210-4027
- [9] ŠULÁK, P. Dlouhodobé sledování chování předpjaté konstrukce. Sborník příspěvků 13. mezinárodního semináře 2008, Ostrava 2008. VŠB-TU Ostrava 2008, s. 27 – 33. ISBN 978-80-248-1715-6
- [10] WITZANY, J.; ČEJKA, T.; ZIGLER, R. Stanovení zbytkové únosnosti existujících zděných konstrukcí. *Stavební obzor*. 2008, Číslo 9, Ročník 17. ISSN 1210-4027
- [11] DEHTOCHEMA BITUMAT, s.r.o.: *Technický list pro oxidovaný asfaltový pás IPA V60 S35*, dostupné z www.dehtochema.cz
- [12] DEHTOCHEMA BITUMAT, s.r.o.: *Prohlášení o shodě pro oxidovaný asfaltový pás*, dostupné z www.dehtochema.cz
- [13] MYNARZOVÁ, L. Statická analýza konstrukcí zděných staveb. Disertační práce 2009. VŠB-TU Ostrava 2009. ISBN 978-80-248-2064-4.
- [14] ČSN EN 1052-1: Zkušební metody pro zdivo. Část 1: Stanovení pevnosti v tlaku. Český normalizační institut, 2000.
- [15] ČSN EN 1015-11: Zkušební metody malt pro zdivo. Část 11: Stanovení pevnosti zatvrdlých malt v tahu za ohybu a v tlaku. Český normalizační institut, 2000.
- [16] ČSN ISO 13822 Zásady navrhování konstrukcí Hodnocení existujících konstrukcí. Český normalizační institut, 2005

- [17] ČSN P ENV 1996-1-1: Navrhování zděných konstrukcí. Část 1-1: Obecná pravidla pro pozemní stavby. Pravidla pro vyztužené a nevyztužené zděné konstrukce. Český normalizační institut, 1996.
- [18] ČAJKA, R., BURKOVIČ, K., GŘUNDĚL, V., JANULÍKOVÁ, M., MATEČKOVÁ, P., STARÁ, M.: Temperature dependant slide joints for cracking elimination in concrete foundations. The 7th Central European Congress on Concrete Engineering: Innovative Materials and Technologies for Concrete Structures, ISBN: 978-963-313-036-0
- [19] JANULÍKOVÁ, M., STARÁ, M.: Viscoelastic behavior of asphalt belts at different temperatures in the sliding joint. In Young Scientist 2013, The 5th PhD. Student Conference of Civil Engineering and Architecture, Herl'any, Slovensko, ISBN: 978-80-553-1305-4
- [20] MATEČKOVÁ, P., JANULÍKOVÁ, M., STARÁ, M.: Aplikace reologické kluzné spáry v základové konstrukci na poddolovaném území. 19. Betonářské dny 2012, Kongresové centrum ALDIS, Hradec Králové, 2012, ISBN: 978-80-87158-32-6
- [21] ČAJKA, R.; KALOČOVÁ, L. Modeling and Analysis of Post Tensioned Masonry. *The eleventh International Conference on Civil, Structural and Environmental Engineering Computing.* 18-21. September 2007, St. Julian, Malta 2007, ISBN 978-1-905088-17-1.
- [22] ČAJKA, R.; KALOČOVÁ, L. Progressive approach to the analysis of post-tensioned masonry structures using FEM. In EngOpt 2008 - *International Conference on Engineering Optimization*. Rio de Janeiro 1-5. Juni 2008. Ed. J. Herkovitz, A. Canelas, H. Cortes, M. Aroztequi, 2008. ISBN 978-85-7650-152-7.
- [23] ČAJKA, R.; MATEČKOVÁ, P.; MYNARZOVÁ, L.; STARÁ, M. Analysis of tri-axial stressstrain conditions of pre-stressed masonry corner. In: *Proceedings of 5th International Conference on Reliable Engineering Computing (REC 2012)*, June 2012, Brno, ISBN: 978-80-214-4507-9.
- [24] ČAJKA, R.; MATEČKOVÁ, P.; STARÁ, M.; JANULÍKOVÁ, M. Testing of pre-stressed masonry corner for tri-axial stress-strain analysis, *The 3rd International Symposium on Life-Cycle Civil Engineering* October 2012, Vienna
- [25] HAACH, V. G.; VASCONCELOS, G.; LOURENCO, P. B. Parametrical study of masonry walls subjected to in-plane loading through numerical modeling. Engineering Structures, April 2011, ISSN: 01410296, DOI: 10.1016/j.engstruct.2011.01.015
- [26] MATERNA, A.; BROŽOVSKÝ, J. Constitutive model for two-dimensional modeling of masonry. In proceedings of the Eleventh International Conference on Civil, Structural and Environmental Engineering Computing 2007, Malta 2007.
- [27] STARÁ, M., JANULÍKOVÁ, M.: Laboratory testing of pre-stressed masonry. In Young Scientist 2013, The 5th PhD. Student Conference of Civil Engineering and Architecture, Herl'any, Slovensko, ISBN: 978-80-553-1305-4
- [28] MILANI, G.; LOURENCO, P. B.; TRALLI, A. Homogenized limit analysis of masonry walls, Part II: Structural examples. Computers and Structures. January 2006, ISSN: 00457949, DOI: 10.1016/j.compstruc.2005.09.004
- [29] ZUCCHINI, A.; LOURENCO, P. B. A micro-mechanical model for the homogenization of masonry. International Journal of Solids and Structures. Juni 2002, DOI: 10.1016/S0020-7683(02)00230-5

Oponentní posudek vypracoval:

Prof. Ing. Jaroslav Halvonik, PhD., Katedra betónových konštrukcií a mostov, Stavebná fakulta, STU v Bratislave.

Doc. Ing. Zdeněk Bažant, CSc., Ústav betonových a zděných konstrukcí, Fakulta stavební, VUT v Brně.

Sborník vědeckých prací Vysoké školy báňské - Technické univerzity Ostrava

číslo 1, rok 2014, ročník XIV, řada stavební

článek č. 08

Jiří PETRŮ¹

MOŽNOSTI APLIKACE PŘÍRODNÍHO ZEOLITU JAKO AKTIVNÍ PŘÍMĚSI DO BETONU

THE POSSIBILITIES OF APPLICATION OF NATURAL ZEOLITE AS AN ACTIVE ADMIXTURE IN CONCRETE

Abstrakt

Příspěvek se zabývá studiem možností využití přírodního zeolitu jako částečné náhrady portlandského cementu v betonech v množstvích 3, 5 a 10 %. Výsledné stanovené hodnoty základních fyzikálně mechanických vlastností (pevnost, mrazuvzdornost a odolnost proti působení vody a chemických rozmrazovacích látek) jsou následně podrobeny porovnání s referenčními směsmi betonu bez této částečné náhrady portlandského cementu alternativním pojivem na bázi přírodního zeolitu.

Klíčová slova

Beton, přírodní zeolit, portlandský cement, pucolánové příměsi, mrazuvzdornost.

Abstract

The paper deals with the possibility of using natural zeolite as a partial replacement for the standard Portland cement in concrete at amounts 3, 5 and 10 %. The resulting set values of basic physical and mechanical properties (strength, frost resistance and resistance to water and chemical de-icing salts) are subsequently compared with reference concrete mixtures without the partial replacement Portland cement of alternative binder based on natural zeolite.

Keywords

Concrete, Natural zeolite, Portland cement, Pozzolanic admixtures, Frost resistance.

1 ÚVOD

Otázka ochrany životního prostředí při výrobě stavebních hmot získává v posledních letech na stále větší důležitosti. K minimalizaci možných vlivů průmyslu na okolí lze výrazně přispět rozsáhlejším využíváním pucolánových příměsí s hydraulickými vlastnostmi. Mezi základní příměsi patří tufy, zeolity, pemzy, diatomitové zeminy, spongility, pálené jíly, cihelný prach, metakaoliny, elektrárenské popílky, vysokopecní granulované strusky aj. I přes tuto skutečnost jsou ve stavebnictví stále nejvíce používána tradiční pojiva na bázi portlandského slínku, které značným způsobem zatěžují životní prostředí, a to nejen uvolňováním velkého množství oxidu uhličitého do ovzduší při výpalu slínku, ale také energetickou náročností výroby. V posledních době se řada autorů [3, 4]. zabývala aplikací přírodního zeolitu jako aktivní příměsi do betonu v množství cca 10 až 60 % hm. Dalšími aplikacemi zeolitů se zabývají autoři [5, 6, 7, 8]. Předmětem tohoto příspěvku je studium možností využití přírodního zeolitu jako částečné náhrady klasického portlandského cementu v betonech v množstvích 3, 5 a 10 % hm. Výsledné stanovené hodnoty základních fyzikálně

¹ Ing. Jiří Petrů, Katedra stavebních hmot a diagnostiky staveb, Fakulta stavební, VŠB-Technická univerzita Ostrava, Ludvíka Podéště 1875/17, 708 33 Ostrava-Poruba, tel.: (+420) 608 920 718, e-mail: jiri.petru@vsb.cz.

mechanických a trvanlivostních vlastností jsou následně podrobeny porovnání s referenčními směsmi betonu bez této částečné náhrady portlandského cementu alternativním pojivem.

2 VSTUPNÍ MATERIÁLY

Jako vstupní suroviny experimentální části byly použity portlandský cement CEM I 42,5 R, přírodní zeolit ZeoBau 200 z lokality Nižný Hrabovec. Dále bylo použito těžené kamenivo frakce 0-4 z lokality Tovačov a drcené kamenivo frakcí 4-8 a 8-16 z lokality Hrabůvka. Jako přísady byly aplikovány superplastifikační přísada GLENIUM SKY 665 na bázi polykarboxyláteteru a provzdušňující bezchloridová přísada MICRO-AIR 103. Receptury jednotlivých směsí jsou uvedeny v Tab. 1.

Při výrobě a ošetřování zkušebních těles bylo postupováno dle ČSN EN 12390-2 [13] a ČSN EN 12390-1 [14]. Pro výrobu – míchání betonových směsí byla použita laboratorní míchačka Jager – Record. Hutnění betonových směsí ve formách bylo provedeno na vibračním stole. Zkušební tělesa byla odformována po 24 hodinách tuhnutí a tvrdnutí s následným uložením ve vodní lázni.

	Množství suroviny kg/m ³							
Směs	Cement CEM I 42,5 R [kg]	Zeolit ZeoBau 0-200 μm [kg]	Kamenivo (těžené , Tovačov) frakce 0-4 [kg]	Kamenivo (drcené, Hrabůvka) frakce 4-8 [kg]	Kamenivo (drcené, Hrabůvka) frakce 8-16 [kg]	Voda [kg]	Superplastifikační přísada GLENIUM SKY 665 [kg]	Provzdušňující přísada MICRO–AIR 103 [kg]
Referenční směs (obsah Zeolitu 0 %)	346,00	0,00	947,00	338,00	405,00	190,00	2,42	1,04
Směs ZB3 (obsah Zeolitu 3 %)	335,62	10,38	947,00	338,00	405,00	190,00	2,42	1,04
Směs BZ5 (Obsah Zeolitu 5 %)	328,70	17,30	947,00	338,00	405,00	190,00	2,42	1,04
Směs BZ10 (obsah Zeolitu 10 %)	311,40	34,60	947,00	338,00	405,00	190,00	2,42	1,04

Tab. 1: Receptury jednotlivých směsí

2.1 Struktura, složení a vlastnosti zeolitů

Zeolity patří do skupinu tektosilikátů. Obdobně jako všechny tektosilikáty mají zeolity trojrozměrnou vazbu tetraedrů křemíku a hliníku, jež jsou navzájem propojené sdílením vrcholových kyslíků. Zeolity patří mezi nestechiometrické sloučeniny obsahující zpravidla 60 až 70 % oxidu křemičitého, 10 až 15 % oxidu hlinitého, menší množství oxidu vápenatého a jako typickou složku oxid sodný a draselný. Hliník je ve struktuře obsažen ve formě čtyřstěnů stejně jako křemík, který jím tak může být nahrazen, ale vzhledem k oxidačnímu stupni hliníku (III) je nezbytná přítomnost alkalického kovu, příp. jiného kationtu, kompenzujícího záporný náboj Al-tetraedrů. Kationty se tak mohou vzájemně zastupovat, což tvoří základ iontovýměnných vlastností zeolitů. Otevřená struktura zeolitů obsahuje četné kanálky a dutiny, které mohou zaujímat až 40 % celkového objemu a v nichž

je reversibilně vázána voda. Tato vlastnost - vodní kapilární kapacita ovlivňuje příznivě homogenitu a konzistenci čerstvých betonových směsí a současně také průběh hydratace. Zeolity je možné taktéž připravit (dle požadované struktury a složení) synteticky z některých přírodních nebo průmyslových aluminosilikátů působením roztoku hydroxidu sodného a draselného, nejčastěji hydrotermálním způsobem v autoklávech. Je možné také připravit zeolity o požadovaném poloměru pórů - tzv. molekulová síta, která nacházejí nezastupitelné uplatnění v celé řadě průmyslových oborů. Principy syntézy zeolitů za teplot pod 100 °C mohou být užitečné i pro přípravu různých kompozitů, včetně bezcementových, např. z průmyslových aluminosilikátů (pucolánů), kde přispívají k užitným vlastnostem ztvrdlého kompozitu. [1, 2]

3 PEVNOSTNÍ VLASTNOSTI

3.1 Stanovení pevnosti v prostém tlaku (krychelná, válcová)

Ověření pevností bylo stanoveno dle ČSN EN 12390-3 [9] po 3, 9, 28 a 90 dnech tuhnutí a tvrdnutí. Zkoušky byly prováděny vždy na třech tělesech z každé receptury (betonových krychlích o rozměrech 150×150×150 mm a betonových válcích o rozměrech 150×300mm). Pevnosti byly stanoveny na zkušebním lisu FORM+TEST Alpha 2-4000.



Obr. 1: Stanovení pevnosti v prostém tlaku na krychlových a válcových vzorcích

Hodnoty pevností v prostém tlaku po 28 dnech stanovených na krychli v případě referenčních směsí dosahují 31,18 MPa. Hodnoty pevností u modifikovaných směsí se pohybují v rozmezí od 29,91 MPa (u směsi s obsahem 3 % zeolitu), přes 33,29 MPa (u směsi s obsahem 10% zeolitu) až po 35,51 MPa u směsi s obsahem 5 % zeolitu. Nejvyšší hodnoty pevnosti v prostém tlaku stanovené na krychli po 28 dnech tuhnutí a tvrdnutí dosáhla směs s obsahem 5 % zeolitu (35,51 MPa). Naopak

nejnižší hodnota pevnosti byla stanovena u směsi s obsahem 3 % zeolitu. V případě dalších stanovených pevností po 90 dnech tuhnutí a tvrdnutí dochází k nárůstu hodnot pevností, pravděpodobně v důsledku stále probíhající pucolánové reakce. U referenční směsi se jedná o nárůst oproti pevnostem po 28 dnech téměř o 11 %, u směsí s obsahem zeolitu 3 % pak o 14 %, u směsí s obsahem zeolitu 5 % o 10 % a u směsí s obsahem zeolitu 10 % pak o nárůst pevnosti o 10 %. Největší nárůst oproti pevnostem stanovených po 28 dnech byl zaznamenán u směsi s 3 % zeolitu, téměř o 14%. Výsledky stanovení pevností v prostém tlaku na krychlových vzorcích jsou uvedeny v Tab. 2 a na Obr. 1.

U pevností v prostém tlaku stanovených na válcových vzorcích se jeví situace obdobně, tzn., nejvyšší hodnoty pevnosti bylo dosaženo u směsi s obsahem zeolitu 5 % (35,09 MPa). Naopak nejnižší hodnoty bylo dosaženo u směsi s 3 % zeolitu. Referenční směs dosáhla pevnosti 27,89 MPa. U pevnosti po 90 dnech byl pozorován stejný efekt nárůstu pevností jako v případě pevností stanovovaných na krychlových vzorcích. Největší nárůst oproti pevnostem stanovených po 28 dnech byl zaznamenán u směsi s 3 % zeolitu a to téměř 15 %. Nejnižší hodnota 3 % byla pozorována u směsi s 5 % obsahu zeolitu. U směsi s 10 % zeolitu došlo naopak k poklesu pevnosti a to o 6 %. Výsledky stanovení pevností v prostém tlaku na válcových vzorcích jsou uvedeny v Tab. 2 a graficky znázorněny na Obr. 1.

3.2 Stanovení pevnosti v tahu ohybem

Zkouška byla prováděna dle ČSN EN 12390-5 [10]. Zkouška probíhala na třech trámcích z každé receptury o rozměru 100×100×400 mm po 3, 9, 28 a 90 dnech tuhnutí a tvrdnutí pomocí laboratorního lisu. Hodnoty pevností po 28 dnech stanovených na trámci v případě referenčních směsí dosahují 6,24 MPa. Hodnoty pevností u modifikovaných směsí se pohybují v rozmezí od 5,99 MPa (u směsi s 3 % zeolitu), přes 5,97 MPa (u směsi s 5 % zeolitu) až po 6,26 MPa u směsi s 10 % zeolitu. Nejvyšší hodnoty pevnosti v tahu ohybem stanovené na trámci po 28 dnech tuhnutí a tvrdnutí dosáhla směs s obsahem 10 % zeolitu. U pevnosti po 90 dnech byl pozorován stejný efekt nárůstu pevností jako v případě pevností v prostém tlaku stanovovaných na krychlových a válcových vzorcích. U referenční směsi se jedná o nárůst oproti pevnostem po 28 dnech téměř o 9 %, u směsí s obsahem zeolitu 3 % pak o 14 %, u směsí s obsahem zeolitu 5 % o 8 % a u směsí s obsahem zeolitu 10 % pak o nárůst pevnosti 4 %. Největší nárůst oproti pevnostem stanovených po 28 dnech byl zaznamenán u směsi s 3 % zeolitu téměř o 14%. Výsledky stanovení pevností v tahu ohybem jsou uvedeny v Tab. 2 a na Obr. 2.

Dny		3 dny		9 dnů		28 dnů			90 dnů			
Vzorek	Pevnost v prostém tlaku krychlená [MPa]	Pevnost v prostém tlaku válcová [MPa]	Pevnost v tahu ohybem [MPa]	Pevnost v prostém tlaku krychlená [MPa]	Pevnost v prostém tlaku válcová [MPa]	Pevnost v tahu ohybem [MPa]	Pevnost v prostém tlaku krychlená [MPa]	Pevnost v prostém tlaku válcová [MPa]	Pevnost v tahu ohybem [MPa]	Pevnost v prostém tlaku krychlená [MPa]	Pevnost v prostém tlaku válcová [MPa]	Pevnost v tahu ohybem [MPa]
RB	17,14	16,99	4,68	28,51	21,56	5,78	31,18	27,89	6,24	34,75	31,10	6,79
ZB3	16,90	15,70	5,51	28,28	21,68	6,08	29,71	21,68	5,99	33,81	31,61	6,81
BZ5	18,86	15,98	4,27	30,05	24,84	5,91	35,51	24,84	5,97	38,93	36,00	6,45
ZB10	17,76	16,66	4,28	31,75	23,25	6,01	33,29	23,25	6,26	36,84	27,35	6,52

Tab. 2: Stanovení pevnostních vlastností jednotlivých směsí po příslušném počtu dní tvrdnutí





Obr. 3: Odolnost proti působení CHRL

4 ODOLNOST PROTI PŮSOBENÍ VODY A CHEMICKÝCH ROZMRAZOVACÍCH LÁTEK (CHRL)

Stanovení bylo provedeno dle ČSN 731326 [11] vždy na třech krychlových vzorcích o rozměrech 150×150×150 mm z každé receptury s využitím laboratorního zmrazovacího boxu KD 20-T4.1. Maximální hodnota plošného odpadu byla dle [11] stanovena na 1 000 g.m⁻² po 100 zmrazovacích cyklech. Nejnižší množství plošného odpadu vykazoval po provedení zkoušky materiál s obsahem 10% zeolitu - 607,4 g.m⁻² (stupeň porušení dle [11] 3). Naopak nejvyšší hodnoty odpadu byly zjištěny u referenčních těles, v případě 100 zmrazovacích cyklů až 10235,6 g.m⁻² (stupeň porušení dle [11] 5). Lepších výsledků bylo dosaženo u směsí s 5 % obsahu zeolitu - 2657,8 g.m⁻² (stupeň porušení dle [11] 4) u 3% obsahu zeolitu ve směsi.

Směs	Odpad po 25 cyklech [g.m ⁻²]	Odpad po 50 cyklech [g.m ⁻²]	Odpad po 75 cyklech [g.m ⁻²]	Odpad po 100 cyklech [g.m ⁻²]	
RB Ref. směs (Zeolit 0 %)	2040,0	4982,2	7811,9	10235,6	
ZB3 (Zeolit 3 %)	677,0	1577,8	2065,2	2401,5	
BZ5 (Zeolit 5 %)	493,3	1524,4	2194,1	2657,8	
ZB10 (Zeolit10 %)	91,9	213,3	394,1	607,4	

Tab. 3: Odolnost proti působení vody a chemickým rozmrazovacím látkám

Podmínce odolnosti proti působení vody a chemických rozmrazovacích látek tedy vyhověla pouze směs s 10 % zeolitu. Ostatní směsi včetně směsi referenční byly klasifikovány jako nevyhovující. Výsledky stanovení včetně časového průběhu dle jednotlivých zmrazovacích cyklů odolností proti působení vody a chemických rozmrazovacích látek jsou uvedeny v Tab. 3 a na Obr. 3.

5 STANOVENÍ MRAZUVZDORNOSTI

Stanovení bylo provedeno dle metodiky ČSN 731322 [11] na normových tělesech - trámcích o rozměrech $100 \times 100 \times 400$ mm s využitím laboratorního zmrazovacího boxu KD 20-T4.1. Následně po provedení příslušného počtu zmrazovacích cyklů (100 a 50) byly stanoveny z jednotlivých poměrů pevností v prostém tlaku a v tahu ohybem příslušné koeficienty mrazuvzdornosti. Koeficient mrazuvzdornosti *KM* v prostém tlaku po 50 a 100 cyklech a koeficient mrazuvzdornosti *KM* v tahu ohybem po 50 a 100 cyklech. Limitní normovou hodnotou pro určení, zda je materiál mrazuvzdorný či ne je hodnota koeficientu mrazuvzdornosti v prostém tlaku a tahu ohybem 0,75. V případě stanovení mrazuvzdornosti po 50 zmrazovacích cyklech byla vyhodnocena jako mrazuvzdorná pouze směs referenční. Ostatní směsi, tj. s obsahem 3 %, 5 % a 10 % zeolitu byly vyhodnoceny jako nevyhovující podmínce mrazuvzdornosti. Výsledky stanovení viz Tab. 4.

V případě stanovení mrazuvzdornosti po 100 zmrazovacích cyklech byly vyhodnoceny jako mrazuvzdorná směs referenční a směs s obsahem 3 % zeolitu. Ostatní směsi, tj. s obsahem 5 % a 10 % zeolitu byly vyhodnoceny jako nevyhovující podmínce mrazuvzdornosti. Výsledky stanovení jsou uvedeny v Tab. 5.

50 cyklů	Koeficient mrazuvzdornosti v prostém tlaku <i>KM</i> [-]	Koeficient mrazuvzdornosti v tahu ohybem <i>KM</i> [-]		
RB Ref. směs (Zeolit 0 %)	0,92	0,99		
ZB3 (Zeolit 3 %)	0,67	0,99		
BZ5 (Zeolit 5 %)	0,58	0,96		
ZB10 (Zeolit10 %)	0,51	0,93		

Tab. 4: Koeficient mrazuvzdornosti v prostém tlaku a v tahu ohybem po 50 cyklech

Tab. 5: Koeficient mrazuvzdornosti v prostém tlaku a v tahu ohybem po 100 cyklech

100 cyklů	Koeficient mrazuvzdornosti v prostém tlaku <i>KM</i> [-]	Koeficient mrazuvzdornosti v tahu ohybem <i>KM</i> [-]		
RB Ref. směs (Zeolit 0 %)	0,99	0,98		
ZB3 (Zeolit 3 %)	0,99	0,95		
BZ5 (Zeolit 5 %)	0,58	0,98		
ZB10 (Zeolit10 %)	0,51	0,99		

6 ZÁVĚR

Výsledky experimentálních zkoušek směsi betonu s přírodním zeolitem ZeoBau (2 %, 5 % a 10 %) jako částečné náhrady portlandského cementu lze shrnout do následujících bodů:

 Nejvyšších hodnot pevnosti v prostém tlaku stanoveném na krychlových vzorcích po 28 dnech dosáhla směs s obsahem 5 % zeolitu. Naopak nejnižších hodnot pevností bylo dosaženo u směsi s 3 % zeolitu. U pevností v prostém tlaku stanovených na válcových vzorcích bylo nejvyšších hodnot dosaženo u směsí s obsahem 5% zeolitu. Naopak nejnižších hodnot bylo dosaženo u směsi s 3 % zeolitu. Nejvyšších hodnot pevnosti v tahu ohybem stanovených na trámci po 28 dnech tuhnutí a tvrdnutí dosáhla směs s obsahem 10 % zeolitu. V případě 90ti denních pevností byl pozorován jev, kdy zřejmě díky dále probíhajícím pucolánovým reakcím dochází k dalšímu nárůstu pevností. Nejvýznamnější nárůst pevností v prostém tlaku a tahu ohybem oproti pevnostem stanovených po 28 dnech byl zaznamenán u směsi s 3 % zeolitu – o 14 -15 %. Ze stanovených výsledků můžeme tedy konstatovat, že přídavek přírodního zeolitu v uvedených množstvích má za následek částečné zlepšení pevnostních vlastností.

- 2. V případě stanovení mrazuvzdornosti po 50 zmrazovacích cyklech byla vyhodnocena jako mrazuvzdorná pouze směs referenční (KM v prostém tlaku 0,92 a KM v tahu ohybem 0,99). U 100 zmrazovacích cyklů se dá klasifikovat jako mrazuvzdorná směs referenční (KM v prostém tlaku 0.99 a KM v tahu ohvbem 0.98) a směs s 3 % zeolitu (KM v prostém tlaku 0,99 a KM v tahu ohybem 0,95). Poměrně vysokou hodnotu koeficientu mrazuvzdornosti v prostém tlaku po 100 cyklech KM 0.99 u směsi s 3 % zeolitu můžeme označit jako jistou anomálii vzhledem k ostatním výsledkům stanovení koeficientů mrazuvzdornosti. Vzhledem k tomu, že výsledky byly stanoveny na příslušných sadách zkušebních těles dle metodiky [12] není možné provedení ověření této hodnoty opakováním této zkoušky na identických vzorcích (ověření by pravděpodobně potvrdilo, že se v tomto případě jedná o anomálii). U hodnot koeficientů mrazuvzdornosti KM v tahu ohybem po 50 a 100 zmrazovacích cyklech je zajímavým poznatkem skutečnost, že postupné zvyšování množství obsahu zeolitu (3 %, 5 % a 10 %) má na hodnotu koeficientu mrazuvzdornosti v tahu ohybem minimální vliv. K výsledkům stanovení koeficientu mrazuvzdornosti KM v prostém tlaku po 50 a 100 zmrazovacích cyklech dá konstatovat, že s postupným zvyšováním množství zeolitu ve směsích dochází ke snižování hodnoty koeficientu mrazuvzdornosti a tím pádem k tomu, že u výsledného materiálu dochází ke snížení odolnosti vůči mrazu. Do budoucna je nutné zaměření se na ověření vlastností hodnot koeficientu mrazuvzdornosti KM v prostém tlaku a tahu ohybem u daných směsí.
- 3. Při zkoušce odolnosti proti působení vody a chemických rozmrazovacích látek bylo nejnižšího množství plošného odpadu dosaženo u směsi s 10 % zeolitu a to 607,4 g.m⁻². Naopak nejvyšší hodnoty odpadu byly zjištěny u referenční směsi (10 235,6 g.m⁻²). Podmínce odolnosti proti působení vody a chemických rozmrazovacích látek tedy vyhověla pouze směs s 10 % zeolitu. Ostatní směsi včetně směsi referenční byly klasifikovány jako nevyhovující. Obecně můžeme k výsledkům stanovení odolnosti proti působení vody a chemických rozmrazovacích látek konstatovat, že zvýšení obsahu zeolitu v uvedených množstvích ve směsích má za následek snížení hodnoty plošného odpadu a tím pádem tedy výrazné zvýšení odolnosti daného materiálu proti působení vody a chemických rozmrazovacích látek.

Po shrnutí výsledků můžeme dojít k závěru, že jako jedna z nejvhodnějších hmotnostních kombinací částečné náhrady portlandského cementu se jeví varianta s obsahem 3-5 % přírodního zeolitu. Na základě prezentovaných výsledků můžeme konstatovat, že přírodní zeolit má dobrý potenciál využití jako částečné náhrady portlandského cementu při výrobě betonu, ovšem vyskytuje se celá řada limitujících faktorů, na které je nutné se do budoucna zaměřit.

LITERATURA

- [1] BRANDŠTETR Jiří, HAVLICA Jaromír. Zeolity v maltách a betonech. *Materiály a technologie pro stavbu*. 2000, č. 6, s. 48-50. ISSN: 1211 0787.
- [2] TSCHERNICH, Rudy W. Zeolites of the World. Phoenix, Arisona: Geoscience Press, 1992. ISBN: 0945005070.
- [3] KULOVANÁ Tereza, VEJMELKOVÁ Eva, KOŇÁKOVÁ Dana, ŽUMÁR Jaromír, KEPPERT Martin, ČERNÝ Robert a ŠEDLMAJER Martin. Přírodní zeolit jako aktivní příměs do betonu. *Stavební obzor*. 2013, roč. 2013, č. 9, s. 230-234. ISSN: 1210-4027.

- [4] KULOVANÁ, Tereza, VEJMELKOVÁ Eva, KEPPERT Martin, ČERNÝ Robert, ŠEDLMAJER Martin a ROVNANÍKOVÁ Pavla. Experimentální analýza vlastností vysokohodnotného betonu s přírodním zeolitem. *Stavební obzor*. 2013, roč. 2013, č. 1, s. 10-12. ISSN: 1210-4027.
- [5] BAŞYIĞIT Celalettin. The effect of zeolit rate on the thermo-mechanical properties of concrete. *International Journal of Physical Sciences*, vol. 5, no. 7, 2010, pp. 968-971. ISSN: 1992-1950.
- [6] VALIPOUR, Mahdi, PARGAR Farhad, SHEKARCHI Mohammad and KHANI Sara. Comparing a natural pozzolan, zeolite, to metakaolin and silica fume in terms of their effect on the durability characteristics of concrete: A laboratory study. *Construction and Building Materials*, vol. 41, April 2013, pp. 879-888, ISSN 0950-0618.
- [7] NAJIMI, Meysam, SOBHANI Jafar, AHMADI Babak and SHEKARCHI Mohammad. An experimental study on durability properties of concrete containing zeolite as a highly reactive natural pozzolan. *Construction and Building Materials*, vol. 35, October 2012, pp. 1023-1033, ISSN 0950-0618.
- [8] IKOTUN, B. D., EKOLU S. Strength and durability effect of modified zeolite additive on concrete properties, *Construction and Building Materials*, Volume 24, Issue 5, May 2010, pp. 749-757, ISSN 0950-0618.
- [9] ČSN EN 12390-3. Zkoušení ztvrdlého betonu Část 3: Pevnost v tlaku zkušebních těles. Praha: Úřad pro technickou normalizaci, metrologii a státní zkušebnictví, 2009.
- [10] ČSN EN 12390-5. Zkoušení ztvrdlého betonu Část 5: Pevnost v tahu ohybem zkoušených těles. Praha: Úřad pro technickou normalizaci, metrologii a státní zkušebnictví, 2009.
- [11] ČSN 731326. Stanovení odolnosti povrchu cementového betonu proti působení vody a chemických rozmrazovacích látek. Praha: Český normalizační institut, 2003.
- [12] ČSN 731322. Stanovení mrazuvzdornosti betonu. Praha: Český normalizační institut, 2003.
- [13] ČSN EN 12390-2. Zkoušení ztvrdlého betonu Část 2: Výroba a ošetřování zkušebních těles pro zkoušky pevnosti. Praha: Úřad pro technickou normalizaci, metrologii a státní zkušebnictví, 2009.
- [14] ČSN EN 12390-1. Zkoušení ztvrdlého betonu Část 1: Tvar, rozměry a jiné požadavky na zkušební tělesa a formy. Praha: Úřad pro technickou normalizaci, metrologii a státní zkušebnictví, 2013.

Oponentní posudek vypracoval:

Prof. Ing. Stanislav Unčík, PhD., Katedra materiálového inžinierstva, Stavebná fakulta, STU v Bratislave.

Doc. Ing. Tomáš Klečka, CSc., Oddělení stavebních materiálů, Kloknerův ústav, ČVUT v Praze.

Sborník vědeckých prací Vysoké školy báňské - Technické univerzity Ostrava

číslo 1, rok 2014, ročník XIV, řada stavební

článek č. 09

Ľuboš DANIEL¹, Ján KORTIŠ²

NUMERICKÉ MODELOVANIE INTERAKCIE VOZIDLA A MOSTNEJ KONŠTRUKCII

THE NUMERICAL MODELING OF INTERACTION VEHICLE AND BRIDGE

Abstrakt

Dynamická interakcia vozidlo – most predstavuje aktuálnu problematiku, ktorej sa venujú ľudia na viacerých pracoviskách. Pre riešenie takejto úlohy sa využívajú hlavne numerické metódy. Najznámejšou a najpoužívanejšou z nich je metóda konečných prvkov. Článok sa zaoberá numerickým modelovaním interakcie vozidlo – most v systéme ANSYS a zobrazuje vplyv rýchlosti vozidla na priehyb mosta v strede rozpätia.

Klíčová slova

ANSYS, metóda konečných prvkov, kmitanie, dynamická analýza, náhodný profil.

Abstract

Vehicle – bridge dynamic interaction represents the actual problem which is solved on many work places. Within the solution of the task the numerical methods are applied mainly. The Finite Element Method is the best-known and widely used. The submitted article is dedicated to the numerical modeling oh vehicle – bridge interaction problem in the environment of the system ANSYS and illustrates the influence of the speed of vehicle motion on the bridge mid-span deflection.

Keywords

ANSYS, finite element method, vibration, dynamic analysis, random profile.

1 ÚVOD

Súčasný vývoj v danej problematike je zameraný hlavne na interakciu koľajových vozidiel a železničných mostov pri ktorých je dynamický účinok výrazne vyšší ako pri cestných mostoch [7]. Pri analýze interakcie mostov pozemných komunikácií a vozidiel sa vo väčšine aplikujú podobné princípy výpočtov. Dôležitou súčasťou riešenia problému je správna voľba výpočtových modelov vozidiel, ich matematický popis a následné riešenie v sústave s mostnou konštrukciou. Často sa používajú tzv. štvrtinové alebo polovičné výpočtové modelom vozidiel majú výhodu značného zjednodušenia, ale nie je možné pomocou nich riešiť vplyv priestorového kmitania vozidla. Výpočtové modely vozidiel sa kvôli zjednodušeniu matematického riešenia zostavujú ako diskrétne výpočtové modely s konečným počtom stupňov voľnosti. Pohybové rovnice potom prechádzajú do tvaru obyčajných diferenciálnych rovníc.

Článok sa zaoberá tvorbou výpočtových modelov vozidla, mosta a ich vzájomnej interakcie v programovom systéme ANSYS pracujúceho na báze MKP. Vozidlo je v tomto prípade modelované

¹ Ing. Ľuboš Daniel, Katedra stavebnej mechaniky, Stavebná fakulta, Žilinská univerzita v Žiline, Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina, e-mail: lubos.daniel@fstav.uniza.sk.

² Ing. Ján Kortiš, Ph.D., Katedra stavebnej mechaniky, Stavebná fakulta, Žilinská univerzita v Žiline, Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina, e-mail: jan.kortis@fstav.uniza.sk.

ako štvrtinový model tvorený pomocou pružinových prvkov s predpísanými tuhostnými a tlmiacimi vlastnosťami a prvkov charakterizujúcich koncentrovanú hmotu v uzloch. Model mostnej konštrukcie je tvorený rovinnými nosníkovými prvkami. Samotná interakcia vozidlo – most je zabezpečená pomocou kontaktných prvkov s využitím kontaktu typu node to surface.

Predkladaná úloha patrí medzi nestacionárny pevnostný (dynamický) dej, ktorý opisuje všeobecná pohybová diferenciálna rovnica.

$$[M].\{\dot{u}(t)\}+[C].\{\dot{u}(t)\}+[K].\{u(t)\}=\{F(t)\}$$
(1.1)

Kde matica **M** predstavuje maticu hmotnosti, matica **K** maticu tuhosti a matica **C** maticu útlmu systému. Ako neznáma veličina v rovnici figuruje vektor posunov **u** a jeho derivácie. Jednou z možností riešenia tejto rovnice v systéme ANSYS je využitie implicitnej Newmarkovej metódy. Jedná sa o metódu priamej integrácie, kde numericky integrujeme diferenciálnu rovnicu po určitých časových krokoch Δt vo zvolenom časovom intervale (t, t_{max}). Z toho vyplýva, že ku geometrickej diskretizácii pribúda ešte aj časová. Výsledkom sú, tak ako pri statickej úlohe MKP, funkčné hodnoty vo vybraných geometrických bodoch a nie samotné funkcie. Navyše funkčné hodnoty sú riešené ešte aj v časových krokoch. Pri Newmarkovej metóde sa zavádzajú nasledovné predpoklady pre závislosť vyšetrovaných veličín v časovom kroku.

$$\{\dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}\} = \{\dot{\mathbf{u}}_{t}\} + \left[(1-\delta).\{\ddot{\mathbf{u}}_{t}\} + \delta.\{\ddot{\mathbf{u}}_{t+Dt}\}\right] \Delta t$$

$$\{\mathbf{u}_{t+\Delta t}\} = \{\mathbf{u}_{t}\} + \{\dot{\mathbf{u}}_{t}.\Delta t\} + \left[(1/2-\alpha).\{\ddot{\mathbf{u}}_{t}\} + \alpha.\{\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}\}\right] \Delta t^{2}$$

$$(1.2)$$

2 OPIS VÝPOČTOVÉHO MODELU VOZIDLA

Použitý štvrtinový výpočtový model vozidla simuluje svojimi charakteristikami ťažké nákladné vozidlo T815 (Obr. 2.1). Pružiace prvky vozidla sa uvažujú lineárne pružné. Útlm spojovacích členov je úmerný rýchlosti (viskózny útlm). Popis kmitania vozidla budeme riešiť numericky, v rámci algoritmov metódy konečných prvkov.



Obr. 2.1: Vozidlo T815 modelované ako štvrtinový model

Model využívaný pri analýze v systéme ANSYS je zobrazený na *Obr. 2.2.* Je tvorený pomocou troch uzlov a štyroch prvkov. Hmoty sú modelované pomocou prvkov MASS21 a sú predpísané v uzloch číslo 2 a 3. V uzle číslo 1 je definovaný uzlový kontaktný prvok. Uzly sú vzájomne spojené pomocou prvkov COMBIN14 s predpísanými tuhostnými a tlmiacimi charakteristikami. Možnosti prvkov sú spracované v [1].


Diagonálna matica hmotnosti vozidla $\{\mathbf{m}\}_{\mathbf{D}} = \{m_1, m_2\}_{\mathbf{D}} = \{17400, 2140\}_{\mathbf{D}}$ [kg]

Diagonálna matica tuhostí spojovacích členov vozidla $\{\mathbf{k}_i\}_{\mathbf{D}} = \{k_1, k_2\}_{\mathbf{D}} = \{3739448, 10045440\}_{\mathbf{D}}$ [N/m]

Diagonálna matica tlmenia spojovacích členov vozidla ${\bf b}_i {\bf b} = {b_1, b_2}_D = {260197, 10988}_D [kg/s]$



3 OPIS VÝPOČTOVÉHO MODELU MOSTA

Predmetom analýzy je mostná konštrukcia na pozemnej komunikácii spájajúca obce Varín a Mojš. Celková dĺžka mostnej konštrukcie je 87 m a je tvorená 3 poliami s rovnakým rozpätím 29 m. Každé jedno pole pôsobí ako jednoduchý nosník. Hlavnými nosnými prvkami sú prefabrikované predpäté nosníky typu I-73, uložené v priečnom smere vo vzdialenosti 1440-1450 mm. Uloženie nosníkov a skladba mostovky je zobrazená v priečnom reze na *Obr. 3.1*.



Obr. 3.1: Priečny rez mosta spájajúci obce Varín - Mojš

Analýza je zameraná na stredné pole mostnej konštrukcie, ktoré je modelované v systéme ANSYS pomocou nosníkových prvkov BEAM3 ako jednoduchý rovinný nosník s rozpätím 29 m. Modul pružnosti materiálu sa uvažuje 3,85e10 N/m², intenzita hmotnosti mosta na meter 19680 kg/m a kvadratický moment plochy prierezu 1,60622 m⁴. Pre účely optimalizácie počtu nosníkových prvkov s ohľadom na presnosť výpočtu a čas potrebný pre výpočet bola vykonaná predbežná analýza, pri ktorej vozidlo prechádzalo po moste konštantnou rýchlosťou a menil sa iba počet prvkov. Z výsledkov analýzy bolo určené, že 50 prvkov postačuje pre dosiahnutie dostačujúcej presnosti. Z dôvodu možných nepresností pri vyšších rýchlostiach však bolo použitých 100 prvkov.

4 KONTAKTNÁ ÚLOHA VOZIDLO-MOST

Pri riešení úlohy interakcia vozidlo most treba venovať dostatočnú pozornosť kontaktu medzi jednotlivými dynamickými systémami. Ako kontaktný prvok je použitý CONTA175 a ako cieľové prvky sú použité TARGE169. Umiestnenie kontaktných prvkov v modeli je zobrazené na Obr. 4.1. Prvok CONTA175 reprezentuje koleso vozidla a prvky TARGE169 sú naviazané na nosníkové prvky BEAM3.



Obr. 4.1: Umiestnenie kontaktných prvkov v modeli

Pri vzájomnej interakcii vozidla a mostnej konštrukcii zohráva veľkú úlohu pozdĺžny profil vozovky na mostovke, ktorý sa považuje za náhodnú stacionárnu ergodickú funkciu s nulovou strednou hodnotou a s normálnym rozdelením hustoty pravdepodobnosti. Na štatistický popis nerovnosti vozovky sa najčastejšie v súčasnej dobe používa výkonová spektrálna hustota

$$S_{h}(\Omega) = S_{h}(\Omega_{0}) \left(\frac{\Omega}{\Omega_{0}}\right)^{-\kappa}$$
(4.1)

ktorá zobrazuje rozdelenie celkového výkonu náhodného procesu podľa jednotlivých frekvencií. Norma STN ISO 8608 [2] charakterizuje kvalitu vozoviek z pohľadu výškových nerovnosti práve na základe VSH a rozdeľuje vozovky do 8 kategórií. Pri numerických simuláciách potrebujeme na základe známej VSH generovať náhodný pozdĺžny profil jazdnej dráhy. Je to možné urobiť podľa vzťahu

$$h(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{N} \sqrt{2.S(\Omega_k) \Delta \Omega} . \cos(\Omega_k . \mathbf{x} + \varphi_k)$$
(4.2)

Uhol ϕ_k je uhol fázového posunutia náhodné rozdelený v intervale (0; 2π), generovaný podľa rovnomerného rozdelenia .

5 VPLYV NEROVNOSTÍ NA DYNAMICKÚ ODOZVU KONŠTRUKCIE OD VOZIDLA

Pre potreby numerickej simulácie prejazdu vozidla po moste je vygenerovaný náhodný profil jazdnej dráhy, ktorý sa podľa normy zaraďuje do triedy cesty B. To znamená, že hodnota výkonovej spektrálnej hustoty v referenčnom bode je 4.10⁻⁶. Úsek je vektor o veľkosti 1 x 2900, čo pri vzorkovaní 0,01 m predstavuje profil o dĺžke 29 m (rozpätie mosta). Pred samotným využívaním profilu pri simuláciách je potrebné overiť jeho správne dynamické vlastnosti. [3].



Obr. 5.1: Náhodný profil jazdnej dráhy na moste

Porovnanie priebehov výchyliek v strede mosta od prejazdu vozidla po hladkom a nerovnom profile jazdnej dráhy je zobrazené na *Obr. 5.2.* Rýchlosť vozidla je konštantná 10 m/s.



Obr. 5.2: Porovnanie výchylky v strede rozpätia mosta od prejazdu vozidla po hladkom a nerovnom profile , rýchlosť vozidla v=10 m/s

6 POROVNANIE VÝSLEDKOV EXPERIMENTU A VÝPOČTU

Experimentálne merania sa uskutočnili na moste vo Varíne dňa 26.8.2009. Predmetom experimentálnych meraní bolo sledovanie časových priebehov vertikálnych výchyliek uprostred rozpätia mosta od účinkov pohybujúceho sa ťažkého nákladného automobilu Tatra T815.

Ako zaťažovacie vozidlo sa použilo vozidlo Tatra T815, ŠPZ KM-503AA. Tuhostné a hmotnostné parametre vozidla boli experimentálne overované. Tlmiace parametre vozidla boli prevzaté z firemnej dokumentácie o vozidle. Vozidlo sa pohybuje po moste konštantnou rýchlosťou 7,91 m/s.



Obr. 6.1: Porovnanie experiment a výsledkov výpočtu prejazdu vozidla po moste s náhodnými nerovnosťami, rýchlosť vozidla v= 7,91 m/s

Porovnanie experimentálneho merania a výsledkov z numerických simulácií je zobrazené na *Obr. 6.1.* Maximálna výchylka v strede mosta nameraná pri experimente je 17,8 mm. Maximálna výchylka získaná výpočtom je 18,2 mm. Presnosť výpočtu na základe experimentálneho merania je 97,7 %.

Na základe výsledkov porovnania výpočtu s experimentom, môžeme považovať nami zvolený postup numerického modelovania prejazdu vozidla po mostnej konštrukcii za správny.

7 ZÁVER

V rámci numerických analýz bol sledovaný vplyv náhodných nerovností na dynamickú odozvu mosta. Presnosť výsledkov získaných pomocou MKP bola overená z výsledkov experimentu. Porovnaním experimentálnych meraní a výsledkov MKP je odchýlka presnosti výsledkov 2,3 %. Na základe výsledkov porovnania výpočtu s experimentom, môžeme považovať nami zvolený postup numerického modelovania prejazdu vozidla po mostnej konštrukcii za správny. Vplyvom nerovností pri simulácii prejazdu vozidla sa maximálny priehyb v strede rozpätia zvýšil o 4,01 %. Z výsledných porovnaní prejazdov vozidla po moste s nerovným a hladkým profilom je zrejmé, že nerovnosti jazdnej dráhy majú vplyv na výsledný časový priebeh priehybu s ohľadom na zväčšenie dynamickej zložky. Pri zvolenej triede cesty "B" však tento nárast nie je významný a bolo by skôr zaujímavé sa sústrediť na kategórie ciest s nižšou kvalitou povrchu vozovky.

Práca ukázala, že úloha interakcia vozidlo - most patrí medzi stochastické úlohy. Riešenie takejto úlohy je možné experimentálnou alebo teoretickou cestou. Ako sa ukazuje tak najvýhodnejšie je využitie vzájomnej kombinácie týchto dvoch prístupov dohromady.

PODAKOVANIE

Tento príspevok vznikol s podporou GA MŠVVaŠ SR VEGA, grant č. 1/0259/12.

LITERATÚRA

- [1] ANSYS, Inc.: ANSYS 8.0 Documentation
- [2] *STN ISO 8608 Mechanické kmitanie, profily povrchu cesty.* Zaznamenávanie nameraných údajov, SÚTN, Bratislava, 2000.
- [3] DANIEL, Ľ., Interakcia v sústave vozidlo jazdná dráha, Práca ŠVOČ, Svf, ŽU, Žilina, 2012
- [4] MELCER, J., Dynamické výpočty mostov na pozemných komunikáciách. EDIS, Žilinská univerzita v Žiline, 1997, ISBN 8071004251
- [5] FRÝBA, L.: *Vibration of Solids and Structures Under Moving Loads*. ACADEMIA, Praha, Nordhoff International Publishing, Groningen, 1972, ISBN 0727727419
- [6] SÝKOROVÁ, R.: Kmitanie mosta vyvolané pohybom vozidla. Žilinská Univezita Stavebná fakulta, Žilina, Dizertačná práca, 2010
- [7] MAJKA, M., Hartnett, M. .: Dynamic response of bridges to moving trains: A study on effects of random track irregularities and bridge skewness. COMPUTERS & STRUCTURES, Volume 87, Issue 19-20, Pages 1233-1252, 2008

Oponentský posudok vypracoval:

Prof. Ing. Petr Horyl, CSc., dr.h.c., Katedra mechaniky, Fakulta strojní, VŠB-TU Ostrava. Prof. Ing. Jiří Máca, CSc., Katedra mechaniky, Fakulta stavební, ČVUT v Praze. číslo 1, rok 2014, ročník XIV, řada stavební

článek č. 10

Maksym GRZYWIŃSKI¹, Iwona POKORSKA²

STOCHASTIC ANALYSIS OF CYLINDRICAL SHELL

Abstract

The paper deals with some chosen aspects of stochastic structural analysis and its application in the engineering practice. The main aim of the study is to apply the generalized stochastic perturbation techniques based on classical Taylor expansion with a single random variable for solution of stochastic problems in structural mechanics. The study is illustrated by numerical results concerning an industrial thin shell structure modeled as a 3-D structure.

Keywords

Stochastic perturbation technique, finite element method, shell structure.

1 INTRODUCTION

In the paper the finite element method has been applied to the analysis of variation of structural parameters due to uncertainties of these parameters. The so-called stochastic finite element method has been used on the basic of the 2nd-order perturbation method [1-5]. This non-statistical approach is numerically much more efficient than a statistical approach, such as Monte Carlo simulation. A major advantage of the statistical finite element approach is that only the first two moments need to be known. Moreover a large number of samples are required in statistical approaches.

2 FORMULATION OF THE PROBLEM

2.1 Second moment perturbation method

The basic concept of second moment perturbation method (SMPM) is descended from the linear transform of a random variable described in term of a powers series expansion [1, 2, 4]. Let us consider a vector $\mathbf{a} = \{a_r\}$, $r = 1, 2, ..., \hat{r}$, are assumed to be time-independent random variables, specified by the first two associated central moments – means $\overline{\mathbf{a}} = \{\overline{a}_r\}$ and cross-covariances $Cov(a_r, a_s)$; $r, s = 1, 2, ..., \hat{r}$. Expanding the random variables $\{x_i(\mathbf{a})\}$ around the argument means $\{\overline{a}_r\}$ via Taylor series and retaining terms up to second order yields

$$x_i(a_r) = x_i(\overline{a}_r) + \sum_{r=1}^{\hat{r}} \frac{\partial x_i}{\partial a_r} \Big|_{a=\overline{a}} (a_r - \overline{a}_r) + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{\hat{r}} \frac{\partial^2 x_i}{\partial a_r \partial a_s} \Big|_{a=\overline{a}} (a_r - \overline{a}_r) (a_s - \overline{a}_s)$$
(1)

The zero, first and mixed second derivatives of $\{x_i\}$ with respect to $\{a_r\}$ at $\{\overline{a}_r\}$ are constant valued. The mean values $\{\overline{x}_i\} = \{E[x_i]\}, i = 1, 2, ..., \hat{i}$, are expressed as

¹ Maksym Grzywiński, Ph.D., Department of Building, Construction and Engineering, Faculty of Civil Engineering, Czestochowa University of Technology, ul. Akademicka 3, 42-200 Czestochowa, Poland, phone: (+48) 343 250 924, e-mail: mgrzywin@bud.pcz.czest.pl.

² Iwona Pokorska, Ph.D., Department of Theory of Structures, Faculty of Civil Engineering, Czestochowa University of Technology, ul. Akademicka 3, 42-200 Czestochowa, Poland, phone: (+48) 343 250 920, e-mail: pokorska@bud.pcz.czest.pl.

$$E[x_{i}] = x_{i}(\overline{a}_{r}) + \sum_{r=1}^{\hat{r}} \frac{\partial x_{i}}{\partial a_{r}} \Big|_{a=\overline{a}} E\left[\overline{(a_{r} - \overline{a}_{r})}\right] + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{\hat{r}} \frac{\partial^{2} x_{i}}{\partial a_{r} \partial a_{s}} \Big|_{a=\overline{a}} E\left[(a_{r} - \overline{a}_{r})(a_{s} - \overline{a}_{s})\right]$$
$$= x_{i}(\overline{a}_{r}) + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{\hat{r}} \frac{\partial^{2} x_{i}}{\partial a_{r} \partial a_{s}} \Big|_{a=\overline{a}} Cov(a_{r}, a_{s})$$
(2)

or, more concisely

$$\overline{x}_i = x_i(\overline{a}_r) + \frac{1}{2}x_i^{(2)}(\overline{a}_r)$$
(3)

where the symbolic symbol

$$(\circ)^{(2)} = \sum_{r=1}^{\hat{r}} \frac{\partial^2(\circ)}{\partial a_r \partial a_s} \Big|_{a=\bar{a}} Cov(a_r, a_s)$$

$$\tag{4}$$

To determine the cross-covariances $_{Cov}(x_i, x_j)$ we note, by (1) and (3), that the spreads of the random variables $\{x_i\}$ about their means $\{\overline{x}_i\}$ are

$$x_{i} - \overline{x}_{i} = \sum_{r=1}^{\hat{r}} \frac{\partial x_{i}}{\partial a_{r}} \Big|_{a=\overline{a}} \left(a_{r} - \overline{a}_{r}\right) + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{\hat{r}} \frac{\partial^{2} x_{i}}{\partial a_{r} \partial a_{s}} \Big|_{a=\overline{a}} \left(a_{r} - \overline{a}_{r}\right) \left(a_{s} - \overline{a}_{s}\right) - \frac{1}{2} x_{i}^{(2)}$$

$$(5)$$

and

$$Cov(x_{i}, x_{j}) = E[(x_{i} - \overline{x}_{i})(x_{j} - \overline{x}_{j})]$$

$$\approx \sum_{r,s=1}^{\hat{r}} \left[\frac{\partial x_{i} \partial \mathbf{x}}{\partial a_{r} \partial a_{s}} - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^{2} x_{i}}{\partial a_{r} \partial a_{s}} x_{j}^{(2)} \right) \left(x_{i}^{(2)} \frac{\partial^{2} x_{j}}{\partial a_{r} \partial a_{s}} \right) \right]_{a=\overline{a}} E[(a_{r} - \overline{a}_{r})(a_{s} - \overline{a}_{s})] + \frac{1}{4} x_{i}^{(2)} x_{j}^{(2)}$$

$$= \sum_{r,s=1}^{\hat{r}} \frac{\partial x_{i} \partial x_{j}}{\partial a_{r} \partial a_{s}} |_{a=\overline{a}} Cov(a_{r} - \overline{a}_{r})(a_{s} - \overline{a}_{s}) - \frac{1}{4} \left(x_{i}^{(2)} x_{j}^{(2)} + x_{i}^{(2)} x_{j}^{(2)} \right) + \frac{1}{4} x_{i}^{(2)} x_{j}^{(2)} \tag{6}$$

or

$$Cov(x_i, x_j) = \sum_{r=1}^{\hat{r}} \frac{\partial x_i \partial x_j}{\partial a_r \partial a_s} \Big|_{a=\bar{a}} Cov(a_r, a_s) - \frac{1}{4} x_i^{(2)} x_j^{(2)}.$$
⁽⁷⁾

The first two moments (3) and (7) are second-order. In comparison with conventional statistical approaches, Monte Carlo simulation for instance, the drawbacks of the non-statistical SMPM are that (i) random variables $\{x_i\}$ must satisfy the conditions for small fluctuation and for continuity at $\{\overline{a}_r\}$, and (ii) only first two probabilistic moments can be given on output. On the other hand, advantages of SMPM are significant, since (a) the assumption of the normal distribution (even homogeneity) for $\{x_i\}$ is not necessarily needed, (b) only the first two moment for $\{a_r\}$ are required on input, and (c) with the same-order accuracy only $o(\hat{r})$ equation system to be solved in SMPM when compared with $o(\hat{r}^3)$ corresponding systems sampled in Monte Carlo simulation.

2.2 Hierarchical equations

Hierarchical system for the multidegree-of-fredom system describing structural static response with stiffness matrix \mathbf{K} , displacement vector \mathbf{q} and load vector \mathbf{Q} is

$$\mathbf{K}^{0}\mathbf{q}^{0} = \mathbf{Q}^{0} \tag{8}$$

$$\mathbf{K}^{0}\mathbf{q}^{,r} = \mathbf{Q}^{,r} - \mathbf{K}^{,r}\mathbf{q}^{0} \qquad r = 1, 2, \dots, \hat{r}$$
(9)

$$\mathbf{K}^{0}\mathbf{q}^{(2)} = \sum_{r,s=1}^{\hat{r}} \left(\mathbf{Q}^{,rs} - 2\mathbf{K}^{,r}\mathbf{q}^{,s} - \mathbf{K}^{,rs}\mathbf{q}^{\,0} \right) Cov(a_{r},a_{s})$$
(10)

where the symbols $(\circ)^0$, $(\circ)^{r}$ and $(\circ)^{rs}$ denote the values of the zero, first and mixed second partial derivatives (\circ) with respect to $\{a_r\}$ at $\{\overline{a}_r\}$, respectively.

3 EXAMPLE

In the example a thin shell structure is considered. Fig. 1 shows the half of a cylindrical shell clamped at boundaries under uniformly distributed pressure $p = 15 \text{kN/m}^2$. The remaining input data are: radius R = 2.5m, length L = 12m, Young modulus E = 30MPa, Poisson ratio $\nu = 0.2$. The expectation, correlation function and coefficient of variation of the shell thickness are assumed as:

$E(t) = t_0 = 0.05$	$\operatorname{Cov}(\mathbf{t}_{\mathrm{r}},\mathbf{t}_{\mathrm{s}}) = \operatorname{Pexp}[- \mathbf{x}_{\mathrm{r}}]$	$-\mathbf{x}_{0} \lambda \left[- \mathbf{y}_{r}-\mathbf{y}_{0} /\lambda \right] $
$\vartheta = 1.5/\mathrm{RL},$	$\lambda = 2.5/RL$,	$\alpha = 0.05; 0.10; 0.15.$



Fig. 1: 60-element shell with mesh grid

Due to symmetry only one-quarter of shell is considered. The finite element mesh include 60 rectangular elements (60 random design variables), and total number of degrees of freedom is 313.

The main motivation behind an application of the generalized perturbation technique is to eliminate the restriction on the input second probabilistic moments to be smaller than 0,15 and impossibility of reliable computations of higher than the second probabilistic moments for the output. Tab. 1 and Fig. 2 give the computed values of expectations and standard deviations for different random thickness shell.

		Expectation q_Z				Std. Dev.	q_Z
Angle	Deterministic	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.10$	$\alpha = 0.15$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.10$	$\alpha = 0.15$
90°	1.22e-04	1.35e-04	1.74e-04	2.39e-04	3.81e-05	7.63e-05	1.14e-04
75°	1.44e-04	1.58e-04	2.00e-04	2.71e-04	3.86e-05	7.72e-05	1.16e-04
60°	1.84e-04	2.01e-04	2.50e-04	3.32e-04	4.24e-05	8.48e-05	1.27e-04
45°	1.92e-04	2.09e-04	2.59e-04	3.42e-04	4.50e-05	9.00e-05	1.35e-04
30°	1.40e-04	1.53e-04	1.90e-04	2.52e-04	3.61e-05	7.23e-05	1.08e-04
15°	0.56e-04	0.61e-04	0.77e-04	1.02e-04	1.63e-05	3.26e-05	0.49e-04
0°	0	0	0	0	0	0	0

Tab. 1: Expectations and standard deviations displacement q_z (in symmetry blue line Fig. 1)

4 CONCLUSIONS

In the stochastic perturbational analysis we deal with one system of the zeroth-order equations, one system of the first-order equations for each of the random variables and one system of the second-order equations. This non-statistical approach does not restrict the analysis to some limits of random fields as in the statistical techniques; it is applicable to both the homogeneous and nonhomogeneous random fields and a normal approximation is not necessarily needed. The restriction of small uncertainties in random variables, being inherent of the mean-point perturbation procedure, is seemingly eliminated by the check-point perturbation scheme in which the point of the system is perturbated around its parameterized variables.

With the transformation from correlated random variables to uncorrelated variables and by using only dominant part of the transformed set, the algorithms worked out are effective even for PC-based stochastic analysis of large-scale systems with acceptable computations cost. Since almost all operations related to random quantities can be carried out by the procedures for deterministic calculations the algorithms developed can be immediately adapted to existing deterministic finite element programs.

REFERENCES

- LIU, W.K., BELYTSCHKO, T., MANI, A. *Random field finite elements*, Int. J. Num. Meth. Eng., 1986, vol. 23, issue 10, pp. 1831-1845 (15 p). ISSN 1097-0207
- [2] KLEIBER, M., HIEN, T.D. The Stochastic Finite Element Method. Wiley, 1992. ISBN 047193626X. 322 p.
- [3] GRZYWIŃSKI, M., SŁUŻALEC, A. Stochastic equations of rigid-thermo-viscoplasticity in metal forming process, Int. J. Eng. Science, 2002, vol. 40, issue 4, pp. 367-383 (17 p). ISSN 0020-7225
- [4] GRZYWIŃSKI, M., HIEN, T. D. Stochastyczna wrażliwość konstrukcji kratowych. In: TARNOWSKI, W., KICZKOWIAK, T. (red.) *Polioptymalizacja i Komputerowe Wspomaganie Projektowania*, 2008, pp. 35-40 (6 p). ISBN 8373651527.
- [5] POKORSKA I., A sensitivity analysis of powder forging processes, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2008, 37, 1, pp. 77-89 (13 p). ISSN 16151488

Reviewers:

Prof. Ing. Zdeněk Kala, Ph.D., Institute of Structural Mechanics, Faculty of Civil Engineering, Brno University of Technology.

Prof. Ing. Jiří Šejnoha, DrSc., FEng., Department of Mechanics, Faculty of Civil Engineering, Czech Technical University in Prague.

číslo 1, rok 2014, ročník XIV, řada stavební

článek č. 11

Jiří KOKTAN¹, Jiří BROŽOVSKÝ²

NUMERICKÉ MODELOVÁNÍ ČASOVĚ ZÁVISLÉHO CHOVÁNÍ ŽELEZOBETONOVÉ KONSTRUKCE S VYUŽITÍM MODELU B3

NUMERICAL MODELLING OF TIME-DEPENDENT BEHAVIOUR OF REINFORCED CONCRETE STRUCTURE WITH USE OF B3 MODEL

Abstrakt

Příspěvek se zabývá výpočetní analýzou časově závislých deformací železobetonové rámové konstrukce s využitím teorie lineární viskoelasticity a modelu B3. Numerické řešení využívá přímé integrace a je implementováno v algoritmickém jazyce. K výpočetní analýze prutových konstrukcí je využita obecná deformační metoda. V příspěvku je kromě příkladu výpočtu s využitím modelu B3 prezentováno a diskutováno srovnání s výpočtem podle ČSN EN 1992-1-1.

Klíčová slova

Numerické modelování, viskoelasticita, železobeton, deformační metoda, model B3.

Abstract

The paper proposes an implementation of creep analysis of reinforced concrete structures which utilizes the B3 model and the direct stiffness method for reinforced concrete frames. The analysis is based on a numerical integration and it is implemented in an algorithmic programming language. There is presented a solution with the mentioned approaches which is compared with solution based on the EN 1992-1-1 technical standard.

Keywords

Numerical modelling, viscoelasticity, reinforced concrete, direct stiffness method, B3 model.

1 ÚVOD

Řada stavebních materiálů mění svoje vlastnosti v čase. Důsledkem těchto změn je obvykle nárůst deformací během životnosti stavebních konstrukcí. Tyto jevy jsou nezanedbatelné například u materiálů na bázi dřeva [2,5], ale také u betonu (dotvarování, smršťování) [3,6,10,12]. Některé moderní stavební konstrukce, například vícepodlažní bytové domy, uvedené dva typy materiálů kombinují, a proto je potřebné studovat vliv těchto dlouhodobých změn na celkovou funkčnost a použitelnost těchto objektů. Jde zejména o možné důsledky rozdílných deformací v průběhu životnosti objektů, které mohou vést k narušování spojů mezi prvky z jednotlivých materiálů, k nadměrným deformacím, případně ke ztrátě účinnosti izolačních prvků nebo k estetickým závadám (trhliny v pohledových prvcích). Význam těchto vlivů je často možné zanedbat u konstrukcí malého rozsahu, ale nelze je pominout u konstrukcí větších rozměrů (např. vícepodlažní pozemní stavby, dřevo-betonové lávky a mosty větších rozpětí) [7].

¹ Bc. Jiří Koktan, Katedra stavební mechaniky, Fakulta stavební, VŠB-Technická univerzita Ostrava, Ludvíka Podéště 1875/17, 708 33 Ostrava - Poruba, tel.: (+420) 597 321 321, e-mail: jiri.koktan.st@vsb.cz.

² Doc Ing. Jiří Brožovský, Ph.D., Katedra stavební mechaniky, Fakulta stavební, VŠB-Technická univerzita Ostrava, Ludvíka Podéště 1875/17, 708 33 Ostrava - Poruba, tel.: (+420) 597 321 321, e-mail: jiri.brozovsky@vsb.cz.

Na Fakultě stavební VŠB-TU Ostrava je v současné době připravován širší výzkum dlouhodobého chování rozsáhlých konstrukcí kombinujících prvky z železobetonu a konstrukčního dřeva, případně z materiálů na bázi dřeva. Předkládaný článek proto představuje část úvodních teoretických prací, které mají sloužit k přípravě nástrojů pro modelování předpokládaného chování uvedených konstrukcí v průběhu jejich životnosti. V příspěvku je diskutováno především použití numerického modelu B3 pro beton [1] a jeho implementace v algoritmickém jazyce, která má posloužit především k ověření zvolených výpočetních postupů před tím, než budou připraveny nástroje pro rozsáhlejší úlohy.

2 MODELOVÁNÍ ČASOVĚ ZÁVISLÝCH JEVŮ V BETONU

2.1 Viskoelastické modely

Důsledkem změn ve struktuře betonu v čase (chemické procesy, vysychání atd.) dochází nejen ke změnám mechanických vlastností materiálu (nárůst pevnosti, modulu pružnosti), ale také k postupnému vývoji deformací, a to i při konstantním zatížení (dotvarování betonu).

K popisu tohoto chování existuje celá řada přístupů. Často se vychází z teorie lineární viskoelasticity, kterou je ovšem u betonu možné použít jen v případech, kdy napětí v materiálu dosahují podstatně nižních hodnot než je pevnost betonu [8,9]. Této skutečnosti využívají i technické normy [4], které v různé podobě zavádějí časově závislou funkci poddajnosti viskoelastického materiálu nebo z ní vyjádřený součinitel dotvarování.

Funkci poddajnosti betonu je možné popsat například pomocí Kelvinova řetězce [8], což však vyžaduje znalost řady parametrů řetězce, jejichž stanovení nemusí být v praktických úlohách snadné. Proto, pokud není vhodné nebo účelné použít normový přístup, je možné použít některý z přesnějších modelů, například model B3 [1,9].

2.2 Model B3

Pro dále popsané práce byl vybrán model B3 navržený profesorem Bažantem [1] a to v takzvané zkrácené verzi. Model B3 byl sestaven na základě vyhodnocení dlouhodobých výzkumů chování železobetonových konstrukcí. Jeho určitou nevýhodou je jistá složitost a obtížnost stanovení některých vstupních parametrů. Ty musí být v optimálním případě získány pomocí krátkodobých dotvarovacích zkoušek pro konkrétní beton. Autoři modelu také uvádí rozsah vlastností betonu, pro který je model ověřen: vodní součinitel v rozsahu od 0,35 po 0,85, pevnost na válcích po 28 dnech od 17 MPa do 70 MPa a hmotnost cementu 160-720 kg v metru krychlové betonu. Pro běžné betonové směsi je možné najít doporučené hodnoty jednotlivých materiálových parametrů, které byly použity také v úlohách diskutovaných v dalším textu.

Funkce J má ve zkrácené verzi modelu B3 tvar:

$$J(t,t') = \frac{1}{E_o} + q_s \ln\left[(1 + \psi (t'^m + \alpha)(t - t')^n\right],$$
(1)

kde:

t' – čas, kdy je vneseno zatížení [dny],

t – čas, pro který je prováděn výpočet [dny],

E_o – asymptotický modul pružnosti [Pa].

Ostatní veličiny jsou konstantami a je možno je určit experimentálními testy. Pro běžné betony se zpravidla doporučují hodnoty: $\psi=0,3$, m=0,5, n=0,1, $\alpha=0,001$ [8]. V rovnici (1) není uvážen vliv smršťování betonu. Podle [9] se v dále uváděných příkladech u modelu B3 počítalo s Pickettovým efektem.

2.3 Výpočetní postupy

Ke stanovení hodnoty funkce poddajnosti J v čase t je možné použít numerickou integraci nebo jiné numerické postupy (například exponenciální algoritmus, jak je ukázáno v [9]). Pro potřeby

výpočtů rámových konstrukcí obecnou deformační metodou [11] je nutné stanovit také relaxační funkci R(t,t'), která je s funkcí poddajnosti svázána vztahem (2).

$$J(s,t_0)\frac{1}{J(t_0,t_0)} + \int_{t_0}^{s} J(s,t)\frac{\partial R(t,t_0)}{\partial t}dt = 1,$$
(2)

Relaxační funkce může být stanovena numericky na základě vztahu (2) nebo může být pro beton stanovena dle [8] přibližně pomocí vztahu (3).

$$R(t,t') = \frac{0.992}{J(t,t')} - \frac{0.115}{J(t,t-\Delta t)} \left[\frac{J(t_m,t')}{J(t,t_m)} - 1 \right],$$
(3)

kde:

 t_m – polovina doby mezi t a t' [dny],

 $\Delta t = 1 \text{ den [dny]}.$

Srovnání přesnějšího numerického výpočtu vycházejícího ze vztahu (2) s přibližným analytickým řešením podle vzorce (3) je uvedeno na Obrázku 1. Při výpočtu byly použity výše uvedené doporučené parametry funkce poddajnosti. V dalších výpočtech bylo používáno numerického postupu.



Obr. 1: Rozdíl mezi numerickým a přibližným analytickým výpočtem relaxační funkce

3 SROVNÁNÍ VÝSLEDKŮ MODELU B3 A ŘEŠENÍ PODLE ČSN EN 1992-1-1

3.1 Zadání srovnávacího příkladu

Pro srovnání výsledků získaných pomocí zkrácené verze modelu B3 a postupu podle ČSN EN 1992-1-1 uvedeném v příloze B byl připraven model prostého nosníku o rozpětí 3 metry zatíženého spojitým rovnoměrným zatížením o velikosti 7 kN/m, které bylo na nosník umístěno 30 dní od betonáže. Nosník byl navržen z betonu C30/37 (průměrná pevnost po 28 dnech 38 MPa a sečnový modul pružnosti 32 GPa) s hlavní výztuží 4x10-B420B při spodním okraji s krytím 38 mm. Pro výpočty byla předpokládána průměrná relativní vlhkost prostředí 50%. Schéma příkladu je uvedeno na Obrázku 2. Při výpočtech podle se neuvažovalo s vlivem tahových trhlin.



Obr. 2: Schéma srovnávacího příkladu

Nosník byl rozdělen na 10 konečných prvků. Byly uvažovány dvě varianty řešení, v první byl vliv hlavní nosné výztuže zahrnut v idealizovaném průřezu, zatímco v druhé variantě byla výztuž zavedena do výpočtu pomocí dalších konečných prvků. Pruty výztuže byly umístěny vůči neutrální ose nosníku excentricky. Toho bylo v modelu dosaženo pomoci krátkých prutů s vysokou tuhostí, které spojovaly uzly konečných prvků betonového nosníku s uzly konečných prvků představujících výztuž. Interakce mezi betonem a výztuží je tedy zjednodušeně modelována jen v uzlech.

3.2 Výsledky srovnávacího příkladu

Na Obrázku 3 jsou srovnány vypočítané průběhy vývoje průhybu nosníku uprostřed rozpětí v čase. Je patrné, že vliv zanedbání výztuže na výsledky není zanedbatelný. Model B3 při daných vstupních parametrech poskytuje vyšší odhady deformace než model podle ČSN EN.



Obr. 3: Vývoj maximálního průhybu nosníku v čase

Vzhledem k tomu, že jde o idealizovaný model staticky určité konstrukce, nemá dotvarování vliv na rozložení vnitřních sil. V případě modelu s výztuží, která na rozdíl od betonu svoje deformace v čase nemění, k přerozdělení sil dojde. To je ilustrováno na Obrázku 4, kde jsou srovnány síly ve výztuži v čase 3 dny po přiložení zatížení a po 10 letech. Na Obrázku 5. jsou síly ve výztuži v případě výpočtu pomocí modelu B3. Rozdílné hodnoty počáteční napjatosti ve výztuži vyplývají z rozdílných vstupních parametrů obou použitých modelů (při použití modelu B3 je nutno pracovat s asymptotickým modulem pružnosti).

Skoková změna sil v jednotlivých konečných prvcích výztuže je dána výše uvedeným zjednodušeným modelem spolupůsobení výztuže s betonem, ve kterém je společná deformace betonu a výztuže zajištěna jen v uzlech konečných prvků.



Obr. 4: Hodnoty normálové síly ve výztuži při výpočtu dle ČSN EN



Obr. 5: Hodnoty normálové síly ve výztuži při výpočtu pomocí modelu B3

Ve výpočtech bylo využíváno numerické integrace a numerického výpočtu relaxační funkce. Vzhledem k tomu, že funkce popisující časově závislé chování betonu jsou silně nelineární a stejné chování vykazují i výsledné deformace (viz Obrázek 3), je potřebné ověřit také vliv velikosti výpočtového kroku na výsledky výpočtů. Bylo ověřeno použití rovnoměrného kroku (až do 100 intervalů) a kroku, jehož velikost se měnila logaritmicky podle doporučení v [9] (až do 20 intervalů). Výsledky jsou uvedeny na Obrázku 6.

Z provedeného srovnání je zřejmé, že při vyšších počtech kroků výsledky výpočtů konvergují ke stejnému řešení. Současně je patrné, že při rovnoměrném kroku řešení je nutno použít poměrně vysokého počtu výpočtových kroků (100), zatímco při kroku proměnné velikosti vede již rozdělení řešeného časového intervalu (10 let) na 10 kroků k dostatečně přesným výsledkům.



Obr. 6: Vliv výpočtového kroku na deformace v čase

4 VÝPOČET DOTVAROVÁNÍ ROVINNÉHO RÁMU

4.1 Popis konstrukce

Rozměry a zatížení rámu jsou uvedeny na Obrázku 7. Pro určení deformací vlivem dotvarování se uvažovala kvazistálá kombinace zatížení. Zatížení začalo působit po 40 dnech. Velikost zatížení rámové příčle $q = g_1 + g_2 + \psi_2 s_k = 25,8 + 2 + 0,2 \cdot 14,4 = 30,7$ kN/m. Velikost zatížení sloupů $n = g_3 = 1$ kN/m.

Jako materiál byl ve výpočtu uvažován beton třídy C20/25, hlavní nosná výztuž byla B500B. Funkce poddajnosti betonu byla určena podle zkráceného modelu B3 s následujícími parametry: průměrná pevnost v tlaku $f_{cm} = 24$ MPa, doba ošetřování 28 dní.



Obr. 7: Schéma modelu rovinného rámu

Hlavní nosná výztuž sloupů byla uvažována $4x\phi16$. U příčle byla výztuž při spodním povrchu $4x\phi16$, a při horním povrchu $4x\phi20$, přičemž krytí bylo ve všech případech 30 mm. Rozměry jednotlivých prvků a polohy výztuže jsou uvedeny na Obrázku 8.



Obr. 8: Průřezy sloupu (vlevo) a příčle rámu

4.2 Výsledky řešení rámu

Na Obrázku 9 je ukázán průhyb uprostřed rozpětí příčle rámu. Obrázek 10 pak ilustruje vývoj deformací rámu po půl roce, po 5 letech a po 20 letech.





Obr. 10: Celkové deformace rámu po 0,5 roku, po 5 letech a po 20 letech

6 ZÁVĚR

V článku bylo prezentováno řešení časově závislých deformací železobetonových rámů s využitím deformační metody a modelu B3. Bylo ověřeno, že uvedený postup je vhodný i v případě, že je implementován pomocí algoritmického jazyka (např. Octave nebo Matlab). Při použití přesnějších modelů, jako je model B3 je ovšem nezbytné používat data ověřená alespoň

krátkodobými experimenty, neboť obecně nelze pracovat s normovými vstupními daty, která jsou statisticky upravena a nemusí nutně odpovídat konkrétní situaci (viz např. Obrázek 3).

PODĚKOVÁNÍ

Prováděné práce byly podporovány z prostředků na koncepční rozvoj vědy a výzkumu poskytnutých VŠB-TU Ostrava Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy ČR.

LITERATURA

- BAŽANT, Zdeněk P. a BAWEJA. Creep and Shrinkage Prediction Model for Analysis and Design of Concrete Structures: Model B3. *ACI Concrete International*. 2001, ACI 23, s. 38-39. Dostupné z: http://www.civil.northwestern.edu/people/bazant/PDFs/Papers/S39.pdf
- [2] CECCOTTI, Ario. Composite concrete-timber structures. *Progress in Structural Engineering and Materials*, 2002, 4.3: 264-275.
- [3] ČAJKA, Radim a Pavlína MATEČKOVÁ. Parametrické výpočty únosnosti a použitelnosti předpjaté střešní vaznice. *Sborník vědeckých prací Vysoké školy báňské Technické univerzity Ostrava: Řada stavební.* 2010, X, č. 1, s. 1-10.
- [4] ČSN EN 1992-1-1: Navrhování betonových konstrukcí-část 1-1 Obecná pravidla a pravidla pro pozemní stavby. Praha: ČNI, 2006.
- [5] FRAGIACOMO, Massimo; CECCOTTI, Ario. Long-term behavior of timber–concrete composite beams. I: Finite element modeling and validation. *Journal of structural engineering*, 2006, 132.1: 13-22.
- [6] JANULÍKOVÁ, Martina, Radim ČAJKA, Pavlína MATEČKOVÁ a Marie STARÁ. Modeling of Foundation Structures with Sliding Joint Using Results of Asphalt Belts Laboratory Tests. *Transactions of the VŠB - Technical University of Ostrava. Construction Series.* 2012-01-1, XII, issue 1, s. 1-7. DOI: 10.2478/v10160-012-0002-x. Dostupné z: http://www.degruyter.com/view/j/tvsb.2012.xii.issue-1/v10160-012-0002-x/v10160-012-0002-x.xml
- [7] JIRÁSEK, Milan a Zdeněk P. BAŽANT. *Inelastic Analysis of Structures*. 1. vyd. Chichester, England: John Wiley & Sons. Ltd., 2002. ISBN 978-0-431-98716-1.
- [8] JIRÁSEK, Milan a Jan ZEMAN. Přetváření a porušování materiálů: dotvarování, plasticita, lom a poškození. Vyd. 1. Praha: Nakladatelství ČVUT, 2006, 175 s. ISBN 978-80-01-03555-9.
- [9] JIRÁSEK, Milan; DOBRUSKÝ, Svatopluk. Accuracy of Concrete Creep Predictions Based on Extrapolation of Short-Time Data. In: *Proceedings of the 5th international conference on reliable engineering computing*,(197-207). 2012.
- [10] KŘÍSTEK, Vladimír, Jaroslav ŘÍMAL a Jan L. VÍTEK. Reologické projevy v prvcích betonových komorových nosníků. *Stavební obzor*. 2013, roč. 2013, č. 6, s. 152-156.
- [11] MELOSH, Robert J. Basis for derivation of matrices for the direct stiffness method. *AIAA Journal*, 1963, 1.7: 1631-1637.
- [12] ZÍDEK, Rostislav a Luděk BRDEČKO. Deflection of Reinforcement Concrete Structures according to EC2: Comparison of Methods. In: FUIS, Ed.: Vladimír. Engineering mechanics 2011: international conference, May 9 - 12, 2011, Svratka, Czech Republic; IM 2011; book of full texts. 1. ed. Prague: Inst. of Thermodynamics, Acad. of Sciences of the Czech Republic, 2011, s. 687-690. ISBN 9788087012338.

Oponentní posudek vypracoval:

Ing. Tomáš Čejka, Ph.D., Katedra konstrukcí pozemních staveb, Fakulta stavební, ČVUT v Praze. Ing. Rostislav Zídek, Ph.D., Ústav stavební mechaniky, Fakulta stavební, VUT v Brně. číslo 1, rok 2014, ročník XIV, řada stavební

článek č. 12

Kamila KOTRASOVÁ¹

FLUID IN RECTANGULAR TANK - FREQUENCY ANALYSIS

Abstract

Ground-supported tanks are used to store a variety of liquids. During earthquake activity the liquid exerts impulsive and convective pressures (sloshing) on the walls and bottom of the rectangular tank. This paper provides theoretical background for analytical calculating of circular frequencies and hydrodynamic pressures developed during an earthquake in rectangular container. Analytical results of first natural frequency are compared with experiment.

Keywords

Rectangular tank, fluid, frequency, experiment.

1 INTRODUCTION

Seismic event is certainly one of the most critical external events regarding safety of industrial plants, as demonstrated by recent earthquakes. If industrial facilities store large amount of hazardous materials, accidental scenarios as fire, explosion or toxic dispersion may be triggered, thus possibly involving working people within the installation, population living in close surrounding or in urban area where the industrial installation is located. Liquid storage tanks are considered essential lifeline structures. Large-capacity ground-supported tanks are used to store a variety of liquids, e.g. water for drinking and fire fighting, petroleum, chemicals, and liquefied natural gas. Satisfactory performance of tanks during strong ground shaking is crucial for modern facilities. Tanks that were inadequately designed or detailed have suffered extensive damage during past earthquakes. Knowledge of pressures and forces acting on the walls and bottom of containers during an earthquake and frequency properties of containers and fluid are important for good analysis and design of earthquake resistant structures/facilities – tanks.

2 FLUID IN RECTANGULAR TANK DURING EARTHQUAKE

For tanks, walls of which can be assumed as rigid, a solution of the Laplace equation for horizontal excitation can be obtained in a form, so that the total pressure is again given by the sum of impulsive and convective pressures by use of absolute summation rule:

$$p_{HDw} = p_{HDIw} + p_{HDCw}.$$
 (1)

.....

Consider a rectangular container as shown in Fig. 1, and at the instant under consideration let the surface of the fluid be horizontal and let the walls of the container have a horizontal acceleration \ddot{u}_{α} in the x - direction.

Let it be required to find the pressures on the walls of the container due to the acceleration \ddot{u}_{o} .

Let the fluid have a depth H, a length 2L and a unit thickness, Fig. 1a. It is seen that the action of the fluid is similar to that which would be obtained if the horizontal component of fluid velocity \dot{u} were

¹ Ing. Kamila Kotrasová, Ph.D., Department of structural mechanics, Faculty of Civil Engineering, Technical University of Košice, Vysokoškolská 4, 042 00 Košice, Slovak Republic, phone: (+421) 55 602 4294, e-mail: kamila.kotrasova@tuke.sk.

independent of the y coordinate; that is, imagine the fluids to be constrained by thin, massless, vertical membranes free to move in the x – direction, and let the membranes be originally spaced a distance dx apart.

When the walls of the container are given acceleration, the membranes will be accelerated with the fluid and the fluid will be squeezed vertically with respect to the membranes.



Fig. 1: Rectangular tank is filled with fluid

As shown in Fig. 1b, since the fluid is restrained between two adjacent membranes, the vertical velocity \dot{v} is dependent on the horizontal velocity \dot{u} according to

$$\dot{v} = \left(H - y\right) \frac{d\dot{u}}{dx}.$$
(2)

This is an equation specifying the constraint on the fluid flow. As the fluid is considered incompressible, it follows that the acceleration \ddot{v} is proportional to the velocity \dot{v} and the acceleration \ddot{u} is proportional to the velocity \dot{u} , and the pressure in the fluid between two membranes is given by the standard hydrodynamic equation:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\rho \ddot{v}, \qquad (3)$$

where ρ is density of the fluid.

The acceleration \ddot{u}_o thus produces an increase of hydrodynamic impulsive pressure on one wall and a decrease of pressure on the other wall of

$$p_{HDIW} = \rho \ddot{u}_0 H \left(\frac{y}{H} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{H}\right)^2\right) \sqrt{3} \tanh \sqrt{3} \frac{L}{H}.$$
 (4)

The effect of the impulsive pressures is to excite the fluid into oscillations. To examine the fundamental mode of vibration, consider the fluid to be constrained between rigid membranes that are free to rotate as shown in Fig. 2.



Fig. 2: Rectangular tank are filled with fluid

The constraint is described by the following equations:

$$\dot{u} = \frac{L^2 - x^2}{2} \frac{d\dot{\theta}}{dy},\tag{5}$$

$$\dot{v} = \dot{\theta} z \,. \tag{6}$$

The pressure in the fluid is given by

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho \, \ddot{u} \,, \tag{7}$$

$$p = -\rho \frac{L^3}{2} \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{3} \left(\frac{x}{L} \right)^3 \right) \frac{d\ddot{\theta}}{dx}.$$
(8)

The equation of motion of a slice of the fluid is

$$\int_{-l}^{+l} \frac{\partial p}{\partial y} dy \, x \, dx = -\rho \, \frac{\left(2L^3\right)}{12} \ddot{\theta} \, dy \,. \tag{9}$$

The solution of this equation, with the boundary conditions appropriate to the problem, is for sinusoidal oscillations

$$\theta = \theta_0 \frac{\sinh\sqrt{\frac{5}{2}} \frac{y}{L}}{\sinh\sqrt{\frac{5}{2}} \frac{H}{L}} \sin \omega t$$
 (10)

This specifies the oscillation of the fluid. To determine the natural frequency of vibration, the maximum kinetic energy, W_K , is equated to the maximum potential energy, W_P .

$$W_{K} = \int_{0}^{h+l} \frac{1}{2} \rho \left(u^{2} + v^{2} \right) \omega^{2} \sin^{2} \omega t \, dx dy \,, \tag{11}$$

$$W_P = \int_{-l}^{+l} \frac{1}{2} \rho g x^2 \sin \omega t \, dx \,. \tag{12}$$

This gives

$$\omega^2 = \frac{g}{L} \sqrt{\frac{5}{2}} \tanh \sqrt{\frac{5}{2}} \frac{H}{L}.$$
 (13)

The circular frequencies are then for the nth mode

$$\omega_n^2 = \frac{g}{L} n \sqrt{\frac{5}{2}} \tanh n \sqrt{\frac{5}{2}} \frac{H}{L}.$$
 (14)

The hydrodynamic convective pressures are given by

$$p_{HDCw1} = \left(\rho \frac{L^3}{3} \sqrt{\frac{5}{2}} \frac{\cosh\sqrt{\frac{5}{2}} \frac{x}{L}}{\sinh\sqrt{\frac{5}{2}} \frac{H}{L}}\right) \omega^2 \theta_0 \sin \omega t \cdot$$
(15)

3 EXPERIMENTAL ANALYSIS OF FLUID IN RECTANGULAR TANK

The experiment was made with a rectangular tank with inner ground parameters 192 mm x 392 mm and height 242 mm, made of glass. The tank was filled with water by using potassium permanganate; the height of filling of water was 50 mm. The container was excited by horizontal harmonious motion of various frequencies with amplitudes of 5 mm and 10 mm (see Fig. 3).



Fig. 3: View of experiment place

4 RESULTS AND CONCLUSION

The first natural frequencies were calculated by analytical solution equation (14). Fig. 4 shows the natural frequencies in [Hz] for realized experiment depend of height of filling.



Fig. 6: Maximum heights of wave in [cm]

For a rectangular tank with inner parameters 192 mm x 392 mm and height 242 mm, the tank was filled with water to the height of 50 mm, the natural frequency is given $f_1 = 0.875$ Hz, $f_2 = 1.238$ Hz, and more ..., there were calculated by using of equation (14).

Fig. 5 shows the maximum heights of waves for 50 mm filling of water, by various exciting frequencies with 5 mm amplitude, in dependency from frequencies in [Hz]. Fig. 6 shows the maximum heights of waves for 50 mm filling of water, by various exciting frequencies with 10 mm amplitude, in dependency from frequencies in [Hz]. Fig. 5 shows that the maximum height of wave of water for 50 mm filling of water with 5 mm amplitude is by exciting frequency 0.86 Hz. The maximum height of wave is 60 mm from original free surface of fluid, it is 110 mm from bottom of tank (filling of water is 50 mm). It is corresponding with first natural frequency, which is given $f_1 = 0.875$ Hz by (14). From Fig. 5 is seen, that second natural frequency 0.85 Hz for 50 mm filling of water (blue arrow) is by exciting frequency 0.85 Hz for 50 mm filling of water and 5 mm amplitude. It is corresponding with first natural frequency, it is given $f_1 = 0.875$ Hz by (14).

First natural frequency calculated by analytical solution, equation (14), was compared with the experiment, see Tab. 1.

Tab. 1: Comparing of first natural frequencies

	Analytical	Experiment	
	solution	5 mm amplitude	10 mm amplitude
First natural frequency in [Hz]	0.8754	0.86	0.85

ACKNOWLEDGEMENTS

Preparation of the paper was supported by the Scientific Grant Agency of the Ministry of Education of Slovak Republic and the Slovak Academy of Sciences under Project 1/0201/11.

REFERENCES

- [1] HOUSNER, G., W.: *Earthquake pressures on fluid containers*, California institute of technology, Pasadena, California, 1954.
- [2] BENČAT, J, PAPÁNOVÁ, Z.: Dynamic response of structures due to industrial machinery effects. 20th International Congress on Sound and Vibration 2013, ICSV 2013., Bangkok; Thailand; 7 July 2013 through 11 July 2013; Code 103420, Volume 4, 2013, Pages 3313-3320
- [3] KRÁLIK, J., KRÁLIK JR., J.: *Probability assessment of analysis of high-rise buildings seismic resistence*, Advanced Materials Research, Volume 712-715, 2013, Pages 929-936.
- [4] MALHOTRA, P. K., WENK, T., WIELAND, M.: Simple procedure for seismic analysis of liquid-storage tanks, Structural Engineering International, No. 3, 2000, s. 197-201.
- [5] MELCER, J.: *Experimental testing of a bridge*. Applied Mechanics and Materials, Volume 486, 2014, Pages 333-340.
- [6] MIHALIKOVÁ, M., NÉMET, M., ZUBKO, P., VOJTKO, M.: Influence of strain rate on automotive steel sheet breaking. Chemicke Listy. Volume 105, Issue 17, 2011, Pages s836-s837.
- [7] SUMEC, J., JENDŽELOVSKÝ, N.: Seismic analysis of reinforced concrete water tank. In: Proceedings of DYN-WIND 2008. SvF ŽU, Papradno-Podjavorník, May 26-29, 2008, pp. 63-66. ISBN 978-80-8070-827-6.
- [8] EN 1998-4: 2006 Eurocode 8. Design of structures for earthquake resistance. Part 4: Silos, tanks and pipelines, CEN, Brussels, 2006.

Reviewers:

Prof. Ing. Juraj Králik, PhD., Department of Structural Mechanics, Faculty of Civil Engineering, Slovak University of Technology in Bratislava.

Ing. Vladimíra Michalcová, Ph.D., Department of Structural Mechanics, Faculty of Civil Engineering, VŠB-Technical University of Ostrava.

Sborník vědeckých prací Vysoké školy báňské - Technické univerzity Ostrava

číslo 1, rok 2014, ročník XIV, řada stavební

článek č. 13

Juraj KRÁLIK¹

PROBABILISTIC NONLINEAR ANALYSIS OF REINFORCED CONCRETE BUBBLER TOWER STRUCTURE FAILURE

Abstract

This paper describes the reliability analysis of concrete bubbler tower structure of nuclear power plant with the reactor WWER 440 under high internal overpressure. There is showed summary of calculation models and calculation methods for the probability analysis of the structural integrity considering degradation effects and high internal overpressure. The uncertainties of the resistance and the calculation model were taking in the account in the RSM method.

Keywords

Probability, Nonlinearity, Failure, Reinforced Concrete, NPP, ANSYS, RSM.

1 INTRODUCTION

The International Atomic Energy Agency set up a program [2, 7 and 22] to give guidance to its member states on the many aspects of the safety of nuclear power plant (NPP) reactors. The risk of the NPP performance from the point of the safety must be calculated by consideration of the impact of the all effects during plant operation. The probabilistic safety analysis (PSA) is one from the effective methods to analyze the safety and reliability of the NPP:

- (1) Accident frequency (systems) analysis,
- (2) Accident progression analysis,
- (3) Radioactive material transport (source term) analysis,
- (4) Offsite consequence analysis,
- (5) Risk integration.

The final stage of the PSA is the assembly of the outputs of the first four steps into an expression of risk as follows:

$$Risk_{In} = \sum_{h=1}^{n_{EE}} \sum_{i=1}^{n_{ADS}} \sum_{j=1}^{n_{ADS}} \sum_{k=1}^{n_{STG}} f_n \left(IE_h \right) P_n \left(IE_h PDS_i \right) P_n \left(PDS_i APB_j \right) P_n \left(APB_j STG_k \right) C_{ik}$$
(1)

where *n* is the sample number in the LHS scheme; n_{IE} - the number of initiating events; n_{PDS} - the number of plant damage states; n_{APB} - the number of accident progression bins; n_{STG} - the number of source term groups; $Risk_{In}$ - the risk of consequence measure *I* for sample *n* (consequences/year); $f_n(IE_h)$ - the frequency (per year) of initiating event *h* for sample n; $P_n(IE_h \Rightarrow PDS_I)$ - the conditional probability that initiating event *h* will lead to plant damage state *i* for sample *n*; $P_n(PDS_I \Rightarrow APB_J)$ - the conditional probability that plant damage state *i* will lead to accident progression bin 1 for sample n; $P_n(APB_J \Rightarrow STG_k)$ - the conditional probability that accident progression bin *j* will lead to source term group *k* for sample *n* and C_{ik} - the expected value of consequence measure *i* conditional on the occurrence of source term group *k*.

¹ Prof. Ing. Juraj Králik, Ph.D., Department of Structural Mechanics, Faculty of Civil Engineering, Slovak University of Technology in Bratislava, Radlinského 11, Bratislava 813 68, e-mail: juraj.kralik@stuba.sk.

The risk integration is shown in matrix formulation in Figure 1. The approximate numbers of PDSs, APBs, and STGs, and the number of consequences used in the different NUREG-1150 [20] PSAs are 20, 1000, 50 and 8, respectively.



The general purpose of the probability analysis of the containment integrity [15 and 16] was to define the critical places of the structure elements and to estimate the structural collapse.



Fig. 2: Calculation model of NPP building

Following the results from Loss of Coolant Accident (LOCA) scenarios the probability check of the structural integrity may be realized for the random value of the loads and material properties by modified LHS method. For a complex analysis of the concrete structure for different kind of loads, ANSYS software and the program CRACK (created by Králik) [15 and 16] were provided to solve this task. The building of the power block was idealized with a discrete model consisting of 28 068 elements with 104 287 degrees of freedom (DOF) (see Fig.2).

The international standard NUREG-1150 [20] PSA defines the principal steps for the calculation of the risk of the NPP performance by LHS probabilistic method.

2 PROBABILISTIC SAFETY ASSESSMENT

Probabilistic safety assessment (PSA) level 2 [2, 7 and 16] is a systematic way to study, from the point of view of safety and with the restrictions of a specific methodology, the behaviour of a system (NPP under accident or quasi-accident conditions) when uncertainty is present and widespread. The starting point of level 2 is the result of a PSA level 1. The results of such study is a huge quantity of accident sequences that are grouped, according to different criteria regarding accident characteristics and potential containment responses, into a manageable number of plant damage states (PDS). After an appropriate screening of very low probability sequences, the probabilistic progression of accidents is studied using event trees, commonly known as accident progression event trees (APET) or containment event trees (CET), under two possibilities: large event trees (virtually all questions regarding severe accident are included as top events) and small event trees (only main questions regarding severe accident phenomena are included as top events). The use of these event trees leads to getting a huge quantity of end states, that have to be grouped, as in the case of PDS's, to get a more manageable set of release categories, later used to estimate all the variety of different possible source terms. The appropriate combination of release categories and corresponding frequencies allows estimating the risk associated to the NPP. Uncertainty is really pervasive in a PSA level 2. The first matter of concern is the starting point. A lot of methods and tools do exist to study the influence of uncertainties on the results of severe accidents computer codes in use for PSA level 2. So we could say that uncertainty arises in three areas of the PSA level 2 - 1) Definition of plant damage states, 2) Simulation of the problem, including event tree construction and models (computer codes) used to simulate the physical-chemical processes involved, and 3) data used to feed models. This is what classically has been considered scenario, model and data uncertainty.

2.1 Plant damage state definition and quantification

The plant damage states (PDS) form the starting point for the level 2 analysis [16]. Each PDS consists of a collection of core damage sequences, which are expected to behave similarly following the onset of core damage. The purpose of grouping core damage sequences into PDS is to make the level 2 analysis more manageable and understandable. Accident progression was the first parameter considered in the grouping process. Four main source term groups were selected depending on the sequence type: a large LOCA, transients or small LOCA, interfacing LOCA, and open reactor (or fuel pool) sequences. All other parameters were considered within each of these main groups.

2.2 Probabilistic analysis of NPP structures

The containment overpressure study is part of the Level 2 PSA [2 and 7]. Consequently, the containment's pressure capacity must be expressed in probabilistic terms in such a form that it can be used as input in the overall probabilistic risk assessment.

The methodology of probabilistic analysis of integrity of reinforced concrete structures of containment results from requirements [7 and 16] and experiences from their applications [15].

The probability of loss integrity of reinforced concrete structure hence it will be calculated from the probability of no accomplishment condition of reliability *RF*,

$$P_f = P(RF < 0) , \qquad (2)$$

where the reliability condition is defined by [4] in form

$$RF = R - E > 0$$
, various in the form relative $RF = R/E - 1 > 0$ (3)

where R is resistance of structure, E - effect of action defined by its density. In the case of calculus the resistance of reinforced concrete structure leads off the condition of section integrity.

The pressure value could be considered to be the containment ultimate capacity. This pressure capacity value can be determined through structural analysis methods. The conventional analysis is typically based on design configuration and specified design material property values, and as such is **deterministic** and the computed capacity is a **point estimate** of the capacity.

Approximation is always made in the analysis and the actual as-built building geometry and material properties deviate from the idealized design used as basis of the analysis. The uncertainty involved to the calculation has following two important implications:

- 1. The capacity description must include a quantified description of the uncertainty inherent in the point estimate. The fragility curves must be defined for Level 2 PSA overpressure studies.
- 2. The capacity estimates must be determined not only for the weakest link (with lowest point estimate), but also for other weak links along the pressure boundary. Once point estimates and the associated distributions, as well as the level of correlation between the different failure

modes, the aggregate overall description of the containment pressure capacity can be computed using probabilistic method.

Information from design calculation and engineering judgment may identify parts of the containment or doors, hatch covers, etc., as candidates limiting the overall containment pressure capacity. The components/mechanisms with low enough capacities must be analyzed to the level of detail considered reasonable for the purpose, eliminating conservatism as possible.

3 SAFETY ANALYSIS OF THE NPP STRUCTURES DUE TO LOCA ACCIDENT

The accident scenario was defined in accordance with code MELCOR 1.8.5 [12]. The guillotine cutting of the \emptyset 13mm, \emptyset 32mm, \emptyset 71mm and the large break LOCA of the 2× \emptyset 500mm (Fig.3) cold leg in the containment were considered.

The temperature in the containment increased during the LOCA accident. The peaks of the temperature are equal to 160°C in the Box SG (Steam generator) by the results of thermodynamic analysis. The effect of these temperature peaks is minimal during the accident and the acting of the overpressure loads. In the case of the harmonic amplitude of temperature the phase angle for concrete walls is superior to 24 hours. The strength of the concrete after LOCA accident increases about to 10% in consequence of the temperature loads during the accident. The peak of the pressure in the Box SG is equal to 200kPa (absolute value).



Fig. 3: Overpressure in the Box SG for guillotine cutting of pipe 2ר500mm [12]

3.1 Failure pressure of containment

The failure pressure p_u can be determined from the assumption, that failure occurs when in the structure the mean resistance counted on the mean material strength R is reached assuming linear relation between the internal overpressure p and action effects E corrected by the action effect reducing coefficient

$$p_{u} = p_{LOCA} k_{r} \left[\left(R - E_{o} \right) / E_{p} \right]$$
⁽⁴⁾

where p_u is failure pressure, p_{LOCA} is pressure in the case of LOCA effect ($p_{LOCA} = 150$ kPa), k_r is reduction factor based on assumption of the stress redistribution due to nonlinear behavior of material, R is structure resistance (capacity), E_o is effect of initial action (dead loads, temperature, performance loads), E_p is effect of pressure.

3.2 Failure pressure of containment

For the probability analysis of the steel and reinforced structures of NPP containment the statistical characteristic of material properties must be defined. In the case than the site-specific material strength test data are available median strength and variability can be obtained from the sample statistics. However, in the absence of site specific test data in the current study, the median material strengths and variability were estimated based on the nominal specification values adjusted based on generic data in the literature and experience from other containment investigations. The median values and variability were characterized assuming that all of the material strengths could be characterized by a lognormal distribution.

3.3 Modelling uncertainty

Uncertainties exist in the estimated pressure capacities due to differences between the analytical idealization of the structure and the real conditions. There are various possible sources of modelling uncertainties. The quality of calculation FEM model – meshing, approximation, boundary conditions – it has significant influence to value of internal force distributions. The uncertainty of internal force distribution, failure criteria, and used empirical formulae must be investigated. However, in many instances, the evaluation of these uncertainties would require very detailed analysis and/or extensive data which may not be available. As a result, it is necessary to use subjective evaluation and engineering judgment to estimate these uncertainties.

It is well known [14 and 16] that due to non-linear and especially plastic behaviour of reinforced concrete structure the different codes allow to take into account the redistribution of internal forces, primarily the bending moments in a different extent depending on the neutral axis depth, the quality of the concrete, the plastic behaviour of the reinforcement. The amount of bending moments redistributed in the codes is between 15-30%. The results are such a situation, where the capacity of all the cross sections of maximal moments is fully exhausted.

In the case of high internal overpressure the containment concrete walls and plates are loaded by tension forces and bending moments. The redistribution of internal normal forces in a box-like reinforced concrete structure is possible, even in case of tension if the capacities of the walls/slabs in one direction are not uniformly exhausted. Of course, the redistribution of the bending moments is possible too. The very high stresses of the range of the mean strengths cause high plastic deformations which also contribute to the redistribution.

This effect may be considered by conservative approach using reduction factor k_{red} . Summing up the foregoing arguments it was assumed that a $k_{red} = 1.2$ which is consistent with a redistribution between 15-30 % [16].

4 EXPERIMENTAL TEST OF CONTAINMENT AIR TIGHTNESS

The bubbler tower (BT) is the most important structure in the case of the accident of the pipe coolant system in the Reactor hall (Fig.2). The extreme pressure and the steam radioactivity are eliminated in the space of BT. In this paper the nonlinear analysis of the concrete BT structure resistance for mean values of loads, material properties and higher overpressure than BDBA (Beyond Design Basic Accident) is presented. On the base of the IAEA requirements [14] the experimental test of the air tightness of hermetic zone must be realized each 10 years of NPP performance.

The stiffness of structure is tested during this experiment too. The experimental results were compared with the results of numerical analysis of the structures on the FEM calculation model. For a complex analysis of the concrete structure for different kind of loads, ANSYS software were provided to solve this task.

The building of the nuclear power block (NPP) was idealized with a discrete model consisting of 28.068 elements with 104.287 DOF (Fig.4). The air tightness of the hermetic zone and stiffness resistance of the structures was tested by compression of the interior space of NPP. The pressure increase with the speed of 25kPa by 2hours and each compression step (a'25kPa) were stabilized during 2hour.



Fig. 4: Calculation FEM model of the NPP building

The pressure increase from the 0kPa to 100kPa and since the pressure decrease to 0kPa with the same tempo. The results of the measurements were recorded at pressure 0, 25, 50, 75 and 100kPa. The inspections of the critical places were realized by the experts (STU Bratislava, VUEZ Levice, VUJE Trnava, SE Bratislava) after each changing step.



Fig. 5: Bubbler tower wall and roof measured deflection

The optical and mechanical methods were used to check the deformation of structures in the critical places during the pressure change inside the hermetic zone. The critical places of the structures were determined by the numerical analysis [14]. The mechanical indicators were installed in the wall centre of the gas-tank and the roof-plate of the bubbler tower.

5 NUMERICAL ANALYSIS

The safety and reliability of the NPP structures of the hermetic zone must be tested on the resistance to the LOCA accident. The DBA a BDBA loads were defined from the scenarios of the guillotine cutting of the \emptyset 13 mm, \emptyset 32 mm, \emptyset 71 mm and 2× \emptyset 500 mm cold leg in the Box SG. The peaks pressure and temperature were considered on the base of the scenarios in program MELCOR by VUJE Trnava. The BDBA load case was defined for the pressure 150 kPa following

$$E = D + L + P_a + 0.7 T_o + R_a$$
(5)

where D - dead loads, L - live loads, T_o - performance temperature, R_a - reaction of the equipments, P_a - local effects of the LOCA.

The behavior of the intensity of bending moments m_x under pressure 150kPa is presented in Fig.6. The most exposed walls on the tension are the walls in the modulus "10" and "17" and wall bottom in the modulus "*E*". The most exposed walls on the bending are the walls in the modulus "10" and "17" in the corner with wall in module "*D*" and wall bottom in the modulus "*E*" (Fig. 6).



Fig. 6: Bending moments m_x under pressure 150kPa

6 NONLINEAR SOLUTION

The presented constitutive model is a further extension of the smeared crack model [1, 3, 21 and 23], model of the smeared reinforcements [14 and 21], which was developed in [15]. Following the experimental results [3, 11 and 18] a new concrete cracking layered finite shell element was developed and incorporated into the ANSYS system [16] using program CRACK. The layered approximation and the smeared crack model of the shell element are proposed. The matrix of the material stiffness is obtained from the proposition of smeared reinforcement and the rotated cracks in the direction of principal strain in each shell layer. The stiffness matrix of reinforced concrete for the l^{th} -layer can be written in the following form

$$\begin{bmatrix} D_{cr}^{l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{c.\sigma}^{l} \end{bmatrix}^{T} \begin{bmatrix} D_{cr}^{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{c.\varepsilon}^{l} \end{bmatrix} + \sum_{j'=1}^{n} \begin{bmatrix} T_{s}^{l} \end{bmatrix}^{T} \begin{bmatrix} D_{s}^{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{s}^{l} \end{bmatrix}^{T}$$
(6)

where $[T_{c.\sigma}]$, $[T_{c.\varepsilon}]$, $[T_s]$ are the transformation matrices for concrete and reinforcement separately.

The limit of damage at a point was controlled by the values of the so-called crushing or total damage function F_u . The modified Kupfer's condition [18] for l - layer of section is following

$$F_{u}^{l} = F_{u}^{l} \left(I_{\varepsilon_{1}}; J_{\varepsilon_{2}}; \varepsilon_{u} \right) = 0 \quad \text{and} \quad F_{u}^{l} = \sqrt{\beta \left(3J_{\varepsilon_{2}} \right) + \alpha I_{\varepsilon_{1}}} - \varepsilon_{u} = 0 \tag{7}$$

where I_{ε_1} , J_{ε_2} are strain invariants; and ε_u is an ultimate total strain extrapolated from uniaxial test results; α , β are material parameters determined from Kupfer's experiment results ($\beta = 1.355$, $\alpha = 0.355\varepsilon_u$). In the rotated crack model, the direction of the principal stress coincides with the direction of the principal strain. If the principal strain axes rotate during the loading the direction of the cracks rotates, too.

The failure function [16] of the whole section will be obtained by the integration of the failure function through to whole section in the form

$$F_{u} = \frac{1}{h} \int_{0}^{h} F_{u}^{l} \left(I_{\varepsilon_{1}}; I_{\varepsilon_{2}}; \varepsilon_{u} \right) dz = \frac{1}{h} \sum_{l=1}^{Nlay} F_{u}^{l} \left(I_{\varepsilon_{1}}; I_{\varepsilon_{2}}; \varepsilon_{u} \right) h_{l}$$

$$\tag{8}$$

where h_l is the thickness of the shell layer and h is the total shell thickness. This failure condition is determined by the maximum strain ε_s of the reinforcement steel in the tension area (max(ε_s) $\leq \varepsilon_{sm} = 0.01$) and by maximum concrete crack width w_c (max(w_c) $\leq w_{cm} = 0.3$ mm).

In order to ensure the co-axiality of the principal strain axes with the material axes the tangent shear modulus G_t is calculated as

$$G_t = \frac{\sigma_{c1} - \sigma_{c2}}{2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)} \tag{9}$$

The nonlinear solution was realized using the layered shell element SHELL91 from the ANSYS library and program CRACK with concrete nonlinear model [15 and 16] and the experimental results [11]. The comparison of the influences of the plastic deformation and boundary effects is presented in the Fig. 7. The wall of the 4. gas-tank has dimension 39.0/13.61/1.5 m. The simple support and clamped was investigated. Also, the elastic and plastic behavior of concrete material was considered too.



Fig. 7: Comparison the wall deflection of 4.gas-tank for elastic and plastic solution

7 PROBABILISTIC ANALYSIS OF THE STRUCTURE FAILURE

Recent advances and the general accessibility of information technologies and computing techniques give rise to assumptions concerning the wider use of the probabilistic assessment of the reliability of structures through the use of simulation methods [5, 6, 8, 9, 13, 16, 17, 19 and 24].

Reliability can be defined as the probabilistic measure of assurance of performance with respect to some prescribed conditions [4, 5, 6, 10 and 19]. A condition can refer to an ultimate limit state (such as collapse) or serviceability limit state (such as excessive deflection and/or vibration).

The probability of failure can be defined by the simple relation

$$P_f = P[R < E] = P[(R - E) < 0] = P[RF < 0]$$
(10)

where *RF* is a reliability function, *E* is a loading effects and *R* is a resistance of structure.

The reliability function RF can be expressed generally as a function of the stochastic parameters X_1 , X_2 to X_n , used in the calculation of R and E.

$$RF = g(X_1, X_2, ..., X_n)$$
(11)

The failure function $g({X})$ represents the condition (reserve) of the reliability, which can either be an explicit or implicit function of the stochastic parameters and can be single (defined on one cross-section) or complex (defined on several cross-sections, e.g., on a complex finite element model).

For a system limit state defined by $g(X_1,..., X_m) = 0$, where X_i are the basic variables, the failure probability is computed as the integral over the failure domain (g(X) < 0) of the joint probability density function of X. In general, the failure of any system can be expressed as a union and/or intersection of events. The failure of an ideal series (or weakest link) system [15] may be expressed following

$$F_{\text{sys}} = F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_m \tag{12}$$

in which \cup denotes the Boolean OR operator.

In the case of simulation methods the failure probability is calculated from the evaluation of the statistical parameters and theoretical model of the probability distribution of the reliability function Z = g(X). The failure probability is defined as the best estimation on the base of numerical simulations in the form

$$p_{f} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} I \left[g(X_{i}) \le 0 \right]$$
(13)

where N in the number of simulations, g(.) is the failure function, I[.] is the function with value 1, if the condition in the square bracket is fulfilled, otherwise is equal to 0.

Variation of the failure function can be defined by Melchers [17] in the form

$$s_{p_{f}}^{2} = \frac{1}{(N-1)} \left\{ \frac{1}{N} \left[\sum_{i=1}^{N} I^{2} \left[g\left(X_{i} \right) \le 0 \right] \right] - \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} I \left[g\left(X_{i} \right) \le 0 \right] \right]^{2} \right\}$$
(14)

The various forms of analyses (statistical analysis, sensitivity analysis, probabilistic analysis) can be performed. Most of these methods are based on the integration of Monte Carlo (MC) simulations. Three categories of methods have been presently realized - *Direct methods* (Importance Sampling - IS, Adaptive Sampling - AS, Direct Sampling - DS), *Modified methods* (Conditional, Latin Hypercube Sampling - LHS) and *Approximation methods* (Response Surface Method - RSM). The advantages and drawbacks of these methods are described in detail in the work [17].

Approximation methods - Response Surface Methods are based on the assumption that it is possible to define the dependency between the variable input and the output data through the approximation functions in the following form:

$$Y = g({X}) = c_o + \sum_{i=1}^n c_i X_i + \sum_{i=1}^n c_{ii} X_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j>i}^n c_{ij} X_i X_j + \varepsilon$$
(15)

where c_o , c_i , c_{ii} , and c_{ij} are regression coefficients which depend on $\{\hat{X}\}$ and the derivatives of $g(\{X\})$ in $\{\hat{X}\}$. Based on Equation (14), free types of polynomial are defined depending on the terms considered – full quadratic, reduced quadratic or linear.

On the base of experimental design, the unknown coefficients are determined due to the random variables selected within the experimental region. The true performance function $g({X})$ or ${Y}$ in Equation (14) can be represented in the matrix form as

$$\{Y\} = [X]\{c\} + \{\varepsilon\}$$
(16)

where $\{Y\}$ is the vector of actual responses, and [X] is the coefficient matrix.

The least squares estimates $\{\hat{c}\}$, defined as c_0 , c_i , c_{ii} and c_{ij} in Equation (15), are obtained by solution of the least square (regression) analysis, i.e.,

$$\left\{\hat{c}\right\} = \left(\left[X\right]^{T}\left[X\right]\right)^{-1}\left[X\right]^{T}\left\{Y\right\}$$
(17)

The design includes several statistical properties such as orthogonality that makes the calculation of $[X]^{T}[X]$ term simple and rotability that insures the uniform precision of the predicted value.



Fig. 8: Distribution schemes - CCD method

The central composite design (CCD) is based on the full quadratic polynomial. Hence it is composed of 2^k factorial design, n_o centre points and 2k axial portion of design.

The total number of design points is $N=2^{k}+2k+n_{o}$ which is much more than the number of the coefficients p=(k+1)(k+2)/2. The graphical representation for k=3 and the matrix form of the coded values are represented in Figure 8.

8 PSA ANALYSIS OF STRUCTURE FAILURE

The probability of BT-structure failure is calculated from the probability of the reliability function RF[16] in the form,

$$P_f = P(RF < 0) \tag{18}$$

where the reliability condition is defined depending on concrete failure condition (4) as follows

$$RF = -F_u \left(I_{\varepsilon_1}; J_{\varepsilon_2}; \varepsilon_u \right) = 1 - F_u \left(I_{\varepsilon_1}; J_{\varepsilon_2}; \varepsilon_u \right) / \varepsilon_u , \qquad (19)$$

where failure function $F_u(.)$ was considered in the form (7).

The previous design analysis, calculations and additions include various uncertainties, which determine the results of probability bearing analysis of containment structural integrity is presented in Table 1. On the base of mentioned inaccuracy of input data for probabilistic analysis of loss integrity of reinforced concrete containment structures were determined their mean values and standard deviations, various the variable parameters for normal and lognormal distribution.

On the base of the RSM simulation method the vector of the deformation parameters $\{r_s\}$ is defined for *s*-simulation in the form

$$\{r_s\} = \left[K\left(E_s, \sigma_s, F_{\sigma,s}\right)\right]^{-1} \left\{F\left(G_s, P_s, T_s\right)\right\}$$
(20)

and the strain vector

$$\{\varepsilon_s\} = [B_s] \{r(G_s, P_s, T_s, E_s, \sigma_s, F_{\sigma,s})\}$$
(21)

where F_{σ} is the Kupfer's yield function of the concrete defined in the stress components.

	Loads			Model		
	Dead load	Pressure	Temperature	Action uncertainty	Resistance uncertainty	
Characteristic values	G_k	P_k	T_k	E_k	R_k	
Variables	g_{var}	p_{var}	t var	e _{var}	r _{var}	
Histogramtype	Ν	Ν	Ν	N/LN	N/LN	
Mean value μ	1	1	1	1	1	
Deviation σ [%]	10	10	10	10	15	
Minimum value	0.621	0.621	0.621	0.621/0.611	0.271/0.498	
Maximum value	1.376	1.376	1.376	1.376/1.614	1.714/1.973	

Table 1: Variable parameters of the input data [16]

9 CONCLUSION

This paper proposed the methodology of the PSA 2 level analysis of the NPP hermetic structures penetration under accident events. The general purpose of the probabilistic analysis of the containment integrity was to define the critical places of the structure elements and to estimate the structural collapse. The uncertainties of the loads level (long-time temperature and dead loads), the material properties (concrete cracking and crushing, reinforcement, and liner) and other influences following the inaccuracy of the calculated model and numerical methods were considered. Resulting from variability of input quantity 25 simulation steps on the base of RSM method under system ANSYS-CRACK was realized [16]. The probability of loss BT-structure integrity was calculated from 10⁶ Monte Carlo simulations for 25 steps of approximation method RSM on the full structural FEM model. The probability analysis was realized for structural FEM model considering the concrete cracking. The mean value of the failure pressure is equal to 609.7kPa and its 5% kvantil is equal to 369.3kPa.

ACKNOWLEDGEMENT

This article was created with the support of the Ministry of Education, Science, Research and Sport of the Slovak Republic within the Research and Development Operational Programme for the project "University Science Park of STU Bratislava", ITMS 26240220084, co-funded by the European Regional Development Fund.

REFERENCES

- [1] BAŽANT, Z. P. PANG, S. D. VOŘECHOVSKÝ, M. AND NOVÁK. D. Energetic-statistical size effect simulated by SFEM with stratified sampling and crack band model. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* (Wiley), 71(11):1297-1320, 2007.
- [2] CSNI R.1997/11 *Level 2 PSA Methodology and Severe Accident Management*, Prepared by the CNRA Working Group on Inspection Practices (WGIP), OCDE/GD(97)198, 1997.
- [3] ČERVENKA, V. Constitutive Model for Cracked Reinforced Concrete, ACI Journal 82 (1985) 877.
- [4] EUROCODE 1990. Basis of Structural Design. ENV 1991-1-1, CEN 2002.
- [5] HALDAR, A. & MAHADEVAN, S. Probability, Reliability and Statistical Methods in Engineering Design, John Wiley & Sons., New York, 2000.
- [6] HOLICKÝ,M. & MARKOVÁ,J. *Base of reliability theory and risk evaluation*. ČVUT Praha, (in Czech), 2005.
- [7] IAEA. Development and Application of Level 2 Probabilistic Safety Assessment for Nuclear Power Plants. Draft Safety Guide DS393, Draft 6, February, 2008.
- [8] JANAS, P., KREJSA, M., KREJSA, V. Structural Reliability Assessment Using Direct Determined Probabilistic Calculation. *In Proceedings of the Twelfth International Conference on Civil, Structural and Environmental Engineering Computing*, paper 72, Topping, Costa

Neves & Barros (eds), Funchal, Madeira, Portugal. Civil-Comp Press, 2009. ISBN 978-1-905088-31-7.

- [9] JANAS, P., KREJSA, M., KREJSA, V. Using the Direct Determined Fully Probabilistic Method for determination of failure. *In Proceedings of the European Safety and Reliability Conference, Esrel 2009.* 7-10 september 2009, Prague. Reliability, Risk and Safety: Theory and Applications, 2010 Taylor & Francis Group, London. pp 1467-1474 (8 p).
- [10] JCSS-OSTL/DIA/VROU-10-11-2000, Probabilistic Model Code, Part 1 Basis of Design, Working material, http://www.jcss.ethz.ch/, 2001.
- [11] JERGA,J. & KRIŽMA,M. Assessment of Concrete Damage. Building Research Journal, Vol. 54, No. 3-4, 2006, pp. 211-220.
- [12] JURIŠ, P. JANČOVIČ, J. Accident iniciated by leak coolant medium for EMO1, 2. LOCA 2x500mm. VÚJE, a.s. V01-TS/2871/0220/2006.15, 2006.
- [13] KALA, Z. Sensitivity analysis of steel plane frames with initial imperfections, *Engineering Structures*, 33, 8, pp.2342-2349, 2011.
- [14] KAZAKOV K., A.YANAKIEVA, Computational Effectivness of the Augmented Lagrange Method in the FE Simulations of Pull-out of Steel Bar and Concrete, *Comptes rendus de l'Académie bulgarie des Sciences, Tome 65 (2), 219-224, 2012.*
- [15] KRÁLIK, J. Probability Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Containment Damage due to High Internal Over-pressure. *Engineering mechanics*. EACR Brno, Vol.12, No.2, 2005, pp.113-125.
- [16] KRÁLIK, J. Safety and Reliability of Nuclear Power Buildings in Slovakia. Earthquake-Impact-Explosion. Edition STU Bratislava, 2009, pp.305.
- [17] KRÁLIK, J. Reliability Analysis of Structures Using Stochastic Finite Element Method, Edition STU Bratislava, 2009, pp.138.
- [18] KUPFER,H., HILSDORF, H. K. & RUESCH, H. Behavior of Concrete Under Biaxial Stresses, *Journal ACI*, Proc. V.66, No.8, 1969, pp.656-666.
- [19] MELCHERS, R.E. Structural Reliability: Analysis and Pre-diction, John Wiley & Sons, Chichester, U.K., 1999.
- [20] NUREG-1150. Severe Accident Risks An Assessment for Five US Nuclear Power Plants, Summary Report, Final Summary Report, NUREG-1150, Vol.1 and 2, December 1990.
- [21] OÑATE, E. OLLER, S. OLIVER, J. LUBLINER, J. A Constitutive Model for Cracking of Concrete Based on the Incremental Theory of Plasticity, *Engineering Computation* 5, pp. 309, 1993.
- [22] SALAJKA, V. HRADIL, P. KALA, J. Assess of the Nuclear Power Plant Structures Residual Life and Earthquake Resistance, *In Proc. The Second International Conference on Engineering and Technology Innovation (ICETI 2012)*, Kaohsiung, Taiwan, November 02-06, 2012, pp.4
- [23] SUCHARDA, O., BROŽOVSKÝ, J. Effect of Selected Parameters of Non-Linear Analysis of Concrete Structures. *Transactions of the VŠB - Technical University of Ostrava*, 2012, roč. 12, č. 1, s. 1-9.
- [24] VEJVODA, S., KERŠNER, Z., NOVÁK, D. & TEPLÝ, B. Probabilistic Safety Assessment of the Steam Generator Cover, In Proc. of the 17th International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology (SMiRT 17), Prague, CR, August 17-22, 2003, 10 pp.

Reviewers:

Prof. Ing. Zbyněk Keršner, CSc., Institute of Structural Mechanics, Faculty of Civil Engineering, Brno University of Technology.

Doc. Ing. Pustka David, Ph.D., Department of Building Structures, Faculty of Civil Engineering, VŠB-TU Ostrava.

číslo 1, rok 2014, ročník XIV, řada stavební

článek č. 14

Jan KREJSA¹, Milan HOLICKÝ², Miroslav SÝKORA³

UNCERTAINTY IN SHEAR RESISTANCE OF REINFORCED CONCRETE BEAMS WITH STIRRUPS – COMPARISON OF EN 1992-1-1 AND *fib* MC 2010 APPROACHES

NEJISTOTY SMYKOVÉ ODOLNOSTI ŽELEZOBETONOVÝCH NOSNÍKŮ S TŘMÍNKY – POROVNÁNÍ POSTUPŮ PODLE EN 1992-1-1 A *fib* MC 2010

Abstract

The submitted contribution is focused on the model uncertainty related to shear resistance of reinforced concrete beams with stirrups. Using available test results, effects of basic variables on the model uncertainty are analysed. Considering the section-oriented models provided in EN 1992-1-1 and in the new *fib* Model Code 2010 are critically compared. Proposed probabilistic description of the model uncertainty consists of the lognormal distribution having the mean and coefficient of variation dependent on the considered model. Strength of shear reinforcement seems to be the most important basic variable for most of the considered models.

Keywords

Model uncertainty, shear resistance, reinforced concrete, beam.

Abstrakt

Příspěvek je zaměřen na modelové nejistoty smykové odolnosti železobetonových prvků s třmínky. S využitím dostupných experimentálních dat se porovnávají nejistoty modelů v EN 1992-1-1 a *fib* Model Code 2010. Jsou identifikovány veličiny významně ovlivňující modelovou nejistotu. Teoretický popis nejistot se opírá o lognormální rozdělení s průměrem a variačním koeficientem závislým na použitém modelu. Pro většinu uvažovaných modelů je pevnost smykového vyztužení nejvýznamnější základní veličinou.

Klíčová slova

Modelová nejistota, smyková odolnost, železobeton, nosník.

1 INTRODUCTION

Previous studies [1-4] indicated that structural resistances can be predicted by appropriate modelling of material properties, geometry variables and uncertainties associated with an applied model. The effect of variability of materials and geometry has been extensively investigated and is

¹ Bc. Jan Krejsa, Department of Structural Reliability, Klokner Insitute, Czech Technical University in Prague, Solinova 7, 166 08, Prague-Dejvice, phone: (+420) 224 353 504, e-mail: jan.krejsa@klok.cvut.cz.

² Prof. Ing. Milan Holicky, Ph.D. DrSc., Department of Structural Reliability, Klokner Insitute, Czech Technical University in Prague, Solinova 7, 166 08, Prague-Dejvice, phone: (+420) 224 356 285, e-mail: milan.holicky@klok.cvut.cz.

³ Ing. Miroslav Sykora, Ph.D., Department of Structural Reliability, Klokner Insitute, Czech Technical University in Prague, Solinova 7, 166 08, Prague-Dejvice, phone: (+420) 224 353 850, e-mail: miroslav.sykora@klok.cvut.cz.

relatively well understood. However, improvements in the description of model uncertainties are still needed [4].

The presented study is focused on the model uncertainties of the shear resistance of beams with stirrups. Model uncertainty in the shear resistance according to the new *fib* Model Code [5] (hereafter "MC 2010") is analysed. The results are then critically compared to those obtained in a previous study [6] for the model in EN 1992-1-1 [7] (hereafter "EN 1992-1-1"). Beams not affected by degradation are taken into account.

2 MODEL UNCERTAINTY

The model uncertainty should always be clearly associated with an assumed resistance model. In common cases actual resistance can be estimated as a product of the model uncertainty and resistance obtained by the model. In this study the model uncertainty θ is considered to be a random variable. The multiplicative relationship for θ is assumed in accordance with [8]:

$$R = \theta R_{\text{model}}(X) \tag{1}$$

where:

- R denotes the response of a structure (actual resistance estimated from test results and structural conditions);
- R_{model} model resistance (estimate of the resistance based on a model); and

 $X^{\mathrm{T}} = (X_1, \ldots, X_m)$ – vector of basic variables X_i .

Assuming lognormal distribution with the origin at zero (hereafter simply "lognormal distribution") for *R* and $R_{\text{model}}(\cdot)$, the model uncertainty given by relationship (1) is also lognormal.

The model uncertainty θ in general depends on basic variables X. Influence of individual variables on θ can be assessed by a regression analysis [9]. It is also indicated that the model describes well the essential dependency of R on X only if the model uncertainty:

- Has either a suitably small coefficient of variation (how small is the question of the practical importance of the accuracy of the model) or
- Is statistically independent of the basic variables (X_1, \ldots, X_m) .

More information about the model uncertainties can be found in [6,10,11].

3 SHEAR RESISTANCE ACCORDING TO THE CONSIDERED MODELS

Three levels of approximation are distinguished in the models for shear resistance of reinforced concrete beams according to MC 2010:

- MC 2010 Level 1 (hereafter "Level 1") requires few input data and is simple to evaluate.
- For Level 2 more input data are needed and the evaluation is more complex than in Level 1.
- Level 3 requires the same input data like Level 2; however its evaluation is the most laborious.

Evaluation of the shear resistance for all the levels is based on analytical relationships that are essentially easy to compute (see relationship (2) below and Annex A). Input data for the three levels are summarised in Tab. 1. In MC 2010 it is expected that Level 1 leads the most conservative results, Level 2 is less conservative and Level 3 provides the most accurate results.
Basic variabl	es for which (data are included in the database	Min.	Max.	Applied in model	
a/d (-)		shear span-to-depth ratio	2.49	5.05	-	
$b_{ m w}(m mm)$		smallest width of a cross-section in the tensile area	76	457 all models		
<i>d</i> (mm)		effective depth	95	1200	all models	
$f_{\rm c}$ (M	Pa)	concrete compressive strength	12.8	125	all models	
f _{yw} (N	(IPa)	yield strength of stirrups	182 820 all 1		all models	
s (mm)		stirrup spacing	48	48 600		
$V_{\rm fail}$ (kN)	shear force at failure	15.6 1172 Leve		Levels 2, 3	
$\rho_1 = A_{\rm sl} / (b_{\rm v})$	$_{w} d) (\%) ^{(1)}$	longitudinal reinforcement ratio	0.5	4.54	Levels 2, 3	
$\rho_{\rm w} = A_{\rm sw} / l$	$b_{\rm ws}$ (%) $^{(2)}$	shear reinforcement ratio	0.07	1.19	all models	
$ ho_{\mathrm{w}} f_{\mathrm{yw}}$ (MPa)	strength of shear reinforcement	0.21	2.62	all models	
Auxiliary variables derived from the basic variables (in MC assessment)						
E _s (GPa)	modulus	lus of elasticity of reinforcing steel		10	Levels 2, 3	
$k_{\rm v}$ (-) ⁽³⁾	strength rec	luction factor for concrete cracked in shear	(7)	(7)	Levels 1-3	
k_{ϵ} (-) ⁽⁴⁾	strength rec	luction factor for concrete cracked in compression	(7)	(7)	Levels 1-3	
$\varepsilon_{x}(-)^{(5)}$		train in the core layer (7) (7)		(7)	Levels 2, 3	
ξ (°) ⁽⁶⁾	angle betwe	en concrete compression struts and the main tension chord	(7)	(7)	all models	
⁽¹⁾ A_{sl} – denotes ⁽²⁾ A_{sw} – area of ⁽³⁾ $k_v = 180 / (11)^{(4)}$ for Level 1 h for Level 2 h ⁽⁵⁾ $\varepsilon_x = (M_E / z)^{(5)}$	s area of longi f shear reinfor 000 + 1.25 z) $k_{\varepsilon} = 0.55$ $k_{\varepsilon} = \min[1 / (1 + V_E) / (2 E_s \rho)$	tudinal reinforcement cement $.2 + 0.55(\varepsilon_x + (\varepsilon_x + 0.0025) \cot 2\xi)),$ $_1 b_w d)$, where $M_E = V_{\text{fail}} z$, $V_E = V_{\text{fail}}$	0.65] and $z = 0$.9d		
⁽⁶⁾ ζ may be chosen between limits <30°, 45°> for Level 1 and						
$<20^{\circ} + 1000$	$00 \varepsilon_x, 45^\circ > \text{ for}$	Level 2				
⁽⁾⁾ depends on a	an applied mo	del				

Tab. 1: Description and range of variables included in the database and entering to the assessment

Considering no axial compressive force and f_c in MPa, the shear resistance according to Levels 1 and 2 is:

$$R_{\text{model}}(X) = \min \begin{bmatrix} \max(k_v \min(8, f_c^{1/2})b_w z, \rho_w b_w z f_{yw} \cot \xi) \\ k_{\varepsilon} \min(1, (30/f_c)^{1/3})f_c b_w z \sin \xi \cos \xi \end{bmatrix}$$
(2)

Evaluation according to Level 3 is more complex and is described separately in Annex A. Actual concrete strengths instead of characteristic values are applied in all the models. Notation of the basic variables affecting the shear resistance is provided in Tab. 1. The symbol ξ for the angle between concrete compression struts and the main tension chord is introduced here instead of θ (used in MC 2010) to avoid confusion with the symbol for model uncertainty.

The shear model provided in EN 1992-1-1 for beams with stirrups is:

$$R_{\text{model}}(X) = \max_{1 \le \text{cot}\,\xi \le 2.5} \left\{ \min[\rho_{\text{w}} b_{\text{w}} z f_{\text{yw}} \cot \xi; b_{\text{w}} z v_{1} f_{\text{c}} / (\cot \xi + \tan \xi)] \right\}$$
(3)

where:

 v_1 – denotes the strength reduction factor for concrete cracked in shear, $v_1 = 0.6$ for $f_c \ge 60$ MPa or $v_1 = \max[0.5; 0.9 - f_c / 200$ MPa] otherwise.

More information about the model and related uncertainties can be found in [6].

4 DATABASE OF EXPERIMENTAL RESULTS

Researchers at the University of Stellenbosch collected a database of 222 tests of beams with stirrups [12] that is used here to assess the uncertainty in the MC 2010 models. For 22 tests information on ρ_w and f_{yw} is missing and these test results are hereafter not considered. Ranges of material and geometrical characteristics of the tested beams are given in Tab. 1. The database covers a wide range of beams with low to high concrete strengths, shear reinforcement ratio, and effective depths. Beams with light, moderate and heavy shear reinforcement are included.

It should be noted that the design rules in EN 1992-1-1 are valid for reinforcement with the characteristic yield strength f_{yk} between 400 to 600 MPa and the database contains 97 specimens out of this range. However, these specimens have insignificant influence on the model uncertainty and are thus taken into account in the further analysis. No similar limits are included in MC 2010.

Grubb's test of outliers is performed considering a significance level of 0.05 [13]. One sample is removed for all the levels of MC 2010 (for EN 1992-1-1 none of the 200 samples was excluded [6]).

5 STATISTICAL EVALUATION AND COMPARISON OF THE MODEL UNCERTAINTY

For each experiment the model resistance is assessed from equation (2) and Annex A and the model uncertainty is evaluated from equation (1). Sample characteristics of θ (mean μ_{θ} and coefficient of variation V_{θ}) for the whole database are given in Tab. 2a for MC 2010 and in Tab. 2b for EN 1992-1-1 (adopted from [6]). A lognormal distribution is assumed in accordance with [8].

Fig. 1 shows probability density functions of θ associated with EN 1992-1-1 and MC 2010, based on the sample characteristics derived from the whole databases. It appears that Level 3 is the most appropriate model – the mean of the uncertainty is close to unity and coefficient of variation is relatively small.

To verify influence of basic variables (Tab. 3) on the model uncertainty, a simple sensitivity analysis proposed in [12] is conducted for the present database. Trends in θ with a basic variable X_i are assessed using the correlation coefficient ρ (correlation between θ and X_i). Note that information on stirrup spacing s is missing for 67 tests. These tests were removed from the database only for a particular assessment of influence of s on θ as this variable is not an input parameter for any of the considered shear models.

Level of approximation	Level 1		Level 2		Level 3	
Description of the sample	μθ	$V_{ heta}$	μθ	$V_{ heta}$	μθ	$V_{ heta}$
Whole database, $n = 199$	2.23	0.27	1.88	0.28	1.11	0.22
Lightly reinforced beams $(\rho_{w}f_{yw} \le 1 \text{ MPa}), n = 147$	2.43	0.21	2.05	0.23	1.13	0.23
Moderately reinforced beams (1 MPa < $\rho_{w}f_{yw} \le 2$ MPa), $n = 44$	1.80	0.23	1.50	0.26	1.11	0.20
Heavily reinforced beams (2 MPa < $\rho_{w}f_{yw}$), $n = 8$	1.08	0.21	0.92	0.20	0.82	0.19

Tab. 2a: Sample characteristics of the model uncertainty according to MC 2010

Tab. 2b: Sample characteristics of the model uncertainty according to EN 1992-1-1 adopted from [6]

Description of the sample	μθ	$V_{ heta}$
Whole database, $n = 200$	1.63	0.32
Lightly reinforced beams $n = 147$	1.80	0.26
Moderately reinforced beams, $n = 45$	1.24	0.23
Heavily reinforced beams, $n = 8$	0.76	0.19



Fig. 1: Probability density functions of θ associated with the EN 1992-1-1 and MC 2010 models for the whole databases

Variable	coefficient of correlation $ ho$ for exponential (linear) regression					
	EN 1992-1-1	Level 1	Level 2	Level 3		
a/d	0.12 (0.11)	0.09 (0.05)	0 (-0.04)	-0.08 (-0.12)		
$b_{ m w}$	0.14 (0.11)	0.17 (0.17)	0.20 (0.19)	-0.15 (-0.13)		
d	-0.01 (-0.04)	0 (-0.02)	0.04 (0.02)	-0.36 (-0.33)		
fc	0.16 (0.14)	0.18 (0.17)	0.19 (0.18)	0.06 (0.08)		
$f_{ m yw}$	0.09 (0.05)	0.22 (0.22)	0.21 (0.20)	0.21 (0.24)		
S	0.03 (0.01)	0.01 (-0.02)	0.05 (0.03)	-0.37 (-0.33)		
$V_{\rm fail}$	-0.02 (-0.04)	0.04 (0.04)	0.07 (0.07)	-0.07 (-0.06)		
ρ_1	0.07 (0.08)	0.09 (0.11)	-0.08 (-0.06)	0.15 (0.13)		
$ ho_{ m w}$	-0.69 (-0.60)	-0.7 (-0.61)	-0.72 (-0.62)	-0.2 (-0.23)		
$\rho_{ m w}f_{ m yw}$	-0.75 (-0.68)	-0.69 (-0.62)	-0.7 (-0.63)	-0.13 (-0.12)		

Tab. 3: Coefficient of correlation describing the influence of variables included in the database on θ

Regression analysis is based on a linear or exponential model described by the following relationships:

linear:
$$\theta(\rho_{w}f_{yw}) = b_0 + b_1 \rho_{w}f_{yw}$$
 (4)

exponential:
$$\theta(\rho_{w}f_{yw}) = \exp(b_0 + b_1 \rho_{w}f_{yw})$$
 (5)

where:

 b_0 and b_1 – denote regression parameters determined by the Least square method.

The results provided in Tab. 3 reveal strong correlations between θ and ρ_w or $\rho_w f_{yw}$ while weak correlations appear for the other shear parameters for EN 1992-1-1, Levels 1 and 2. Influence of ρ_w or $\rho_w f_{yw}$ on θ for Level 3 is considerably reduced which is the key improvement of this model. Medium correlations between θ -d and θ -s are observed for Level 3. For most of the shear parameters the exponential regression is more appropriate than linear regression.

Figs. 2 and 3 show variation of the model uncertainty with the strength of shear reinforcement and its exponential trend for the Level 3 and EN 1992-1-1 models, respectively. The model uncertainty for EN 1992-1-1 (and also for Levels 1 and 2) clearly decreases with an increasing $\rho_w f_{yw}$ and its differentiation with respect to this parameter is thus proposed. The uncertainty related to Level 3 seems to be independent of $\rho_w f_{yw}$ and the differentiation is not necessary.

Sample characteristics of θ for light to heavy reinforced beams are provided in Tabs. 2a and 2b; limits for lightly, moderately and heavily reinforced beams are accepted from [14]. It follows that the mean of the uncertainty μ_{θ} depends on the strength of shear reinforcement while the effect on the coefficient of variation is less significant.

Based on the results given in Tab. 2a mean $\mu_{\theta} \approx 1.1$ and coefficient of variation $V_{\theta} \approx 0.2$ may be accepted for the shear resistance of the members with stirrups for Level 3. For the other models both the characteristics μ_{θ} and V_{θ} are mostly greater. For heavily reinforced beams an unambiguous recommendation cannot be now provided due to the lack of experimental data.



Fig. 2: Variation of θ with $\rho_w f_{yw}$ for Level 3 (whole database)



Fig. 3: Variation of θ with pwfyw for EN 1992 1 1 (whole database)

Note that the residual scatter R^2 [15] could be determined as an additional parameter describing relationship between θ and the basic variables. However, R^2 -values improve information deduced from the ρ -coefficient insignificantly in the presented case.

To summarise the above results it is recommended to prefer a model with the highest accuracy if data required for the assessment are available. It is expected that for most practical cases additional

data for Levels 2 and $3 - V_{\text{fail}}$ (from a test or design assumptions), E_s and ρ_1 (see Tab. 1) – are known. Computational demands for all the considered models are similar – all the models are based on analytical relationships which are easy to evaluate. Therefore, it is recommended to use the Level 3 model while assessing the shear resistance of lightly to moderately reinforced beams with stirrups.

6 DISCUSSION

Uncertainties related to the MC 2010 models are briefly discussed in [16] where a different database containing beams with a variable cross-section and with normal force is considered. Consequently the results by Sigrist et al. [16] slightly differ from those presented in this contribution. For Levels 1 and 2 they obtained less conservative mean values ($\mu_{\theta} \approx 1.35$ –1.5) and a smaller coefficient of variation ($V_{\theta} \approx 0.2$); for Level 3 higher mean ($\mu_{\theta} \approx 1.2$) and a smaller coefficient of variation ($V_{\theta} \approx 0.13$) was reported.

Uncertainties associated with two shear models (EN 1992-1-1 and the model proposed in [17]) were analysed in [18]. A test database used for the analysis is not described in detail. It can only be judged from provided figures that, regarding ρ_w , the database is somewhat similar to that accepted here – most of samples with a low shear reinforcement ratio ($\rho_w < 0.5$ %), some with moderate 0.5 % < $\rho_w < 1$ % and very few with a high ratio $\rho_w > 1$ %. Busse et al. [18] considered ρ_w as the most important parameter instead of $\rho_w f_{yw}$. This makes a small difference as both these variables affect the uncertainty of EN 1992-1-1 model in a similar way [6]. For EN 1992-1-1 they obtained $\mu_{\theta} \approx 1.35$ and $V_{\theta} \approx 0.3$; for the model in [17] $\mu_{\theta} \approx 1.12$ and unrealistically low $V_{\theta} \approx 0.07$ were reported.

In further studies the differences amongst the reported results should be investigated and clarified.

7 CONCLUDING REMARKS

Description of uncertainties related to resistance and load effect models can be a crucial problem of reliability analyses. The presented comparison of uncertainties in the shear resistance of beams with stirrups according to the models in EN 1992-1-1 and *fib* MC 2010, leads to the following conclusions:

- In common cases actual shear resistance can be expressed as a product of the model uncertainty and resistance obtained by the model.
- Uncertainty related to MC 2010 Level 3 can be described by the lognormal distribution with a mean μ_θ ≈ 1.1 and coefficient of variation V_θ ≈ 0.2; both these characteristics are more favourable than for the other considered models (EN 1992-1-1 and MC 2010 Levels 1 and 2).
- It is recommended to use the MC 2010 Level 3 model for assessing lightly to moderately reinforced beams since all the required input data are commonly available and computational demands are acceptable.
- No recommendation is provided for heavily reinforced beams due to the lack of experimental data.

ACKNOWLEDGEMENTS

This study is an outcome of the research project P105/12/2051 Model uncertainties in resistance assessment of concrete structures, supported by the Czech Science Foundation.

ANNEX A – SHEAR RESISTANCE ACCORDING TO MC 2010 LEVEL 3

In the Level 3 approach, the design shear resistance in the range $V_R < V_{R,\max}(\xi_{\min})$ is given by:

$$V_R = V_{R,s} + V_{R,c} \tag{6}$$

where:

$$V_{R,\max} = k_{\varepsilon} \min(1, (30/f_{\rm c})^{1/3}) f_{\rm c} b_{\rm w} z \sin\xi_{\rm min} \cos\xi_{\rm min}$$
(7)

$$V_{R,s} = \rho_{\rm w} \, b_{\rm w} \, z \, f_{\rm yw} \, \cot\xi \tag{8}$$

$$V_{R,c} = k_{\rm v} \min(8; f_{\rm c}^{1/2}) b_{\rm w} z \tag{9}$$

where f_c is in MPa. Variables k_c and ξ are same as in the Level 2 approximation. ξ_{\min} is a lower limit for ξ . Strength reduction factor for concrete cracked in shear is given by:

$$k_{\rm v} = \max[0.4(1 - V_{\rm fail} / V_{R,\rm max}) / (1 + 1500\varepsilon_{\rm x}),0]$$
(10)

In the range $V_R \ge V_{R,\max}(\xi_{\min})$ the resistance is determined using the Level 2 model.

REFERENCES

- [1] BERTAGNOLI, G., GIORDANO, L. & MANCINI, G. Safety format for the nonlinear analysis of concrete structures. *Studi e ricerche Politecnico di Milano. Scuola di specializzazione in costruzioni in cemento armato.* 2004, Vol. 2004, Nr. 25, pp. 31-56. ISSN 1121-6069.
- [2] ČERVENKA, V. Global Safety Format for Nonlinear Calculation of Reinforced Concrete. *Beton- und Stahlbetonbau.* 2008, Vol. 103, Nr. 2008, pp. 37-42.
- [3] SCHLUNE, H., PLOS, M. & GYLLTOFT, K. Safety formats for nonlinear analysis tested on concrete beams subjected to shear forces and bending moments. *Eng.Struct.* 2011, Vol. 33, Nr. 8, pp. 2350-2356. ISSN 0141-0296.
- [4] SYKORA, M. & HOLICKY, M. Safety format for non-linear analysis in the model code verification of reliability level. In *Proc. fib Symp. PRAGUE 2011 Concrete engineering for excellence and efficiency.* Prague : Czech Concrete Society, 2011, pp. 943-946. ISBN ISBN 978-80-87158-29-6.
- [5] FIB. fib Model Code for Concrete Structures 2010. Lausanne : fib, 2013. 402 pp. ISBN 978-3-433-03061-5.
- [6] SÝKORA, M., HOLICKÝ, M. & KREJSA, J. Model uncertainty in shear resistance of reinforced concrete beams with shear reinforcement. In *Proc. Modelling in mechanics 2013*. Ostrava : VŠB-Technical University of Ostrava, Faculty of Civil Engineering, 2013, pp. 10. ISBN 978-80-248-2985-2.
- [7] EN 1992-1-1. Design of concrete structures Part 1-1: General rules and rules for buildings. Brussels : CEN, 2004. 225 pp.
- [8] JCSS. JCSS Probabilistic Model Code. Zurich : Joint Committee on Structural Safety, 2001. ISBN 978-3-909386-79-6.
- [9] DITLEVSEN, O. & MADSEN, H.O. Structural Reliability Methods. Chichester : John Wiley & Sons, 1996. 372 pp. ISBN 0471960861.
- [10] HOLICKY, M., SYKORA, M., BARNARDO-VIJLOEN, C., MENSAH, K.K. & RETIEF, J.V. Model Uncertainties in Reliability Analysis of Reinforced Concrete Structures. In *Proc. SEMC 2013*. Millpress, 2013, pp. 2065-2070. ISBN 978-1-138-00061-2.
- [11] SYKORA, M., CERVENKA, V. & HOLICKY, M. Uncertainties of resistance models for reinforced concrete structures. In *Proc. fib Symposium Tel Aviv 2013*. Tel Aviv : Technion, 2013, pp. 221-224. ISBN 978-965-92039-0-1.

- [12] MENSAH, K.K. Reliability Assessment of Structural Concrete with Special Reference to Shear Resistance (MSc thesis). Stellenbosch, South Africa : University of Stellenbosch, 2012. 225 pp.
- [13] ANG, A.H.S. & TANG, W.H. Probabilistic Concepts in Engineering Emphasis on Applications to Civil and Environmental Engineering. USA : John Wiley & Sons, 2007. 420 pp. ISBN 978-0-471-72064-5.
- [14] CLADERA, A. & MARÍ, A.R. Shear strength in the new Eurocode 2. A step forward? Struct Concrete. 2007, Vol. 26, Nr. 7, pp. 917-66. ISSN 1464–4177.
- [15] HOLICKÝ, M. Introduction to Probability and Statistics for Engineers. Heidelberg : Springer, 2013. 181 pp. ISBN 978-3-642-38299-4.
- [16] SIGRIST, V., BENTZ, E., RUIZ, M.F., FOSTER, S. & MUTTONI, A. Background to the fib Model Code 2010 shear provisions - part I: beams and slabs. *Structural Concrete*. 2013, Vol. 14, Nr. 3, pp. 195-203. ISSN 1751-7648.
- [17] HEGGER, J. & GÖRTZ, S. Shear capacity of beams made of normal and high performance concrete. *Beton- und Stahlbetonbau*. 2006, Vol. 101, Nr. 9, pp. 695-705.
- [18] BUSSE, D., ECKFELDT, L. & EMPELMANN, M. Assessing the reliability of existing concrete bridges in terms of shear strength. In *Proc. SEMC 2013*. Millpress, 2013, pp. 2065-2070. ISBN 978-1-138-00061-2.

Reviewers:

Prof. Ing. Zbyněk Keršner, CSc., Institute of Structural Mechanics, Faculty of Civil Engineering, Brno University of Technology.

Doc. Ing. Pustka David, Ph.D., Department of Building Structures, Faculty of Civil Engineering, VŠB-Technical University of Ostrava.

číslo 1, rok 2014, ročník XIV, řada stavební

článek č. 15

Jozef MELCER¹, Ivana MARTINICKÁ²

VOZIDLO – CESTA NUMERICKÉ RIEŠENIE VO FREKVENČNEJ OBLASTI

VEHICLE – ROADWAY NUMERICAL SOLUTION IN FREQUENCY DOMAIN

Abstrakt

Pri riešení problémov interakcie vozidlo – cesta vo frekvenčnej oblasti nás okrem iného zaujímajú funkcie frekvenčného prenosu. Predkladaný príspevok je venovaný teoretickému odvodeniu funkcií frekvenčného prenosu pre rôzne výpočtové modely nákladného vozidla a ich numerickému vyčísleniu v určitom frekvenčnom pásme. Numerické výsledky sú uvádzané pre vozidlo typu Tatra T815. Poukazujú napríklad na vzťah frekvenčnej skladby nerovností povrchu jazdnej dráhy k hodnotám kontaktných síl medzi kolesom vozidla a vozovkou.

Kľúčové slová

Vozidlo, cesta, funkcia frekvenčného prenosu.

Abstract

At the solution of the vehicle – roadway interaction problems in the frequency domain we are interested in the frequency response functions. The submitted paper is dedicated to the theoretical derivation of frequency response functions for various kind of a lorry computing models and their numerical evaluation in certain frequency band. Numerical results are introduced for the vehicle Tatra T815. For example they refer to the relation between frequency composition of road unevenness and tire forces.

Keywords

Vehicle, roadway, frequency response function.

1 ÚVOD

Pri riešení dynamických úloh vo frekvenčnej oblasti nás zaujímajú hlavne frekvenčné spektrá a funkcie frekvenčného prenosu. Funkcie frekvenčného prenosu (FFP) vyjadrujú vzťah medzi odozvou a budením dynamického systému v závislosti od hodnoty budiacej frekvencie. V prípade dynamického systému tvoreného vozidlom a vozovkou sú nerovnosti vozovky zdrojom kinematického budenia vozidla. Výpočtové modely vozidiel je možné zvoliť na rôznej kvalitatívnej úrovni – celý priestorový model, polovičný rovinný model, štvrtinový model. Pre tieto výpočtové modely je možné odvodiť rôzne frekvenčné prenosu. V prípade sledovania interakcie vozidlo – cesta nás zaujímajú funkcie frekvenčného prenosu vzťahujúce sa k zložkám posunutí charakteristických bodov vozidla (viažucich sa k stupňom voľnosti výpočtového modelu) a k hodnotám kontaktných síl vznikajúcich medzi kolesom vozidla a jazdnou dráhou. Pre rôzne výpočtové modely vozidla je vhodné sledovať a vzájomne porovnávať takzvané výkonové prenosové faktory (VPF), čo sú druhé mocniny absolútnych hodnôt funkcií frekvenčného prenosu. Dá sa ukázať, že pokiaľ sú výpočtové

¹ Prof. Ing. Jozef Melcer, DrSc., Katedra stavebnej mechaniky, Fakulta stavebná, Žilinská univerzita v Žiline, Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina, tel.: (+421) 41 5135612, e-mail: jozef.melcer@fstav.uniza.sk.

² Ing. Ivana Martinická, Ph.D., Katedra stavebnej mechaniky, Fakulta stavebná, Žilinská univerzita v Žiline, Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina, tel.: (+421) 41 5135649, e-mail: ivana.martinicka@fstav.uniza.sk.

modely vzájomne dynamicky ekvivalentné, tak funkcie frekvenčného prenosu pre vzájomne si korešpondujúce zložky, sú vzájomne identické. Možností, ako takéto údaje získať, je viac. Niektoré sú obsahom predkladaného príspevku. Využitie získaných výsledkov je rôznorodé [1], [2], [3], [4], [5], [6].

2 FUNKCIE FREKVENČNÉHO PRENOSU

Frekvenčný prenos lineárnej sústavy (funkcia frekvenčného prenosu FP(p), kde $p = i \cdot \omega$ je komplexné číslo, obr. 1) sa zavádza ako pomer ustálenej odozvy $r_{ust}(t)$ k harmonickému budeniu h(t). Ak budenie je harmonické s jednotkovou amplitúdou

$$h(t) = h.f(t) = 1 \cdot e^{i\omega t}, \qquad (1)$$

tak platí, že

Obr. 1: Grafická interpretácia funkčných hodnôt funkcie frekvenčného prenosu

Frekvenčný prenos FP(p) ako funkcia komplexne premennej sa dá zobraziť ako vektorový súčet jej reálnej Re[FP(p)] a imaginárnej časti Im[FP(p)].

$$FP(p) = \operatorname{Re}[FP(p)] + i \cdot \operatorname{Im}[FP(p)], \qquad (3)$$

alebo

$$FP(p) = |FP(p)| \cdot e^{i\varphi}, \qquad (4)$$

kde |FP(p)| je absolútna hodnota, alebo veľkosť frekvenčného prenosu. Platí pre ňu

$$\left|FP(p)\right| = \sqrt{\operatorname{Re}^{2}[FP(p)] + \operatorname{Im}^{2}[FP(p)]},$$
(5)

$$\varphi = \operatorname{arctg}(\operatorname{Im}[FP(p)]/\operatorname{Re}[FP(p)]).$$
(6)

Z rovnice (2) je možné vyjadriť $r_{ust}(t)$

$$FP(p) = r_{ust}(t) / (1 \cdot e^{i\omega t}) \to r_{ust}(t) = FP(p) \cdot e^{i\omega t} .$$
⁽⁷⁾

Ak dosadíme (4) do (7) dostaneme

$$r_{\text{ust}}(t) = |FP(p)| \cdot e^{i\varphi} \cdot e^{i\omega t} = |FP(p)| \cdot e^{i(\omega t + \varphi)}.$$
(8)

Grafické znázornenie frekvenčného prenosu sa nazýva frekvenčnou charakteristikou. Grafické znázornenie absolútnej hodnoty (modulu) funkcie frekvenčného prenosu od frekvencie harmonického budenia je amplitúdová charakteristika. Fázová charakteristika je grafické znázornenie argumentu (fáze) funkcie frekvenčného prenosu od frekvencie harmonického budenia.

Frekvenčné spektrum výstupného signálu (odozvy – response) $FS_r(p)$ možno získať násobením prenosovej funkcie systému frekvenčným spektrom vstupného signálu (budenia) $FS_h(p)$

$$FS_{\rm r}(p) = FP(p) \cdot FS_{\rm h}(p) \,. \tag{9}$$

Zavedením výkonových spektrálnych hustôt vstupného signálu $VSH_{\rm h}(\omega)$ a výstupného signálu $VSH_{\rm r}(\omega)$ je možné uvedené závislosti vyjadriť v tvare

$$VSH_{\rm r}(\omega) = |FP(p)|^2 \cdot VSH_{\rm h}(\omega)$$
, respective $|FP(p)|^2 = VSH_{\rm r}(\omega)/VSH_{\rm h}(\omega)$ (10)

kde $|FP(p)|^2$ nazývame výkonový prenosový faktor (VPF). Schematické znázornenie fyzikálneho významu rovnice (10) je zobrazené na obr. 2. Dynamický systém si prostredníctvom frekvenčného prenosu vyberá z výkonovej spektrálnej hustoty budenia len frekvencie blízke vlastným frekvenciám systému a na ne v odozve reaguje.



Obr. 2: Fyzikálny význam výkonového prenosového faktora

3 VÝPOČTOVÝ MODEL VOZIDLA

Výpočtové modely vozidiel je možné voliť na rôznych úrovniach, ako troj, dvoj alebo jedno dimenzionálne. Pre účely tohto príspevku je postačujúce zvoliť rovinný dvoj alebo jednodimenzionálny výpočtový model vozidla. Rovinný výpočtový model nákladného vozidla Tatra 815 je zobrazený na obr. 3.

Uvedený výpočtový model je diskrétny model. Pohybové rovnice je možné odvodiť v tvare obyčajných diferenciálnych rovníc. V ďalšom texte sú uvedené pohybové rovnice pre polovičný model vozidla z obr. 3. Súčasne sú uvedené aj vzťahy pre výpočet kontaktných síl. Symboly ri (i = 1, 2, 3, 4, 5) označujú zložky posunutí charakteristických bodov vozidla zodpovedajúce stupňom voľnosti. F_{d3} , F_{d4} , F_{d5} sú dynamické zložky kontaktných v mieste kontaktu kolesa s jazdnou dráhou. h_3 , h_4 , h_5 sú funkcie pospisujúce nerovnosti jazdnej dráhy v mieste kontaktu kolesa s vozovkou. Význam ostatných symbolov je zrejmý z obr. 3 a z nasledujúceho textu.



Obr. 3 Polovičný model vozidla Tatra 815

$$\begin{split} m_{1} \cdot \ddot{r}_{1} + b_{1} \cdot (\dot{r}_{1} - s_{1} \cdot \dot{r}_{2} - \dot{r}_{3}) + b_{2} \cdot (\dot{r}_{1} + s_{2} \cdot \dot{r}_{2} - \dot{r}_{4}) + k_{1} \cdot (r_{1} - s_{1} \cdot r_{2} - r_{3}) + k_{2} \cdot (r_{1} + s_{2} \cdot r_{2} - r_{4}) = 0 \\ I_{y1} \cdot \ddot{r}_{2} - s_{1} \cdot b_{1} \cdot (\dot{r}_{1} - s_{1} \cdot \dot{r}_{2} - \dot{r}_{3}) + s_{2} \cdot b_{2} \cdot (\dot{r}_{1} + s_{2} \cdot \dot{r}_{2} - \dot{r}_{4}) - \\ - s_{1} \cdot k_{1} \cdot (r_{1} - s_{1} \cdot \dot{r}_{2} - r_{3}) + s_{2} \cdot k_{2} \cdot (r_{1} + s_{2} \cdot r_{2} - r_{4}) = 0 \\ m_{2} \cdot \ddot{r}_{3} - b_{1} \cdot (\dot{r}_{1} - s_{1} \cdot \dot{r}_{2} - \dot{r}_{3}) + b_{3} \cdot (\dot{r}_{3} - \dot{h}_{3}) - k_{1} \cdot (r_{1} - s_{1} \cdot r_{2} - r_{3}) + k_{3} \cdot (r_{3} - h_{3}) = 0 \\ m_{3} \cdot \ddot{r}_{4} - b_{2} \cdot (\dot{r}_{1} + s_{2} \cdot \dot{r}_{2} - \dot{r}_{4}) + b_{4} \cdot (\dot{r}_{4} - c \cdot \dot{r}_{5} - \dot{h}_{4}) + b_{5} \cdot (\dot{r}_{4} + c \cdot \dot{r}_{5} - \dot{h}_{5}) - \\ - k_{2} \cdot (r_{1} + s_{2} \cdot \dot{r}_{2} - r_{4}) + k_{4} \cdot (r_{4} - c \cdot r_{5} - h_{4}) + k_{5} \cdot (r_{4} + c \cdot \dot{r}_{5} - h_{5}) = 0 \\ I_{y3} \cdot \ddot{r}_{5} - c \cdot b_{4} \cdot (\dot{r}_{4} - c \cdot \dot{r}_{5} - \dot{h}_{4}) + c \cdot b_{5} \cdot (\dot{r}_{4} + c \cdot \dot{r}_{5} - \dot{h}_{5}) - \\ - c \cdot k_{4} \cdot (r_{4} - c \cdot \dot{r}_{5} - h_{4}) + c \cdot k_{5} \cdot (r_{4} + c \cdot \dot{r}_{5} - h_{5}) = 0 , \end{split}$$
(11)
$$F_{d3} = k_{3} \cdot (r_{3} - h_{3}) + b_{3} \cdot (\dot{r}_{3} - \dot{h}_{3}) \\F_{d4} = k_{4} \cdot (r_{4} - c \cdot r_{5} - h_{4}) + b_{4} \cdot (\dot{r}_{4} - c \cdot \dot{r}_{5} - \dot{h}_{5}) = 0 , \qquad (11)$$

4 PRECHOD Z ČASOVÉHO DO FREKVENČNÉHO PRIESTORU

Pre prechod z časového do frekvenčného priestoru je možné použiť Laplaceovu integrálnu transformáciu. Dohodnime sa, že Laplaceov obraz nejakej funkcie r(t) označíme $L\{r(t)\} = R(p)$. Je definovaný vzťahom

$$R(p) = \int_{0}^{\infty} r(t) \cdot e^{-p \cdot t} \cdot dt .$$
(13)

V tomto prípade $p = i \cdot \omega$ je komplexné číslo.

Funkcia r(t) a jej derivácie podľa času sa budú transformovať nasledovne

$$L\{r^{(n)}(t)\} = p^{n} \cdot R(p) - \sum_{i=1}^{n-1} p^{n-1-i} \cdot r^{(i)}(0+), \quad \text{pre } n = 1, 2, \dots,$$

$$r^{(n)}(t) \to p^{n} \cdot R(p) - p^{n-1} \cdot r(0+) - p^{n-2} \cdot \dot{r}(0+), \dots, -r^{(n-1)}(0+),$$

$$\dot{r}(t) \to p \cdot R(p) - r(0+) \quad r(0+) = \lim_{t = 0+} r(t),$$

$$\ddot{r}(t) \to p^{2} \cdot R(p) - p \cdot r(0+) - \dot{r}(0+). \quad (14)$$

Funkcie času $r_1(t)$ až $r_5(t)$ a $h_3(t)$ až $h_5(t)$ sa budú transformovať na funkcie $R_1(p)$ až $R_5(p)$ a $H_3(p)$ až $H_5(p)$. Zavedením nasledovného označenia je možné definovať 5 frekvenčných prenosov

$$\overline{r}_1 = \frac{R_1(p)}{H_3(p)}, \ \overline{r}_2 = \frac{R_2(p)}{H_3(p)}, \ \overline{r}_3 = \frac{R_3(p)}{H_3(p)}, \ \overline{r}_4 = \frac{R_4(p)}{H_3(p)}, \ \overline{r}_5 = \frac{R_5(p)}{H_3(p)}$$

(15)

Laplaceovou transformáciou pohybových rovníc (11) a zavedením frekvenčných prenosov (15) dostaneme sústavu piatich rovníc v komplexnom tvare pre výpočet funkcií \bar{r}_i , kde i = 1, 2, 3, 4, 5.

Zápis rovníc v maticovom tvare je nasledovný

$$[a] \cdot \{\overline{r}\} = \{PS\}. \tag{16}$$

Vo všeobecnosti platí, že

$$a_{ik} = a_{ik,re} + \mathbf{i} \cdot a_{ik,im}, \quad \overline{r_i} = \overline{r_{i,re}} + \mathbf{i} \cdot \overline{r_{i,im}}, \qquad PS_i = PS_{i,re} + \mathbf{i} \cdot PS_{i,im}.$$
(17)

Pre náš konkrétny prípad a nulové počiatočné podmienky vypadajú súčinitele a_{ik} a pravé strany PS_i nasledovne

$$a_{11} = k_1 + k_2 - m \cdot \omega^2 + (b_1 + b_2) \cdot \omega \cdot \mathbf{i} ,$$

$$a_{12} = k_2 \cdot s_2 - k_1 \cdot s_1 + (b_2 \cdot s_2 - b_1 \cdot s_1) \cdot \omega \cdot \mathbf{i} ,$$

$$a_{13} = -k_1 - b_1 \cdot \omega \cdot \mathbf{i} , \ a_{14} = -k_2 - b_2 \cdot \omega \cdot \mathbf{i} , \ a_{15} = 0 + 0 \cdot \mathbf{i} ,$$

$$\begin{split} a_{21} &= k_2 \cdot s_2 - k_1 \cdot s_1 + (b_2 \cdot s_2 - b_1 \cdot s_1) \cdot \omega \cdot \mathbf{i} = a_{12} \,, \\ a_{22} &= k_1 \cdot s_1^2 + k_2 \cdot s_2^2 - I_{y1} \cdot \omega^2 + (b_1 \cdot s_1^2 + b_2 \cdot s_2^2) \cdot \omega \cdot \mathbf{i} \,, \\ a_{23} &= k_1 \cdot s_1 + b_1 \cdot s_1 \cdot \omega \cdot \mathbf{i} \,, \ a_{24} &= -k_2 \cdot s_2 - b_2 \cdot s_2 \cdot \omega \cdot \mathbf{i} \,, \ a_{25} &= 0 + 0 \cdot \mathbf{i} \,, \end{split}$$

$$a_{31} = -k_1 - b_1 \cdot \omega \cdot \mathbf{i} = a_{13} , \ a_{32} = k_1 \cdot s_1 + b_1 \cdot s_1 \cdot \omega \cdot \mathbf{i} = a_{23} ,$$

$$a_{33} = k_1 + k_3 - m_2 \cdot \omega^2 + (b_1 + b_3) \cdot \omega \cdot \mathbf{i} , \ a_{34} = 0 + 0 \cdot \mathbf{i} , \ a_{35} = 0 + 0 \cdot \mathbf{i} ,$$

$$a_{41} = -k_2 - b_2 \cdot \omega \cdot \mathbf{i} = a_{14}, \ a_{42} = -k_2 \cdot s_2 - b_2 \cdot s_2 \cdot \omega \cdot \mathbf{i} = a_{24},$$

$$a_{43} = 0 + 0 \cdot \mathbf{i} = a_{34}, \ a_{44} = k_2 + k_4 + k_5 - m_3 \cdot \omega^2 + (b_2 + b_4 + b_5) \cdot \omega \cdot \mathbf{i},$$

$$a_{45} = (k_5 - k_4) \cdot c + (b_5 - b_4) \cdot c \cdot \omega \cdot \mathbf{i},$$

$$a_{51} = 0 + 0 \cdot \mathbf{i} = a_{15}, \ a_{52} = 0 + 0 \cdot \mathbf{i} = a_{25}, \ a_{53} = 0 + 0 \cdot \mathbf{i} = a_{35},$$

$$a_{54} = (k_5 - k_4) \cdot c + (b_5 - b_4) \cdot c \cdot \omega \cdot \mathbf{i} = a_{45},$$

$$a_{54} = (k_4 + k_5) \cdot c^2 - I_{y3} \cdot \omega^2 + (b_4 + b_4) \cdot c^2 \cdot \omega \cdot \mathbf{i}.$$
(18)

$$PS_{1} = 0 + 0 \cdot i, PS_{2} = 0 + 0 \cdot i, PS_{3} = k_{3} + b_{3} \cdot \omega \cdot i,$$

$$PS_{4} = k_{4} \cdot e^{-i\varphi_{4}} + k_{5} \cdot e^{-i\varphi_{5}} + (b_{4} \cdot e^{-i\varphi_{4}} + b_{5} \cdot e^{-i\varphi_{5}}) \cdot \omega \cdot i,$$

$$PS_{5} = (k_{5} \cdot e^{-i\varphi_{5}} - k_{4} \cdot e^{-i\varphi_{4}}) \cdot c + (b_{5} \cdot e^{-i\varphi_{5}} - b_{4} \cdot e^{-i\varphi_{4}}) \cdot c \cdot \omega \cdot i.$$
(19)

Súčinitele φ_4 , φ_5 majú význam konštánt fázového posunutia medzi pôsobiskami jednotlivých náprav. Sú závislé od rýchlosti pohybu vozidla *v*.

$$\varphi_4 = \frac{s-c}{v} \cdot \omega, \qquad \varphi_5 = \frac{s+c}{v} \cdot \omega. \tag{20}$$

Podobným spôsobom je možné definovať aj frekvenčné prenosy pre dynamické zložky kontaktných síl

$$\overline{F}_{d3} = \frac{L\{F_{d3}(t)\}}{H_{3}(p)} = k_{3} \cdot (\overline{r}_{3} - 1) + b_{3} \cdot (\overline{r}_{3} - 1) \cdot \omega \cdot \mathbf{i} ,$$

$$\overline{F}_{d4} = \frac{L\{F_{d4}(t)\}}{H_{3}(p)} = k_{4} \cdot (\overline{r}_{4} - c \cdot \overline{r}_{5} - e^{-i\varphi_{4}}) + b_{4} \cdot (\overline{r}_{4} - c \cdot \overline{r}_{5} - e^{-i\varphi_{4}}) \cdot \omega \cdot \mathbf{i} ,$$

$$\overline{F}_{d5} = \frac{L\{F_{d5}(t)\}}{H_{3}(p)} = k_{5} \cdot (\overline{r}_{4} + c \cdot \overline{r}_{5} - e^{-i\varphi_{5}}) + b_{5} \cdot (\overline{r}_{4} + c \cdot \overline{r}_{5} - e^{-i\varphi_{5}}) \cdot \omega \cdot \mathbf{i} .$$
(21)

5 VÝSLEDKY NUMERICKÉHO RIEŠENIA

Numerické riešenie funkcií frekvenčného prenosu bolo vykonané pre rovinný výpočtový model nákladného automobilu Tatra 815 (obr. 3) s nasledovnými parametrami:

hmotnosti a hmotné momenty zotrvačnosti hmotných objektov modelu vozidla $m_1 = 11 475 \text{ kg}, m_2 = 455 \text{ kg}, m_3 = 1 070 \text{ kg}, I_{y1} = 31 149 \text{ kg.m}^2, I_{y3} = 466 \text{ kg.m}^2$,

tuhostné charakteristiky spojovacích členov modelu vozidla $k_1 = 143\ 716,5$ N/m, $k_2 = 761\ 256\ N/m$, $k_3 = 1\ 275\ 300\ N/m$, $k_4 = 2\ 511\ 360\ N/m$, $k_5 = 2\ 511\ 360$ N/m,

tlmiace charakteristiky spojovacích členov modelu vozidla

*b*₁ = 9 614 kg/s, *b*₂ = 130 098,5 kg/s, *b*₃ = 1 373 kg/s, *b*₄ = 2 747 kg/s, *b*₅ = 2 747 kg/s,

trecie charakteristiky spojovacích členov modelu vozidla $f_2 = 12\ 000\ \text{N},$

dĺžkové rozmery výpočtového modelu vozidla $s_1 = 3,135 \text{ m}, s_2 = 1,075 \text{ m}, s = s_1 + s_2 = 4,21 \text{ m}, c = 0,660 \text{ m}.$

Pre úplnosť sú uvádzané aj vlastné frekvencie tohto výpočtového modelu vozidla

 $f_{(1)} = 1,1333$ Hz; $f_{(2)} = 1,4512$ Hz; $f_{(3)} = 8,8966$ Hz; $f_{(4)} = 10,9054$ Hz; $f_{(5)} = 11,7152$ Hz.

Na ďalších obrázkoch sú zobrazené výkonové prenosové faktory (VPF) jednotlivých funkcií frekvenčného prenosu (druhé mocniny absolútnych hodnôt jednotlivých frekvenčných funkcií) pri rýchlosti pohybu vozidla 10 m/s.



Obr. 4: VPF frekvenčného prenosu veličiny r_1



Obr. 5: VPF frekvenčného prenosu veličiny r₂



Obr. 6: VPF frekvenčného prenosu veličiny r₃



Obr. 7: VPF frekvenčného prenosu veličiny r4



Obr. 8: VPF frekvenčného prenosu veličiny r5



Obr. 9: VPF frekvenčného prenosu veličiny F_{d3}



Obr. 10: VPF frekvenčného prenosu veličiny F_{d4}



Obr. 11: VPF frekvenčného prenosu veličiny F_{d5}

6 ZÁVER

Pri riešení dynamických úloh vo frekvenčnej oblasti sú predmetom záujmu buď frekvenčné spektrá alebo funkcie frekvenčného prenosu. Je možné ich získať teoretickou alebo experimentálnou cestou. V predloženou príspevku je ukázaný spôsob riešenie funkcií frekvenčného prenosu numerickou cestou pre rovinný (polovičný) model vozidla Tatra 815 pri rýchlosti pohybu vozidla 36 km/h. V grafickej podobe sú prezentované výkonové prenosové faktory jednotlivých sledovaných veličín. Stavebného inžiniera zaujímajú v prvom rade frekvenčné prenosy týkajúce sa kontaktných síl vznikajúcich medzi kolesom vozidla a vozovkou. Z uvedených obrázkov je zrejmé, že pokiaľ ide o hodnoty kontaktných síl, tak výkonovo majú najväčší podiel na ich vzniku tie frekvenčné zložky kinematického budenia, ktoré korešpondujú vlastným frekvenciám a tvarom vlastného kmitania vťahujúcim sa k dominantným pohybom náprav vozidla. Dá sa jednoducho preukázať, že prakticky rovnaké výsledky je možné získať aj pre jednoduchšie (štvrtinové) modely vozidla, pokiaľ sú dynamický ekvivalentné s tu použitým výpočtovým modelom.

POĎAKOVANIE

Tento príspevok vznikol s podporou GA MŠSR VEGA, grant č. 1/0259/12.

LITERATURA

- IVÁNKOVÁ, O. Vplyv seizmicity na konštrukčné systémy výškových budov. Medzinárodná konferencia: Vývoj a aplikace MKP systémů pro analýzu stavebních konstrukcí. VUT Brno, 2003, s. 17.1 – 17.6.
- [2] KOTRASOVÁ, K. a KORMANÍKOVÁ, E. Seismic design of liquid storage tank made from composite material. *World Journal of Engineering*. 2008, Vol. 5, No. 3, p. 445-446. ISSN 1708-5284.
- [3] LAJČÁKOVÁ, G.: Vplyv parametrov vozidla na interakčné sily vznikajúce medzi kolesom a jazdnou dráhou. *Sborník vědeckých prací Vysoké školy báňské Technické univerzity Ostrava*, roč. X, č. 1, 2010, řada stavební, ISSN1213-1962, s. 183-190.
- [4] PETŘÍK, T., LEDNICKÁ, M., KALÁB, Z., HRUBEŠOVÁ, E.: Hodnocení technické seizmicity v okolí rekonstruované komunikace. Sborník vědeckých prací Vysoké školy báňské – Technické univerzity Ostrava, roč. XII, č. 1, 2012, řada stavební, ISSN1213-1962, s. 39-48.
- [5] PETŘÍK, T., STOLÁRIK, M.: Experimentální měření a numerický model dynamických účinků vibračního válce. *Sborník vědeckých prací Vysoké školy báňské Technické univerzity Ostrava*, roč. XI, č. 1, 2011, řada stavební, ISSN1213-1962, s. 97-102.
- [6] PYTKA, J., TARKOWSKI, P., KUPICZ, W.: A research of vehicle stability on deformable surface. *Ekspoatacja i niezawodnosc – Maintenance and Reliability*. Vol. 15, No. 3, 2013, ISSN 1507-2711, p. 290-297.

Oponentní posudek vypracoval:

Doc. Ing. Alexander Tesár, DrSc., Ústav stavebníctva a architektúry, Slovenská akadémia vied, Bratislava.

Ing. Petr Ferfecki, Ph.D., Výzkumný program 3, IT4Innovations, VŠB-TU Ostrava.

číslo 1, rok 2014, ročník XIV, řada stavební

článek č. 16

Jozef MELCER¹, Ivana MARTINICKÁ²

VZÁJOMNÉ POROVNANIE FFP PRE RÔZNE VÝPOČTOVÉ MODELY VOZIDLA

MUTUAL COMPARISON OF FRF FOR VARIOUS VEHICLE COMPUTATIONAL MODELS

Abstrakt

Funkcie frekvenčného prenosu (FFP) charakterizujú odozvu dynamického systému vo frekvenčnej oblasti. Predkladaný príspevok porovnáva funkcie frekvenčného prenosu pre rôzne výpočtové modely vozidla. Ukazuje, že pokiaľ sú výpočtové modely dynamicky ekvivalentné, tak zodpovedajúce FFP sú prakticky zhodné.

Klíčová slova

Výpočtové modely vozidla, nerovnosti cesty, funkcie frekvenčného prenosu.

Abstract

Frequency response functions (FRF) characterize the response of dynamic system in frequency domain. The submitted paper compares the frequency response functions for various vehicle computational models. It shows that while the computational models are dynamically equivalent than the FRF are practically identical.

Keywords

Vehicle computational models, road unevenness, frequency response functions.

1 ÚVOD

Pri riešení dvnamických úloh vo frekvenčnej oblasti nás zaujímajú hlavne frekvenčné spektrá a funkcie frekvenčného prenosu. Funkcie frekvenčného prenosu (FFP) vyjadrujú vzťah medzi odozvou a budením dynamického systému v závislosti od hodnoty budiacej frekvencie. V prípade dynamického systému tvoreného vozidlom a vozovkou sú nerovnosti vozovky zdrojom kinematického budenia vozidla. Výpočtové modely vozidiel je možné zvoliť na rôznej kvalitatívnej úrovni: celý priestorový model -3D, polovičný rovinný model -2D, štvrtinový model -1D. Pre tieto výpočtové modely je možné odvodiť rôzne frekvenčné prenosy. V prípade sledovania interakcie vozidlo – cesta zaujímajú stavebných inžinierov hlavne funkcie frekvenčného prenosu vzťahujúce sa k hodnotám kontaktných síl vznikajúcich medzi kolesom vozidla a jazdnou dráhou. Pre rôzne výpočtové modely vozidla je vhodné sledovať a vzájomne porovnávať takzvané výkonové prenosové faktory (VPF), čo sú druhé mocniny absolútnych hodnôt funkcií frekvenčného prenosu. Dá sa ukázať, že pokial' sú výpočtové modely vzájomne dynamicky ekvivalentné, tak funkcie frekvenčného prenosu pre vzájomne si korešpondujúce zložky, sú vzájomne prakticky identické. Možností, ako takéto údaje získať, je viac. V predkladanom príspevku sú prezentované a vzájomne porovnávané FFP dynamických zložiek kontaktných síl nákladného vozidla Tatra T815 získané numerickou cestou. Využitie získaných výsledkov je rôznorodé [1], [2], [3], [4], [5], [6].

¹ Prof. Ing. Jozef Melcer, DrSc., Katedra stavebnej mechaniky, Stavebná fakulta, Žilinská univerzita, Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina, tel.: (+421) 41 513 5612, e-mail: jozef.melcer@fstav.uniza.sk.

² Ing. Ivana Martinická, PhD., Katedra stavebnej mechaniky, Stavebná fakulta, Žilinská univerzita, Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina, tel.: (+421) 41 513 5612, e-mail: ivana.martinická@fstav.uniza.sk.

2 VÝPOČTOVÉ MODELY VOZIDLA

Výpočtové modely vozidla je možné voliť na rôznej úrovni v závislosti od sledovaných cieľov. Je možné použiť celý priestorový model vozidla – 3D (obr. 1), polovičný rovinný model – 2D (obr. 2), alebo štvrtinový model – 1D (obr. 3).



Obr. 1: Celý priestorový model T815 - 3D



Obr. 2: Polovičný rovinný model T815 – 2D



Obr. 3: Štvrtinový model prednej a zadnej nápravy T815 - 1D

Výpočtové modely zobrazené na obr. 1, 2, 3 sú diskrétne výpočtové modely. Pri riešení vo frekvenčnej oblasti nás zaujímajú hodnoty vlastných frekvencií netlmeného kmitania [7]. Ich hodnoty pre jednotlivé modely sú uvedené v nasledujúcom texte:

Plné vozidlo T815 – 3D

Vlastné frekvencie

 $\{\mathbf{f}\} = \{f_{(1)}; f_{(2)}; f_{(3)}; f_{(4)}; f_{(5)}; f_{(6)}; f_{(7)}; f_{(8)}; f_{(9)}\} = \{1.13; 1.29; 1.45; 8.89; 8.89; 10.91; 10.91; 11.71; 11.71\}$ [Hz]

Plné vozidlo T815 – 2D

Vlastné frekvencie

 ${\bf f} = {f_{(1)}; f_{(2)}; f_{(3)}; f_{(4)}; f_{(5)}} = {1.13; 1.45; 8.89; 10.91; 11.71}$ [Hz]

Plné vozidlo T815 – 1D, predná náprava

Vlastné frekvencie

 ${\mathbf{f}} = {f_{(1)}; f_{(2)}} = {1.06; 8.89}$ [Hz]

Plné vozidlo T815 – 1D, zadná náprava

Vlastné frekvencie

 $\{\mathbf{f}\} = \{f_{(1)}; f_{(2)}; f_{(3)}\} = \{1.40; 10.91; 11.71\}$ [Hz]

3 FUNKCIE FREKVENČNÉHO PRENOSU

Frekvenčný prenos lineárnej sústavy (funkcia frekvenčného prenosu FP(p), kde $p = i \cdot \omega$ je komplexné číslo, obr. 4) sa zavádza ako pomer ustálenej odozvy k harmonickému budeniu. Ak budenie je harmonické s jednotkovou amplitúdou

$$h(t) = h f(t) = 1 \cdot e^{i\omega \cdot t}, \qquad (1)$$

tak platí, že

$$FP(p) = FP(\mathbf{i} \cdot \omega) = r_{\text{ust}}(t) / (h \cdot e^{\mathbf{i} \cdot \omega \cdot t}) = r_{\text{ust}}(t) / (1 \cdot e^{\mathbf{i} \cdot \omega \cdot t}) = r_{\text{ust}}(t) \cdot e^{-\mathbf{i} \cdot \omega \cdot t}.$$
 (2)

Frekvenčný prenos FP(p) ako funkcia komplexne premennej sa dá zobraziť ako vektorový súčet reálnej a imaginárnej časti.

$$FP(p) = \operatorname{Re}[FP(p)] + i \cdot \operatorname{Im}[FP(p)], \qquad (3)$$

alebo

$$FP(p) = |FP(p)| \cdot e^{i \cdot \varphi}, \qquad (4)$$

kde |FP(p)| je absolútna hodnota, alebo veľkosť frekvenčného prenosu. Platí pre ňu

$$\left|FP(p)\right| = \sqrt{\operatorname{Re}^{2}[FP(p)] + \operatorname{Im}^{2}[FP(p)]}.$$
(5)

Druhú mocninu absolútnej hodnoty funkcie frekvenčného prenosu $|FP(p)|^2$ nazývame výkonový prenosový faktor (VPF).



Obr. 4: Grafická interpretácia funkčných hodnôt funkcie frekvenčného prenosu

4 PRECHOD Z ČASOVÉHO DO FREKVENČNÉHO PRIESTORU

Pre jednotlivé výpočtové modely vozidla sa odvodia pohybové rovnice. Ako neznáme v pohybových rovniciach vystupujú zložky posunutí $r_i(t)$ charakteristických bodov výpočtového modelu zodpovedajúce jednotlivým stupňom voľnosti. Zdrojom kinematického budenia sú nerovnosti jazdnej dráhy $h_j(t)$. Pre prechod z časového do frekvenčného priestoru je možné použiť napríklad Laplaceovu integrálnu transformáciu. Dohodnime sa, že Laplaceov obraz nejakej funkcie $r_i(t)$ označíme $L\{r_i(t)\} = R_i(p)$. Funkcie času $r_i(t)$ a $h_j(t)$ sa budú transformovať na funkcie $R_i(p)$ a $H_i(p)$. Zavedením nasledovného označenia je možné definovať rôzne frekvenčné prenosy

$$\bar{r}_i = \frac{R_i(p)}{H_i(p)} \,. \tag{6}$$

Laplaceovou transformáciou pohybových rovníc a zavedením frekvenčných prenosov dostaneme sústavu rovníc v komplexnom tvare pre výpočet funkcií $\overline{r_i}$. Zápis rovníc v maticovom tvare je nasledovný

$$[a] \cdot \{\bar{r}\} = \{PS\}. \tag{7}$$

Vo všeobecnosti platí, že

$$a_{ik} = a_{ik,re} + \mathbf{i} \cdot a_{ik,im}, \qquad \overline{r}_i = \overline{r}_{i,re} + \mathbf{i} \cdot \overline{r}_{i,im}, \qquad PS_i = PS_{i,re} + \mathbf{i} \cdot PS_{i,im}.$$
(8)

Podobným spôsobom je možné definovať aj frekvenčné prenosy pre dynamické zložky kontaktných síl

$$\overline{F}_{dn} = \frac{L\{F_{dn}(t)\}}{H_j(p)}.$$
(9)

Podrobný popis riešenia pre 2D model vozidla je uvedený napríklad v [8].

5 VÝSLEDKY NUMERICKÉHO RIEŠENIA

Numerické riešenie funkcií frekvenčného prenosu bolo vykonané pre 3D, 2D a 1D výpočtové modely nákladného automobilu Tatra T815 zobrazené na obr. 1, 2, 3. Všetky FFP sú vzťahované ku kinematickému budeniu nerovnosťou vozovky pod pravým predným kolesom vozidla. Uvažuje sa s rýchlosťou pohybu vozidla 10 m/s. Na obr. 5 sú vykreslené výkonové prenosové faktory (VPF) dynamickej zložky kontaktnej sily F_d pod pravým predným kolesom vozidla pre všetky 3 použité výpočtové modely. Poloha lokálnych extrémov a ich hodnoty sú nasledovné:

3D:	<i>f</i> =9,44 Hz;	$ F_{\rm d5}/h_5 ^2 = 8.02$	2.10^{6} k	N ² /n	n²;
		-		-	-

2D: f = 9,20 Hz; $|F_{d3}/h_3|^2 = 8.69.10^6$ kN²/m²; 1D: f = 9,30 Hz; $|F_d / h|^2 = 8.57.10^6$ kN²/m²;



Obr. 5: VPF pre F_d pod pravým predným kolesom

Na obr. 6 sú vykreslené výkonové prenosové faktory (VPF) dynamickej zložky kontaktnej sily F_d pod pravým predným kolesom zadnej nápravy vozidla pre všetky 3 použité výpočtové modely. Poloha lokálnych extrémov a ich hodnoty sú nasledovné:





Obr. 6: VPF pre *F*_d pod pravým predným kolesom zadnej nápravy

Na obr. 7 sú vykreslené výkonové prenosové faktory (VPF) dynamickej zložky kontaktnej sily F_d pod pravým zadným kolesom zadnej nápravy vozidla pre všetky 3 použité výpočtové modely. Poloha lokálnych extrémov a ich hodnoty sú nasledovné:





Obr. 7: VPF pre F_d pod pravým zadným kolesom zadnej nápravy

6 ZÁVER

Pri riešení dynamických úloh vo frekvenčnej oblasti sú predmetom záujmu buď frekvenčné spektrá alebo funkcie frekvenčného prenosu. Je možné ich získať teoretickou alebo experimentálnou cestou. V predloženom príspevku sú ukázané výsledky riešenia funkcií frekvenčného prenosu numerickou cestou pre 3D, 2D a 1D výpočtové modely vozidla Tatra T815 pri rýchlosti pohybu vozidla 10 m/s (36 km/h). Stavebného inžiniera zaujímajú v prvom rade frekvenčné prenosy týkajúce sa kontaktných síl vznikajúcich medzi kolesom vozidla a vozovkou. V grafickej podobe sú prezentované výkonové prenosové faktory dynamických zložiek kontaktných síl pod kolesami na pravej strane vozidla. Z uvedených obrázkov je zrejmé, že pokiaľ sú jednotlivé výpočtové modely dynamický identické. Vzájomné porovnania nie sú závislé od rýchlosti pohybu vozidla. Na vznik kontaktných síl majú výkonovo najväčší podiel tie frekvenčné zložky kinematického budenia, ktoré korešpondujú vlastným frekvenciám a tvarom vlastného kmitania vťahujúcim sa k dominantným pohybom náprav vozidla.

POĎAKOVANIE

Tento príspevok vznikol s podporou GA MŠSR VEGA, grant č. 1/0259/12.

LITERATÚRA

- [1] PANULINOVÁ, E. Vplyv rovnosti povrchu vozovky na hladinu hluku z automobilovej dopravy. *Silniční obzor*. Praha, 2001, roč. 62, č. 11/12, s. 275 279, ISSN 0322-7154.
- [2] KOTRASOVÁ, K. a KORMANÍKOVÁ, E. Seismic design of liquid storage tank made from composite material. *World Journal of Engineering*. 2008, Vol. 5, No. 3, p. 445-446. ISSN 1708-5284.
- [3] IVÁNKOVÁ, O. Vplyv seizmicity na konštrukčné systémy výškových budov. Medzinárodná konferencia: Vývoj a aplikace MKP systémů pro analýzu stavebních konstrukcí. VÚT Brno, 2003, s. 17.1 – 17.6.
- [4] LAJČÁKOVÁ, G. Interaction in the system vehicle Roadway. 2nd International Conference: New Trends in Statics and Dynamics of Buildings. STU Bratislava, 2003, October 16 – 17, 2003, p. 27-30, ISBN 80-227-1958-7.
- [5] PYTKA, J., TARKOWSKI, P., KUPICZ, W.: A research of vehicle stability on deformable surface. *Ekspoatacja i niezawodnosc – Maintenance and Reliability*. Vol. 15, No. 3, 2013, p. 290-297, ISSN 1507-2711.
- [6] MAJKA, M., HARTNETT, M.: Dynamic response of bridges to moving trains. A study on effects of random track irregularities and bridge skewness. *Computers & Structures*, Vol. 87, 2009, p. 1233-1252.
- [7] MARTINICKÁ, I.: Výpočet vlastných frekvencií a tvarov vlastného kmitania výpočtových modelov vozidiel. *Pozemné komunikácie a dráhy*. 2010, roč. 6, č.1-2, s. 41-50, ISBN 1336-7501.
- [8] MELCER, J., MARTINICKÁ, I.: Vozidlo cesta numerické riešenie vo frekvenčnej oblasti. Sborník vědeckých prací Vysoké školy báňské – Technické univerzity Ostrava. Řada stavební. VŠB TU, SvF, Ostrava, roč. XIV., č.1, 2014, 10 s., ISSN 1213-1962.

Oponentní posudek vypracoval:

Prof. Ing. Petr Horyl, CSc., dr.h.c., Katedra mechaniky, Fakulta strojní, VŠB-TU Ostrava.

Prof. Ing. Jiří Máca, CSc., Katedra mechaniky, Fakulta stavební, ČVUT v Praze.

Sborník vědeckých prací Vysoké školy báňské - Technické univerzity Ostrava

číslo 1, rok 2014, ročník XIV, řada stavební

článek č. 17

Milan MORAVČÍK¹

PRENOS VIBRÁCIÍ KONŠTRUKCIOU TRATE PRI PREJAZDE VLAKOV

VIBRATION TRANSMISION DUE TO MOVING TRAIN

Abstrakt

Analyzuje sa prenos vibrácií a ich tlmenie v konštrukcii trate, ktorá je dynamicky zaťažovaná opakovanými prejazdmi vlakov. Aplikovaná je experimentálna analýza prejazdov charakteristických vlakov osobnej dopravy, ktorá je vyhodnocovaná v časovej a frekvenčnej oblasti pre f = (0.500 Hz). Dominantné frekvencie ovplyvňujúce kmitania koľajníc, podvalov, štrkového lôžka a zemného telesa trate sú hodnotené zo získaných časových záznam prejazdu vlakov.

Kľúčové slova

Experimentálna analýza, frekvenčná analýza kmitania, kmitanie komponentov trate.

Abstract

The transmission of vibration and damping in the track structure, which is dynamically loaded by repeated passages of the train bogies is analyzed. The experimental analysis is performed for passages of the passenger train which are evaluated in the time and frequency domain f = (0.500 Hz). The influence of dominant frequency phenomena on the rails, sleepers, ballast bed, and ground vibration are investigated from the time records of the train passages.

Keywords

Experimental analysis, frequency analysis, vibration of track.

1 ÚVODNÉ POZNÁMKY K DYNAMICKÉMU NAMÁHANIU TRATE

Príspevok je venovaný vybraným aspektom dynamického chovania konštrukcie trate, najmä vibráciám komponentov železničného zvršku (koľajové pásy, podvaly, štrkové lôžko, zemné teleso), ktoré sú dynamicky zaťažované opakovanými prejazdmi vlakov, pričom sa hodnotia aj javy spojené so šírením vibrácii a hlukových emisii do okolia tratí najmä:

- redukcia dynamických účinkov konštrukciou trate a koľajových vozidiel pohodlie cestovania a vplyv tlmenia v komponentoch trate.
- redukcia vibrácií a hlukového zaťaženia nepriaznivo pôsobiace na okolité konštrukcie a obyvateľov v blízkosti tratí, obr.1.1.

Prenos vibrácii konštrukciou trate, resp. jej hlavných prvkov je vyvolané celým radom budiacich zdrojov, ktoré ovplyvňujú nielen kmitanie trate, ale aj dynamické javy spojené so šírením deformačných vĺn v konštrukcii trate, obr.1.2. Zložitý problém dynamickej interakcie pohybujúce sa vozidlo – trať sa rieši dvoma základnými prístupmi:

A/ Teoretickou cestou – aplikáciou rôznych výpočtových modelov zohľadňujúcich pružné a tlmiace väzby vystupujúce v modeloch zaťaženia (koľajových vozidiel) aj konštrukcie trate

¹ Prof. Ing. Milan Moravčík, CSc. ¹, Katedra stavebnej mechaniky, Stavebná fakulta, Žilinská univerzita v Žiline, Univerzitná 8215/1, 010 26 Žilina, Slovenská republika, e-mail: mimo@fstav.uniza.sk.

(komponenty trate) a simuláciou dôležitých parametrov na dynamickú odozvu. Pritom sa využíva riešenie MKP, čo je aplikované napríklad v [3, 4].



Obr. 1.1: Vibrácie konštrukcie trate, prenos podložím a hlukové zaťaženie v okolí tratí



Obr. 1.2: Schéma prenosu silových účinkov konštrukciou trate

Výstupy riešenia dynamickej odozvy trate majú rôznu podobu, podľa formulácie úlohy a cieľov riešenia a obyčajne sa formulujú ako úlohy:

A1/ Modálne vlastnosti konštrukcie

- Vlastné frekvencie kmitania $f_{(i)}$ a im odpovedajúce vlastné tvary kmitania,
- Tlmiace vlastnosti konštrukcie logaritmický dekrement útlmu ${\cal G}$.

A2/ Dynamické vlastnosti konštrukcie v tvare frekvenčných charakteristík odozvy na harmonické budenie (amplitúdové a fázové charakteristiky odozvy), obyčajne vo forme dynamickej poddajnosti - "receptancie $\alpha(i\omega)$ ", ktorá predstavuje citlivosť konštrukcie na harmonické budenia, alebo v inverznej forme dynamickej tuhosti $k(i\omega)$.

Dynamická poddajnosť je definovaná komplexným pomerom dynamickej výchylky w(x,t) *a* budiacej sily F(x,t) v mieste *x* konštrukcie:

$$\alpha(i\omega) = \frac{w(x,t)}{F(x,t)} = \frac{\left|\hat{w}\right| \exp i(\omega t + \varphi_w)}{\left\|\hat{F}\right| \exp i(\omega t + \varphi_F)\right|} = \frac{\left|\hat{w}\right|}{\left|\hat{F}\right|} \exp i(\varphi_w - \varphi_F) = \left|\alpha\right| \exp i.\Phi_\alpha \tag{1.1}$$

s amplitúdovou charakteristikou dynamickej poddajnosti:

$$|\alpha| = \frac{|\widehat{w}|}{|\widehat{F}|}, \quad [\text{m/N}]. \tag{1.2}$$

kde: $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ je uhlová frekvencia, φ je fázový posun.

Dynamická tuhosť (dynamic stiffness) je inverzná funkcia k dynamickej poddajnosti:

$$k(i\omega) = \frac{1}{\alpha(i\omega)} = \frac{F(x,t)}{w(w,t)} , [N/m]$$
(1.3)

Dynamické vlastnosti konštrukcie však môžu byť vyjadrené aj ďalšími vzťahmi tzv. "mobility dates", ako pomer rýchlosti kmitania ku dynamickej sile – (mobility), alebo zrýchlenie kmitania ku dynamickej sile (inertancia) a ich inverzné charakteristiky.

A3/ Dynamická odozva konštrukcie trate na účinky pohyblivého dynamického zaťaženia - účinky kolesových síl, podvozkov, resp. celých vlakov sa určuje pre charakteristické traťové úseky (priame úseky, oblúky, výhybky, mosty, tunely) a pre hlavné typy konštrukcie trate (novo budovaný koridor, klasické konštrukcie trate). Ide o hodnotenie prejavov dynamických interakčných síl $P_{dyn}^{w/r}(x, t)$ vznikajúcich na styku "koleso – koľajnica" na konštrukciu trate:

- dynamických posunov $_{W_Y}(x,t)$ komponentov trate (Y), kde (Y)= koľajnica (R), podvaly (S) štrkové lôžko (B), resp. ich zrýchlenia $_{W_Y}(x,t)$,
- pomerného pretvorenia $\varepsilon_{y}(x,t)$, resp. im odpovedajúcej napätosti $\sigma_{y}(x,t)$,
- dynamických interakčných síl koleso/koľajnica $F_y(x,t)$,
- dynamických koeficientov komponentov trate $\delta_{dyn} = \frac{w(x,t)}{w_{yt}(x)}$.

Typické teoretické závislosti dynamickej poddajnosti $\alpha(f)$ pre rovinný model trate, pre nízke a stredné frekvencie sú prezentované na obr. 1.3, z ktorých môžeme usudzovať na náchylnosť rezonančného kmitania v konštrukcii trate. Vidíme, že rozhodujúce frekvenčné zložky ležia v nízkofrekvenčnej oblasti $f = (4 \div 80 Hz)$. Tieto vibrácie sa šíria z miesta styku koleso – koľajnica, ktoré však je v pohybe, cez koľajnice, podvaly štrkové lôžko a zemné teleso trate do okolia tratí, kde nepriaznivo pôsobia na životné prostredie, obr.1.1. Všeobecne problém kmitania konštrukcie trate je širokospektrálny problém zahŕňajúci nielen vibrácie konštrukcie a vlnenia, ale aj šírenie zvukových emisií pri prejazde vlakov. Tento príspevok sa analyzuje kmitanie komponentov trate vo frekvenčnej oblasti $f = (1 \div 500 Hz)$.

B/ **Experimentálnou analýzou** v neporušenej konštrukcii trate, ktorá má rovnaké ciele ako teoretická analýza, ale zohľadňuje skutočné pomery v konštrukcii trate. Hľadajú sa možné rezonančné oblasti kmitania konštrukcie trate a jej prvkov (podvaly, štrkové lôžko, podkladové vrstvy) pri prejazde vlakov osobnej a nákladnej dopravy a to v priamych traťových úsekov, ale v oblúkoch a na výhybkách.

Viaceré aspekty problematiky dynamického namáhania trate boli prezentované napr. V prácach [3, 4, 5]. Tento príspevok je venovaný vibráciám prenášaných hlavnými konštrukčnými komponentmi trate do zemného telesa trate, ich tlmeniu a zmenám ich frekvenčnej skladby.



Obr. 1.3: Typické teoretické závislosti poddajnosti trate $\alpha(f)$ pre diskrétny rovinný model trate: (1) Pre nespojené štrkové lôžko pod podvalmi (____) - riešenie KSM [3] a (2) pre spojené – spolukmitajúce štrkové lôžko s podvalmi (____) - podľa [2]

2 KVÁZI-STATICKÉ A DYNAMICKÉ ÚČINKY NA KONŠTRUKCIU TRATE

Kmitanie hlavných komponentov konštrukcie trate $(Y) \rightarrow (koľajové pásy (R), podvaly (S), štrkové lôžko (B) a zemné teleso trate (Z)) je vyvolané celým radom budiacich zdrojov:$

- kvázi-statické budenie odpovedajúce pohybu podvozkov koľajových vozidiel (vlakov) v závislosti na ich hmotnosti a rýchlosti pohybu,
- nerovnosti na koľajniciach a kolesách koľajových vozidiel,
- skladba a typy vlakov,
- diskrétne podpery koľajníc a tuhosť podkladu,

ale aj ďalšími dynamickými efektmi spojenými so šírením deformačných vĺn v koľajniciach a podvalovom podloží.

V idealizovanej konštrukcii trate (trať bez defektov s konštantnou tuhosťou podkladu) je pretvorenie trate závisle len na veľkosti kolesových síl P_w . Prejazd každého dvojkolesia náprav vozidiel sledovaným miestom x vyvolá priehyb koľajového pásu w(x,t), ktorého charakter je závislý na rýchlosti pohybu *c* a ďalších parametroch. Teoretické riešenie problému pohybu kolesovej sily P_w po koľajovom páse s tuhosťou podkladu k_z , uvažovanom ako nosník na pružnom podklade [4], má známy tvar:

$$EI\frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + m_1 \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + b\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} + k_z \cdot w(x,t) = P_w \cdot \delta(x-ct)$$
(2.1)

Z riešenia priehybu w(x,t) v (2.1) vyplýva tzv. "kritická rýchlosť pohybu c_{cr} ", pri ktorej dynamické účinky môžu dosahovať vysoké hodnoty:

$$c_{cr}^{2} = \frac{2 \sqrt{k_{z}.EI}}{m_{1}} \rightarrow c_{cr} = \frac{\sqrt[4]{4EI.k_{z}}}{\sqrt{m_{1}}}$$
(2.2)

kde: k_z je tuhosť podkladu [N/m²],

 m_1 je hmotnosť nosníka [kg/m],

EI je ohybová tuhosť nosníka [Nm²],

 $\delta(x-ct)$ je Diracova funkcia.

Riešenie problému (2.1) je tzv. "kvazistacionárny stav" popísaný v pohyblivom súradnicovom systéme $(x,w) \rightarrow$ priehybová vlna vytvorená pod kolesami $w(x,t) \equiv w_{st}(t)$ sa pohybuje spoločne so silou P_w , obr.2.1.



Obr. 2.1: Pevný a pohyblivý súradnicový systém pre pohyb sily po nosníku na pružnom podklade

Kritické rýchlosti c_{cr} dosahujú vysoké hodnoty ($c_{cr} \approx 420 \text{ m/s}$), teda sú vzdialené od bežných prevádzkových rýchlosti, kde $c < c_{cr}$. Nebezpečný rezonančný stav môže nastať pri vysokorýchlostných tratiach na mäkkom podloží, kedy priehybová vlna w(x,t) šíriaca sa s pohybom vlaku sa priblíži rýchlosti šírenia Rayleighových vĺn v podloží dĺžke ($c_r \approx 100 \div 300 \text{ m/s}$), čo môže spôsobiť veľké a nestabilné pretvorenia v podloží trate.

Interakčné kolesové sily $P_{dyn}^{w/r}(x,t)$ sú z kontaktného bodu koleso - koľajnica prenášané konštrukciou trate (podvaly, štrkové lôžko, podkladové vrstvy) aj do okolia trate spôsobujú charakteristické dynamické javy:

kmitanie komponentov trate – koľajových pásov, podvalov, štrkového lôžka a podložia trate, kde dominujú najmä nízkofrekvenčné zložky interakčných síl.

šírenie pružných deformačných vĺn konštrukciou trate aj zeminovým podložím (povrchové Rayleighove vlny, pozdĺžne a priečne vlny), ktoré spôsobujú nízke a stredné frekvenčné zložky interakčných síl.

vzduchom prenášané zvukové emisie šíriace sa v okolí trate, ktoré spôsobujú stredné a vysokofrekvenčné zložky interakčných síl.

Pri budiacich účinkov koľajových vozidiel v konštrukcii trate rozlišujeme:

a/ Kvázi-statické účinky pohyblivých hmotných náprav závislé na skladbe podvozkov koľajových vozidiel a rýchlosti pohybu c. Pre rýchlosti $c < c_{cr}$ sa tieto účinky prejavujú ako charakteristické kvázi-statické pretvorenie trate $w_R(t) \equiv w_{st}$ v zmysle obr. 2.2.



Obr. 2.2: Časový záznam vertikálnych posunov koľajového pásu $w_R(t) \equiv w_{st}$ pri prejazde rýchlika L30+8 vagónov, relatívny snímač D_R/Bosh, c = 119 km/h

Kvázi-statické účinky majú nízkofrekvenčný charakter $f \approx (0 \div 30 \text{ Hz})$ a pre rýchlosti vlakov do 200 km/h ovplyvňujú len blízke okolie styku koleso koľajnica, pričom sú rýchlo tlmené a teda nevytvárajú nebezpečné dynamické javy v okolí trate.

b/ **Dynamické účinky pohyblivých hmotných náprav** sú dôsledkom viacerých dynamických zdrojov budenia, najmä:

- imperfekcií (nerovnosti) koľajníc a kolies vozidiel,
- nerovnomernej tuhosti podkladu pod podvalmi,
- parametrického budenia v dôsledku prejazdu náprav nad podvalmi, charakterizované frekvenciou:

$$f_s = \frac{c}{L_s} \quad [\text{Hz}] \tag{2.3}$$

kde: $L_s = 0,6$ m (vzdialenosť podvalov).

Zmieňované dynamické účinky majú všeobecne širokospektrálnu skladbu $f \approx (0 \div 1500 Hz)$, ktorú je potrebné analyzovať použitím vhodných snímačov kmitania a analyzátorov dynamických signálov (LabView-National Instruments, DISYS a pod.). Časové záznamy dynamických zložiek zrýchlenia kmitania koľajnice $\Delta \ddot{w}_R(t)$, podvalov $\Delta \ddot{w}_S(t)$ a štrkového lôžka $\Delta \ddot{w}_B(t)$, majú vždy charakteristický tvar sprevádzaný tlmením amplitúd výchyliek, resp. zrýchlení kmitania, obr.3.4÷3.6.

3 KMITANIE KOMPONENTOV ŽELEZNIČNÉHO ZVRŠKU – MERANIE V TRATI

Naše pracovisko má zriadené dve experimentálne meracie miesta na hlavnom ťahu Bratislava – Košice, kde sa opakovane vykonávali merania od roku 2004 až doteraz:

(1) na novobudovanom koridore v úseku Cífer – Trnava → priamy traťový úsek,

(2) na klasickej konštrukcii trate v úseku Žilina – Varín→ priamy traťový úsek,

Tento príspevok je venovaný novovybudovanému koridoru, kde konštrukcia trate má rovnakú skladbu konštrukčných vrstiev, obr. 3.1. Prejazdy vlakov osobnej prepravy majú tiež typickú skladbu – lokomotíva + 5-10 osobných vozňov. Rýchlosť vlakov sa pohybovala od 90 ÷ 140 km/h.



Obr. 3.1: Charakteristický priečny rez konštrukciou trate koridoru Bratislava – Žilina

3.1 Merané veličiny

Vertikálne kmitanie koľajníc (*R*), podvalov (*S*), štrkovej vrstvy meranej medzi podvalmi (*B*) a zemného telesa trate (*Z*) boli merané meracou linkou Katedry stavebnej mechaniky vždy rovnakou metodikou popísanou napríklad v prácach [4, 5]. Priame meranie priehybov pomocou relatívnych snímačov D_R , D_S dáva celkové kvázi-statické priehyby $W_{st}(t)$ týchto komponentov, ktoré je charakterizované nízkymi frekvenčnými zložkami. Akcelerometre A_R , A_S , A_B , A_Z dávajú zas dynamické zložky odozvy týchto komponentov $\Delta \ddot{w}_R(t)$, $\Delta \ddot{w}_S(t)$, $\Delta \ddot{w}_B(t)$ a $\Delta \ddot{w}_Z(t)$, ale v širokej frekvenčnej oblasti pričom nepotrebujú referenčnú základňu, obr.3.2.

> R_k, R_p PRIEHYBOMERY A_k, A_p, A_{bal} SNÍMAČE ZRÝCHLENIA



Obr. 3.2: Snímané miesta v konštrukcii trate

Pri meraní dynamickej odozvy širokopásmových procesov je potrebné správne voliť merací reťazec – výber snímačov, citlivosti a pod. a zohľadňovať základné súvislosti medzi amplitúdami posunov kmitania $\Delta \widehat{w}(t)$, rýchlosti $\Delta \widehat{w}(t)$ a zrýchlenia kmitania $\Delta \widehat{w}(t)$. Potom priame meranie výchyliek $\Delta \widehat{w}(t)$ bude zvýrazňovať nízkofrekvenčné zložky vibrácií a meranie zrýchlení $\Delta \widehat{w}(t)$ zas vysokofrekvenčné zložky, obr. 3.3. Pre širokopásmové procesy, ako sú aj vibrácie konštrukcie trate, volíme snímanie zrýchlení, pričom však zohľadňujeme vyššie uvedené súvislosti – filtrácia signálov, pásmové priepustnosti a pod.



Obr. 3.3: Vzťah amplitúd rýchlosti $\hat{w}(t)$ a posunov $\hat{w}(t)$ kmitania voči amplitúdam zrýchlenia kmitania $\hat{w}(t)$ v meraných signáloch

3.2 Frekvenčná analýza odozvy trate pri prejazde celého vlaku

Vo frekvenčnej analýze kmitania komponentov trate hra voľba vzorkovacej frekvencie f_s dôležitú úlohu, nakoľko sa jedná o relatívne rýchle dynamické deje a ovplyvňuje presnosť (rozlišovacia schopnosť) spektrálnych obrazov. Jednostranná autospektrálna hustota $G_{XX}(f_k)$ pre frekvencie f_k meraného časového záznamu $\{x(t)\}$ je definovaná ako v [4]:

$$G_{XX}(f_k) = \frac{2}{n_d T} \sum_{i=1}^{n_d} |X_i(f_k)|^2, \ k=1, 2, 3, \dots N/2$$
(3.1)

kde:

$$X_i(f_k) = \Delta t. X_{ik} = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} x_{in} \cdot \exp\left[\frac{-j2\pi kn}{N}\right]$$
(3.2)

N je veľkosť analyzovaného bloku, ktorý sa volí $\rightarrow N = 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096.$

Ďalší dôležitý krok frekvenčnej analýzy časových signálov je vhodný výber funkcie váhového okna (váhové časové okno). Hanningovo váhové okno bolo aplikované vo všetkých analýzach. Spektrálna analýza časových záznamov sa vyhodnocovala ako amplitúdové výkonové spektrum (Power Spectrum – PWR). Príklad analýzy prejazdu rýchlika na koridore v úseku Cífer – Trnava je prezentovaný na obr. 3.4 ÷ 3.6.

Prejazd rýchlika L350 + 8 vagónov _ Merania TN II, No. 2: Analýza vertikálneho zrýchlenia koľajnice Δ\"w_p(t), t = 9,0 s, c =118 km/h, Analýza LABWIEV, f_s= 1000 Hz.



a/ Časový priebeh vertikálneho zrýchlenie koľajnice $\Delta \ddot{w}_R(t)$, snímač A_R / BK4500, t = 9,0 s, Nefiltrovaný záznam



(75% prekrytie)



c/ Priemerované výkonové spektrum $S_{\ddot{w}\ddot{w}}(f)$ kmitania koľajnice $\Delta \ddot{w}_{R}(t)/A_{R}$: Mean PWR 32xN1024



> **Prejazd rýchlika L350 + 8 vagónov** Merania TN II, No. 2: Analýza vertikálneho zrýchlenia podvalu $\Delta \ddot{w}_s(t)$, t = 9,0 s, c = 118 km/h, Analýza Labview, $f_{s=} 1000$ Hz.



a/ Časový priebeh vertikálneho zrýchlenia podvalu $\Delta \ddot{w}_s(t)$ snímač A_s/ BK4500, Nefiltrovaný záznam



(prekrytie 75%)



c/ Priemerované výkonové spektrum $S_{\psi\psi}(f)$ kmitania podvalu $\Delta \ddot{w}_{s}(t) / A_{s}$: Mean PWR 32xN1024, (prekrytie 75%)

Obr. 3.5: Frekvenčná analýza kmitania podvalu A_S - prejazdu rýchlika L350 + 8 vagónov

▶ **Prejazd rýchlika L350 + 8 vagónov** Merania TN II, No. 2: Analýza vertikálneho zrýchlenia štrkového lôžka $\Delta \ddot{w}_{B}(t)$, t = 9,0 s, c =118 km/h, Labview, f_s= 1000 Hz.



a/ Časový priebeh vertikálneho zrýchlenia štrkového lôžka $\Delta \ddot{w}_B(t)$, snímač A_B / BK8306, t = 9,0 s



b/ Výkonové spektrum $S_{\ddot{w}\ddot{w}}(f)$ kmitania štrkového lôžka $\Delta \ddot{w}_B(t)$ / A_B: PWR 32xN=1024, (prekrytie75%)


c/ Priemerované výkonové spektrum $S_{ww}(f)$ kmitania štrkového lôžka $\Delta \ddot{w}_B(t) / A_B$: Mean PWR 32xN1024, (prekrytie 75%)

Obr. 3.6: Frekvenčná analýza kmitania štrkového lôžka A_B - prejazdu rýchlika L350 + 8 vagónov

Analogickým postupom ako je prezentovaná vyššie uvedená analýza prejazdu celého vlaku sa postupuje aj pri posudzovaní vplyvu prejazdu jednotlivých podvozkov koľajových vozidiel – lokomotív a vagónov na odozvu trate.

4 HLAVNÉ VÝSLEDKY MERANEJ DYNAMICKEJ ODOZVY

Hlavný cieľ experimentálnej analýzy bol zameraný na hodnotenie frekvenčnej skladby kmitania jednotlivých komponentov trate a tlmenia dynamických účinkov, ako dôsledok interakčných síl vznikajúcich na styku koleso - koľajnica a prenášaných konštrukciou trate:

• Časové priebehy vertikálneho zrýchlenia komponentov trate – koľajníc $\Delta \ddot{w}_{R}(t)$, podvalov

 $\Delta \ddot{w}_{S}(t)$, štrkového lôžka $\Delta \ddot{w}_{B}(t)$ a zemného telesa $\Delta \ddot{w}_{Z}(t)$ dobre reprezentujú intenzitu vibrácií komponentov trate, aj redukciu dynamických účinkov v jednotlivých pružných väzbách smerom k podkladovým vrstvám konštrukcie trate. Tlmenie kmitania komponentov trate sa kvalitatívne zmenšuje smerom k podložiu, čo kvantitatívne možno vyjadriť faktorom 0,1 tlmenia amplitúd kmitania:

• Frekvenčná skladba kmitania komponentov trate potvrdila, že rozhodujúce frekvencie ležia v nízkofrekvenčnej oblasti: $f = (1 \div 100 Hz)$. Ukázalo sa že rýchlosť prejazdu vlakov osobnej dopravy do 140 km/h neovplyvňuje výrazne dynamickú odozvu. Odozva trate je takmer identická pri všetkých prejazdoch vlakov osobnej dopravy. Pri ťažkých nákladných vlakov je tento vplyv už výrazný.

• Identifikovali sa hlavné rezonančné oblasti vibrácii pre prevádzkové rýchlosti vlakov do 140 km/h pre koľajové pásy, podvaly, štrkové lôžko aj zemné teleso trate, resp. náchylnosť rezonančného kmitania v týchto konštrukčných prvkov:

- Koľajnicové pásy: Frekvenčné spektrum $S_{\bar{w}\bar{w}}(f)$ vertikálneho zrýchlenia $\ddot{w}_R(t)$ v oblasti $f = (0 \div 500 \text{ Hz})$ je širokopásmové s najvýraznejšími frekvenciami v oblasti $f = (0 \div 60 \text{ Hz})$.

- **Podvaly:** Redukcia kmitania je výrazná. Frekvenčné spektrum $S_{\psi\psi}(f)$ vertikálneho zrýchlenia $\ddot{w}_{e}(t)$ má v oblasti $f = (0 \div 500 \text{ Hz})$ tiež širokopásmový charakter, ale s dvomi výraznými

frekvenčnými oblasťami: $f_{(1)} = (0 \div 120 \text{ Hz})$ s dominujúcimi frekvenciami: f = 10, 25, 61 Hz, kedy spoločne kmitá koľajnica a podvaly a $f_{(2)} = (250 \div 370 \text{ Hz})$, kedy tiež kmitá koľajnica na podvaloch.

- Štrkové lôžko: Redukcia kmitania voči podvalom je opäť výrazná. Frekvenčné spektrum $S_{ww}(f)$ vertikálneho zrýchlenia $\ddot{w}_{B}(t)$ má dominantnú oblasť frekvencii $f = (54 \div 62 Hz)$.

- Zemné teleso trate (2,5 m od vonkajšej koľajnice): Frekvenčné spektrum $S_{\ddot{w}\ddot{w}}(f)$ vertikálneho zrýchlenia $\ddot{w}_{z}(t)$ má dominantné frekvencie tiež v oblasti $f = (54 \div 62 \text{ Hz})$.

• Rozhodujúce vplyvy na intenzitu vibrácii majú dynamické zložky budenia pochádzajúce z nerovnosti na koľajniciach a kolesách koľajových vozidiel. Experimentálna analýza potvrdila, že rozhodujúce frekvenčné zložky kmitania ležia v nízkofrekvenčnej oblasti $f = (1 \div 100 \text{ Hz})$. Hlavné oblasti dominantných frekvencii kmitania koľajníc, podvalov a štrkového lôžka, ostávajú principiálne zachované v každom vytvorenom zázname.

POĎAKOVANIE

Príspevok vnikol za finančnej podpory Grantovej agentúry VEGA-MŠ SR – Registračné číslo projektu 1/0517/12.L

LITERATÚRA

- [1] KNOTHE K., GRASSIE S.: Modelling of railway track and vehicle/track interaction at high frequencies, Vehicle system dynamic 22 (1993), pp. 209-262
- [2] KNOTHE K., WU Y.: Receptance behaviour of railway track and subgrade. Archive of applied mechanics 68 (1998), Spring verlag, pp.457-470.
- [3] SIČÁR M.: Dynamická interakcia trate a vozidla. Dizertačná práca (1996), Žilinská univerzita, 180 p.
- [4] MORAVČÍK MILAN, MORAVČÍK MARTIN: Mechanika železničných tratí, Časť 3 . Eperimentálna analýza namáhania a pretvorenia komponentov trate Edis Žilina 2002. Diel 3, ISBN 80-7100-985-7, 220 s.
- [5] MORAVČÍK M.: Dynamic behaviour of railway track experimental measurements. Communication 3/2002, ISSN 1335-4205, pp. 45-62.
- [6] Diadem /NT Manual: Advance Course Manual, Versiom 10.0, 2006.

Oponentní posudek vypracoval:

Doc. Ing. Otto Plášek, Ph.D., Ústav železničních konstrukcí a staveb, Fakulta stavební, VUT v Brně.

Ing. Martin Stolárik, Ph.D., Katedra geotechniky a podzemního stavitelství, Fakulta stavební, VŠB-TU Ostrava.

číslo 1, rok 2014, ročník XIV, řada stavební

článek č 18

Martin PSOTNÝ¹

NONLINEAR ANALYSIS OF BUCKLING & POSTBUCKLING

Abstract

The stability analysis of slender web loaded in compression was presented. To solve this problem, a specialized computer program based on FEM was created. The nonlinear finite element method equations were derived from the variational principle of minimum of potential energy. To obtain the nonlinear equilibrium paths, the Newton-Raphson iteration algorithm was used. Corresponding levels of the total potential energy were defined. The peculiarities of the effects of the initial imperfections were investigated. Special attention was focused on the influence of imperfections on the post-critical buckling mode. The stable and unstable paths of the nonlinear solution were separated. Obtained results were compared with those gained using ANSYS system.

Keywords

Stability, postbuckling, geometric nonlinear theory, initial imperfection, finite element method, Newton-Raphson method, arc-length method.

1 INTRODUCTION

The snap-through effect means a sudden modal change in the buckling surface of a slender web. Even in the case when the snap-through of the slender web does not mean the collapse of the structure, we consider it to be a negative phenomenon. In the presented paper we try to explain the behaviour of the snap-through of the slender web loaded in compression [1]. The geometrically nonlinear theory represents a basis for the reliable description of the postbuckling behaviour of the slender web. The result of the numerical solution represents a lot of the load versus displacement paths. Except the presentation of the different load-displacement paths the level of the total potential energy has been evaluated as well.

2 THEORY

Let us assume a rectangular slender web simply supported along the edges (Fig. 1) with the thickness t. The displacements of the point of the neutral surface are denoted $\mathbf{q} = [u, v, w]^{T}$ and the related load vector is $\boldsymbol{p} = [p_x, 0, 0]^T$.

We assume the so called von Kármán theory, when the out of plane (plate) displacements (w) are much bigger as in-plane (web) displacements (u, v). Taking into account the non-linear terms one gets the strains

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_{Lm} + \boldsymbol{\varepsilon}_{Nm} - \boldsymbol{z} \ast \boldsymbol{k} \tag{1}$$

where $\varepsilon_{Lm} = [u_{,x}, v_{,y}, u_{,y} + v_{,x}]^T$, $\varepsilon_{Nm} = \frac{1}{2} [w_{,x}^2, w_{,y}^2, 2w_{,x} * w_{,y}]^T$, $\boldsymbol{k} = [w_{,xx}, w_{,yy}, 2w_{,xy}]^T$,

the indexes denote the partial derivations.

¹ Doc. Ing. Martin Psotný, PhD., Department of Structural Mechanics, Faculty of Civil Engineering, Slovak University of Technology, Radlinského 11, 813 68 Bratislava, Slovakia, phone: (+421) 259 274 652, e-mail: martin.psotny@stuba.sk.



Fig. 1: Slender web: a) Notations of the quantities, b) FEM model - SHELL 143

The initial displacements will be assumed as the out of plane displacements only and so it yields

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \boldsymbol{\varepsilon}_{0Nm} - \boldsymbol{z} \ast \boldsymbol{k}_0 \,. \tag{2}$$

Restricting to the isotropic elastic material and to the constant distribution of the residual stresses ($\sigma_{xw}, \sigma_{yw}, \tau_{w}$) over the thickness, the total potential energy can be expressed as

$$U = \int_{A} \frac{1}{2} (\boldsymbol{\varepsilon}_{m} - \boldsymbol{\varepsilon}_{0m})^{T} t \boldsymbol{D} (\boldsymbol{\varepsilon}_{m} - \boldsymbol{\varepsilon}_{0m}) dA + \int_{A} \frac{1}{2} (\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}_{0})^{T} \frac{t^{3}}{12} \boldsymbol{D} (\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}_{0}) dA - \int_{A} \boldsymbol{q}^{T} \boldsymbol{p} dA, \qquad (3)$$

where $\boldsymbol{\varepsilon}_{m}, \boldsymbol{k}$

 $\boldsymbol{\varepsilon}_{0m}, \boldsymbol{k}_0$ are initial strains and curvatures,

1

q, p are displacements of the point of the neutral surface, related load vector.

are strains and curvatures of the neutral surface,

The system of conditional equations can be obtained from the condition of the minimum of the increment of the total potential energy [6]

$$\delta \Delta U = 0. \tag{4}$$

This system can be written as:

$$\mathbf{K}_{inc}\,\Delta\,\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{F}_{int} - \boldsymbol{F}_{ext} - \Delta\,\boldsymbol{F}_{ext} = 0\,\,,\tag{5}$$

where $\mathbf{K}_{inc} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{incD} & | & \mathbf{K}_{incDS} \\ \mathbf{K}_{incSD} & | & \mathbf{K}_{incS} \end{bmatrix}$ is the incremental stiffness matrix, $\mathbf{F}_{int} = \begin{cases} \mathbf{F}_{intD} \\ \mathbf{F}_{intS} \end{cases}$ is the vector of the internal forces, $\mathbf{F}_{ext} = \begin{cases} \mathbf{F}_{extD} \\ \mathbf{F}_{exs} \end{cases}$ is the vector of the external load of the web, is the increment of the external load of the web,

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{B} \ast \boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_D & | \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & B_S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_D \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_S \end{bmatrix}, \quad \Delta \boldsymbol{q} = \boldsymbol{B} \ast \Delta \boldsymbol{\alpha} .$$

For more details see [3].

 $\Delta \boldsymbol{F}_{ext} = \left\{ \frac{\Delta \boldsymbol{F}_{extD}}{\Delta \boldsymbol{F}_{ext}} \right\}$

In the case of the structure in equilibrium $F_{int} - F_{ext} = 0$, we can do the incremental step $K_{inc} \Delta \alpha = \Delta F_{ext} \Rightarrow \Delta \alpha = K_{inc}^{-1} \Delta F_{ext}$ and $\alpha^{i+1} = \alpha^i + \Delta \alpha$.

The Newton-Raphson iteration can be arranged in the following way: we suppose that $\boldsymbol{\alpha}^{i}$ does not represent the exact solution and the residua are $\boldsymbol{F}_{int}^{i} - \boldsymbol{F}_{ext}^{i} = \boldsymbol{r}^{i}$. The corrected parameters are $\boldsymbol{\alpha}^{i+1} = \boldsymbol{\alpha}^{i} + \Delta \boldsymbol{\alpha}^{i}$, where $\Delta \boldsymbol{\alpha}^{i} = -\boldsymbol{K}_{inc}^{-1} \boldsymbol{r}^{i}$.

We have used the identity of the incremental stiffness matrix with the Jacobbian of the system of the nonlinear algebraic equation $J \equiv K_{inc}$.

To be able to evaluate the different paths of the solution, the pivot term of the Newton-Raphson iteration has to be changed during the solution.

For the stable path of solution the determinant of the incremental stiffness matrix must be positive det $K_{inc} > 0$, all the principal minors must by positive as well and the load must be taken as the pivot term.

3 FEM NONLINEAR ANALYSIS

The FEM computer program using a 48 DOF element [5] has been used for analysis. FEM model consists of 8x8 finite elements. Full Newton-Raphson procedure, in which the stiffness matrix is updated at every equilibrium iteration, has been applied. The fundamental path of the solution starts from the zero load level and from the initial displacement. It means that the nodal displacement parameters of the initial displacements and the small value of the load parameter have been taken as the first approximation for the iterative process. To obtain other paths of the solution we have used random combinations of the parameters as the first approximation. Interactive change of the pivot member during calculation is necessary for obtaining required number of L-D paths, subsequently it was possible to separate the stable and unstable paths of solution.

Obtained results were compared with results of the analysis using ANSYS system, where 16x16 elements model was created (Fig. 1b). Element type SHELL143 (4 nodes, 6 DOF at each node) was used. The arc-length method was chosen for analysis, the reference arc-length radius is calculated from the load increment. Only fundamental path of nonlinear solution has been presented. Shape of the web in postbuckling has been also displayed.

4 ILLUSTRATIVE EXAMPLES

Illustrative examples of compressed steel web from Fig. 1 are presented as load – displacement paths for different amplitudes of initial geometrical imperfection [2] mentioned in this Figure. From Figs. 2 and 3 it is obvious that two almost identical modes of initial imperfection at the beginning of the process offer two different solutions in postbuckling.

These presented nonlinear solutions of the postbuckling behaviour of the slender web are divided into two parts. On the left side, there is load versus nodal displacement parameters relationship, on the right side the relevant level of the total potential energy is drawn. (Unloaded web represents a zero total potential energy level.)

Due to the mode of the initial imperfection the nodal displacements denoted A, C have been taken as the reference nodes (see Fig. 1a). The thick line represents the stable path and the thin line represents the unstable path of the solution. More details about the solution of the equilibrium paths were mentioned in [3], [4].





Fig. 3: The postbuckling of the slender web with the initial

displacement
$$w_0 = 0.01 * \sin \frac{\pi x}{a} * \sin \frac{\pi y}{b} + 0.2 * \sin \frac{2\pi x}{a} * \sin \frac{\pi y}{b}$$

The aim of this paper was to try to give an answer to the problem of the threat of collapse of the slender web loaded in compression in the second mode of buckling. Fig. 2 shows the solution for the initial displacement parameters $\alpha_{01} = 0.01$ and $\alpha_{02} = 0.15$. We can see that the fundamental path is in the postbuckling phase in mode 1 (v1 – the thick line). The lowest value of the total

potential energy is related to the path v3 (mode 2). The energy barrier protects the snap from the path v1 to the path v3. When we increase effect of the mode 2 in the mode of the initial displacement ($\alpha_{01} = 0.01$ and $\alpha_{02} = 0.2$) the postbuckling mode of the slender web is the mode 2 (Fig. 3).

Let us find the connection between the load – displacement path and corresponding level of the total potential energy. From Fig. 2 and 3 one can see, that relative position of limit points in L – D diagram mentions on magnitude of energetic barrier. The increase of the parameter α_{02} is related to

decrease of parameter p_{L3} . This is a value of load at limit point of the lowest energy path. If p_{L3} is the lowest limit point in L – D diagram, energetic barrier is eliminated and solution will continue in postbuckling phase in the most convenient way, i.e. in the lowest energy path.

5 CONCLUSIONS

The influence of the value of the amplitude and the mode of the initial geometrical imperfections for the postbuckling behaviour of the slender web is presented. As the important result we can note, that the level of the total potential energy of the fundamental stable path can be higher than the total potential energy of the secondary stable path. This is the assumption for the change in the buckling mode of the slender web.

The evaluation of the level of the total potential energy for all paths of the non-linear solution is a small contribution in the investigation of the post buckling behaviour of the slender web. To be able to give a full answer for the mechanism of the snap-through effect, more in-depth research will be required.

ACKNOWLEDGMENT

Presented results have been arranged due to the research supported by Slovak Scientific Grant Agency, project No. 1/0629/12.

REFERENCES

- [1] BLOOM, F. COFFIN, D. Handbook of Thin Plate Buckling and Postbuckling. Chapman&Hall/CRC, Boca Raton, 2001, 770 p. ISBN 1-58488-222-0.
- [2] KALA, Z. KALA, J. ŠKALOUD, M. TEPLÝ, B. Sensitivity Analysis of the Effect of Initial Imperfections on the Stress State in the Crack-Prone Areas of Breathing Webs. *Proc. of the Fourth Int. Conf. on Thin-walled Structures,* Loughborough (England, UK), 2004, pp. 499-506. ISBN 0 7503 1006-5.
- [3] PSOTNÝ, M. RAVINGER, J. Post-Buckling Behaviour of Imperfect Slender Web. *Engineering Mechanics*, Vol. 14, 2007, No. 6, pp. 423-429. ISSN 1802-1484.
- [4] PSOTNÝ, M. RAVINGER, J. Stable and Unstable Paths in the Post-Buckling Behaviour. *International Conference VSU'2005*, Sofia, 2005, pp. 42-47.
- [5] SAIGAL, S. YANG, I. Nonlinear Dynamic Analysis with 48 DOF Curved Thin Shell Element. *Int. J. Numer. Methods in Engng.* 1985, 22, pp. 1115-1128. ISSN 0029-5981.
- [6] WASHIZU, K. Variational Methods in Elasticity and Plasticity. Pergamonn Press, NY, 1982, 630 p. ISBN 0-08-026723-8.

Reviewers:

Prof. Ing. Pavel Kuklík, CSc., Department of Mechanics, Faculty of Civil Engineering, Czech Technical University in Prague.

Ing. Miroslav Rosmanit, Ph.D., Department of Building Structures, Faculty of Civil Engineering, VŠB-Technical University of Ostrava.

číslo 1, rok 2014, ročník XIV, řada stavební

článek č. 19

Ondřej SLOWIK¹, Drahomír NOVÁK²

ALGORITMIZACE SPOLEHLIVOSTNÍ OPTIMALIZACE

ALGORITHMIZATION OF RELIABILITY-BASED OPTIMIZATION

Abstrakt

Článek představuje nově vyvinutý akademický software FNPO určený pro spolehlivostní optimalizaci. Program pracuje s nově navrženou optimalizační metodou nazvanou Aimed Multilevel Sampling (AMS) v optimalizačním cyklu procesu spolehlivostní optimalizace. Pro simulaci na jednotlivých úrovních algoritmu AMS a spolehlivostní výpočty program využívá cyklického spouštění programu FREET – tzv. double-loop přístup. Vyvinutý software umožňuje optimalizaci modelu obecné složitosti se zohledněním deterministických a/nebo spolehlivostních omezujících podmínek.

Klíčová slova

Optimalizace, Spolehlivostní posouzení, Aimed Multilevel Sampling, Monte Carlo, Latin Hypercube Sampling, Pravděpodobnost poruchy, Spolehlivostní optimalizace, Analýza s malým počtem vzorků.

Abstract

The paper presents newly developed university software FNPO designed for reliability-based optimization. The program works with a newly proposed optimization method called Aimed Multilevel Sampling (AMS) in the optimization cycle of reliability-based optimization. For simulation at different levels of the algorithm AMS and reliability calculations program uses cyclic calls of program FReET – so called double-loop approach. The developed software enables to optimize model of general complexity with consideration of deterministic and/or reliability constraints.

Keywords

Optimization, Reliability assessment, Aimed Multilevel Sampling, Monte Carlo, Latin Hypercube Sampling, Probability of failure, Reliability-based design optimization, Small sample analysis.

1 INTRODUCTION

Reliability-based optimization is a demanding discipline in which it is necessary to combine the optimization approaches and reliability assessment of structures [1]. Methods for reliability calculation utilize similar simulation techniques and stochastic methods such as optimization approaches - it is also usually a repeated solving of problem. Some particular parts of the reliability calculations can be even formulated as an optimization problem (e.g. calculation of reliability index according Hasofer and Lind [2] or imposing statistical correlation between random variables).

¹ Dipl. Ing. Ondřej Slowik, Institute of Structural Mechanics, Faculty of Civil Engineering, Brno University of Technology, Veveří 331/95, 602 00 Brno, e-mail: slowik.o@fce.vutbr.cz.

² Prof. Ing. Drahomír Novák, DrSc., Institute of Structural Mechanics, Faculty of Civil Engineering, Brno University of Technology, Veveří 331/95, 602 00 Brno, e-mail: novak.d@fce.vutbr.cz.

Therefore a connection of model optimization with its reliability assessment in the form of optimization constraint is a challenging issue. Thanks to the development of computer technology and stochastic, simulation and approximation methods themselves is such connection of optimization process with reliability assessment possible nowadays [3].

The aim of the paper is to present a newly developed university software designed for reliability-based optimization FReET Nested Probabilistic Optimizer (hereinafter FNPO). This program utilizes a newly suggested optimization algorithm called "Aimed Multilevel Sampling" (hereinafter AMS) for the purpose of stochastic optimization. Software FNPO uses existing program FReET [4], [5] for the reliability calculations and simulation within the AMS algorithm.

2 GENERAL FORMULATION OF RELIABILITY-BASED OPTIMIZATION PROBLEM

The basic prerequisite for reliability-based optimization is to model a load and structural response using random variables. Depending on the required robustness and accuracy of the mathematical model it is therefore necessary to randomize some of its input parameters. If any of the functional parameters are considered to be random, then analysed function itself is consequently also a random function. The general stochastic formulation of the reliability-based optimization problem can be expressed like this:

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{Y}, \mathbf{r}(\mathbf{x}, \mathbf{Y}, \mathbf{y})) \to min \tag{1}$$

under constraints:

$$h_j(\mathbf{x}, \mathbf{Y}, \mathbf{r}(\mathbf{x}, \mathbf{Y}, \mathbf{y})) = 0 \qquad j = 1 \text{ to } p \qquad (2)$$

$$g_i(\mathbf{x}, \mathbf{Y}, \mathbf{r}(\mathbf{x}, \mathbf{Y}, \mathbf{y})) \le 0 \qquad i = 1 \text{ to } m \tag{3}$$

where:

x – is a vector of deterministic design variables,

Y – is a vector of random variables,

r – is a vector of considered probability functions and

y' – are statistical parameters of random variables.

Numbers *p* and *m* indicate a numbers of constraints functions.

In the context of the simultaneous application of reliability assessment and stochastic optimization within one procedure, it has to be noted, that the vector y' may include two sets of statistical parameters of random variables. The first set of statistical parameters represents the randomization of variables that reflects the natural behaviour of statistical quantities evaluated on the basis of the experiment. This set of statistical parameters is then used for reliability calculations. The second set of statistical parameters of random variables is then used for optimization purposes. For optimization those parameters are randomized, for which optimal input combination is searched. Statistical parameters are then selected with regard to the choice of optimization method so that the design space should be covered as evenly as possible.

Generally structural design is dependent on variables quantifying the response of the investigated structures to the load (e.g. strains and stresses). Therefore we can define the response of the structure as:

$$Y_i = Y_i(\boldsymbol{A}(\omega), \boldsymbol{x}) \qquad i = 1 \text{ to } \boldsymbol{m}$$
(4)

where:

x – is the vector of deterministic design variables and

 $A(\omega)$ – is a vector of random parameters of the investigated structure (e.g. load or strength).

Design requirements can be formulated as:

$$y_{il} \le Y_i(\boldsymbol{A}(\omega), \boldsymbol{x}) \le y_{iu} \qquad i = 1 \text{ to } m \tag{5}$$

with given boundaries y_{il} and y_{iu} . Constraints for deterministic design variables can be determined as:

$$x_{il} \le x_i \le x_{iu} \qquad i = 1 \text{ to } n \tag{6}$$

Reliability constraints can be expressed by a probability function:

$$P_i(\mathbf{x}) = P(y_{il} \le Y_i(\mathbf{A}(\omega), \mathbf{x}) \le y_{iu}) \quad i = 1 \text{ to } m$$
(7)

Let us introduce now the function of overall cost of structure c=c(z), which will serve as the main criterion of optimality. Optimal design vector of input values z^* composed of a vector of deterministic design variables x and vector of random variables $A(\omega)$ is determined using a stochastic optimization (e.g. [6]). Then the optimization problem can be understood as maximization of reliability, with consideration of constraints, defined as the maximum acceptable cost of structure.

$$P(\mathbf{x}) = P((y_{il} \le Y_i(\mathbf{A}(\omega), \mathbf{x}) \le y_{iu}, i = 1 \text{ to } m) \to max$$
(8)

Constrained by:

$$c(\mathbf{z}) \le c_{max} \tag{9}$$

$$x_{il} \le x_i \le x_{iu} \qquad i = 1 \text{ to } n \tag{10}$$

where the design space for the calculation of the probability is defined as:

$$(\Omega, \Sigma, P), \omega \in \Omega \tag{11}$$

with a given probability distribution, where Ω is the sample space for the probability calculations and Σ is a complete design space of variables.

Computational demands of reliability-based optimization are obvious from the formulation above. For the purposes of stochastic optimization it is necessary to repeatedly generate random realizations within the design space Σ . It is also necessary for each of these realizations to calculate the probability of failure in the general case by computationally demanding (mostly numerical) integration of the equation:

$$p_f = \int_{D_f} f(X_1, X_2, \dots, X_n) dX_1, dX_2, \dots, dX_n$$
(12)

where:

 D_f – represents the failure area (that is the area where value of function indicating a failure is <0) and $f(X_1, X_2, ..., X_n)$ – is the joint probability density function of random variables $X=X_1, X_2, ..., X_n$ [7].

The quantification of reliability is associated with the repeated evaluation of structural response. It can bring enormous demands on the computing time. Therefore lot of approximation methods, which aim to reduce the computational complexity of reliability assessment (FORM, SORM, Response surface methods) [8], [9], [10], as well as advanced optimization techniques for the small sample analysis [3], [11] have been developed.

3 AIMED MULTILEVEL SAMPLING (AMS)

The simplest heuristic optimization method is to perform Monte Carlo type simulation within a design space and select the best realization of random vector (with regard to optimization criteria). Such a procedure clearly does not converge toward function optimum and the quality of solution depends on the number of the simulations. The exact location of the optimum using only simple simulation is highly improbable. Scatter of the results of such optimization is in the case of small sample analysis very high and strongly dependent on the number of simulations. This approach, however, is very simple requiring no knowledge of features of the objective function and from the engineering point of view is transparent and relatively easy to apply.

Method Aimed Multilevel Sampling was first suggested in [12] (called Nested LHS). Its basic idea is to sort the course of the simulation into several levels. An advanced sampling within a defined space will be performed at each level. Subsequently, the sample with the best properties with respect to the definition of the optimization problem will be selected. Design vector $X_{i,best}$ (x_1 , x_2 , ..., x_n)

corresponding to the best in the *i*-th level generated sample is determined as a vector of mean values of random variables for simulation within the next level of algorithm AMS. Subsequently, the sampling space is scaled down around the best sample. Another LHS simulation is then performed in this reduced space. This leads to more detailed search in the area around the samples with the best properties with respect to the extreme of the function. The general algorithm of AMS method along with a detailed description of the settings of input parameters and comparison of suggested method with other common optimization techniques is presented in [3].

4 FREET NESTED PROBABILISTIC OPTIMIZER (FNPO)

4.1 Description of the program

FNPO is university software developed primarily for the purposes of reliability-based optimization and testing of algorithm AMS. The program works as control software for process of reliability-based optimization using program FReET that provides basic calculations on the various levels of the algorithm of program FNPO.

The program uses so called double loop approach to reliability-based optimization. In this approach algorithm works in two (or three) basic cycles:

- The outer loop represents the optimization part of the process. The simulation within the design space is performed in this cycle. For obtained design vectors of *n*-dimensional space $X_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ objective function values are calculated. The best realization is then selected based on these values. Consequently the best realization of random vector $X_{i,best}$ is compared with optimization constraints. These constraints may be formulated by any deterministic function which functional value we can compare with a defined interval of allowed values. Constraints are also possible to formulate as allowed interval of reliability index β for any limit state function (within design space of given problem). Calculations of reliability index of each generated random vectors X_i takes place in the inner loop. If the best random vector fit constraints, it is accepted as the next starting point of algorithm AMS or in the case of optimization by simple simulation as a feasible solution.
- The inner loop/s are used to calculate reliability index either for the need of checking of generated solutions if they satisfy constraints, or to calculate the actual value of the objective function, if the target reliability index is set as goal of optimization process.

FNPO is not the stand alone program. The program needs software FREET, in which takes place definitions of all functions and variables, set up of the relevant probability distributions and correlation matrix. Internal cycles to calculate the reliability index are also performed within FREET using approximation method FORM. FNPO then processes .fre files appropriately and manages the concurrence of all levels of reliability-based optimization process. The program is therefore fully dependent on calculations of FREET and cannot be used independently, both for deterministic and reliability-based optimization.

For the optimization process itself, FNPO application offers two methods. The user has the choice to use either a simple simulation using one of simulation methods available in FReET or AMS algorithm. AMS algorithm can be fully controlled and all options of its settings described in [3] are implemented in the program.

Detailed description of possible settings for each section along with the user instructions is available in the user manual [3].

4.2 Possible problem definitions in FNPO

Using FNPO, numbers of user-defined reliability-based optimization problems can be solved. But the described version of program, however, is still in the testing stages. Some of the features we consider for the future development have not been fully implemented yet. Program thus suffers from several limitations. Solved problems currently cannot be multi-criterial and there is the option to specify only one function as a constraint (deterministic or reliability-based). These and many other minor problems (related to the GUI environment) should be removed in subsequent versions of the program. Therefore, in the following, we will focus only on the definitions of optimization problems that are solvable using FNPO today.

Possible definitions of optimization goal

The simplest type of tasks that can be solved using FNPO is unbounded optimization of the objective function either using a simple simulation with one of simulation methods implemented in FReET, or using the AMS algorithm. Optimization problems defined in this way were mainly used for testing of the efficiency of algorithm AMS [3]. Example of unbounded minimization of the objective function may be defined as:

$$f(\mathbf{X}) \to \min$$
 $\mathbf{X} \in R_n$ (13)

where:

X – is a random vector defined within *n*-dimensional design space R_n .

The optimization problem defined in this way can be used to solve equations that cannot be solved analytically in closed form. This type of equations appears for example in mathematical models of the behaviour of the rope.

FNPO also allows searching for such random vectors X within the defined design space R_n , which corresponds to the defined objective function values f(X).

$$|f(\mathbf{X}) - k| \to \min \qquad \mathbf{X} \in R_n \tag{14}$$

where:

k – is defined functional value for which the vector of input values is searched.

The task is thus defined as minimization of the absolute value of the difference between the functional value and defined value k. This type of optimization is often part of the design of cable structures. An architect defines the shape of the proposed cable structure. The engineer then has to find such a combination of load, the cross-sectional area and the prestressing of wires that result in the final deflection of the each wire as close as possible to proposed deflection.

Another option is to define the target reliability index β_d for a given limit state function. For the generated random vectors thus except objective function value also reliability index is calculated, which is the selection criterion of the best realization in a given cycle.

$$|\beta(\mathbf{X}) - \beta_d| \to \min \qquad \mathbf{X} \in R_n$$
 (15)

In such way algorithm AMS can be directed to the solution with defined value of reliability.

Possible constraints definitions

For the above-specified objectives of optimization a constraint can be simultaneously defined in the form of allowed interval of functional values of a selected function (also objective function values may be limited). Allowed interval of functional values can be defined as open or closed interval of real numbers. Constraint function can generally be any function defined in R_n . An example of optimization with constraint:

$$f(\mathbf{X}) \to \min$$
 $\mathbf{X} \in R_n$ (16)

constrained by:

$$d < c(X) < h \tag{17}$$

or:

$$c(\mathbf{X}) < h \tag{18}$$

or:

$$c(\boldsymbol{X}) > d \tag{19}$$

where:

d – is lower limit of the functional value and

h – is upper limit of the functional value.

Constraints can also be formulated as reliability-based. Similar to the deterministic constraints, they could be defined as an open or closed interval of allowed values of reliability index for a given limit state function.

$$d < \beta_o(\mathbf{X}) < h \tag{20}$$

The definitions of open intervals are for reliability constraints similar to (18) and (19). The user can define more than one limit state function (e.g. for the ultimate limit state and serviceability limit state). In this case, the task can be defined as optimization of the reliability index of one limit state function subject to the limitation of allowed reliability index of second limit state function. This procedure is clearly demonstrated in the example given in section 5. Such a definition would correspond the equation (15) under constraints (20).

5 APPLICATION OF FNPO FOR PRACTICAL TASK

Let us define the problem (taken from [13]) for the needs of the optimization task. It is the task of reliability-based optimization of a wooden beam. Analytical relationships needed to define the limit state functions are taken from [14].

Wooden simply supported beam of length l with rectangular cross-section is loaded by uniform continuous loading along its entire length. The load is the sum of the permanent load g and variable load q. Static scheme is illustrated in Fig. 1.



Fig. 1: Static scheme of simply-supported wooden beam with rectangular cross-section

Parameters h and b represent the height and width of the cross-section. For the purpose of reliability-based optimization in accordance with the requirements of EUROCODE 5 [14] two basic limit state functions were defined. For the ultimate limit state:

$$g_1 = M_R - M_E \tag{21}$$

and for serviceability limit state:

$$g_2 = u_{lim,fin} - u_{net,fin} \tag{22}$$

where:

 M_R – is the critical moment (23).

$$M_R = \Theta_R \frac{1}{6} bh^2 k_{mod} f_m \tag{23}$$

 M_E – is moment induced by imposed loads:

$$M_E = \Theta_E \frac{1}{8} (g+q) l^2 \tag{24}$$

In equations (23) and (24) values Θ_R and Θ_E represent model uncertainties of structural response and load effect selected according to [15]. k_{mod} is normative coefficient taking into account the influence of ambient humidity and duration of load. Value f_m represents the bending strength of

used wood. In the case of equation (22) the limit state function is defined by deflections. The limit deflection is defined by equation:

$$u_{lim,fin} = \frac{l}{200} \tag{25}$$

The value of deflection due to the applied load is defined as follows:

$$u_{net,fin} = \Theta_E(u_{1,fin} + u_{2,fin}) \tag{26}$$

where:

$$u_{1,fin} = \frac{5}{384} \frac{gl^4}{E_{12}^1 bh^3} (1 + k_{1,def})$$
(27)

$$u_{2,fin} = \frac{5}{384} \frac{q l^4}{E_{12}^{\frac{1}{12}bh^3}} (1 + k_{2,def})$$
(28)

 $u_{1,fin}$ and $u_{2,fin}$ are the deflections induced by dead and live loads, *E* is the modulus of elasticity of used wood, $k_{1,def}$ is a factor taking into account the effect of creep for dead load, $k_{2,def}$ is a factor taking into account the effect of creep for live load. In performed calculations, these values of normative factors were considered:

- $k_{mod} = 0.8$
- $k_{1,def} = 0,8$
- $k_{2,def} = 0,25$

Reliability calculations as well as optimization process requires randomization of individual parameters of vector of input values. For the purposes of calculations of the reliability index (using FORM method within the internal cycle of reliability-based optimization) randomization of individual parameters according to Tab. 1 was performed [13].

Variable	Distribution	mean	Standard deviation	COV
l [m]	Normal	3.5	0.175	0.05
b [m]	Normal	Optimised		0.05
h [m]	Normal	Optimised		0.05
E [Gpa]	Lognormal (2 par)	10	1.3	0.13
f _m [Mpa]	Lognormal (2 par)	34	8.5	0.25
g [kN/m]	Gumbel max EV 1	1.686	0.169	0.1
q [kN/m]	Gumbel max EV 2	2.565	0.77	0.3
$\Theta_{R}[-]$	Lognormal (2 par)	1	0.1	0.1
$\Theta_{\rm E}$ [-]	Lognormal (2 par)	1	0.1	0.1

Tab.1: Randomization of parameters for reliability calculations

Mean values of height and width of the cross-section area were the subjects of optimization. Presented task is therefore nine-dimensional in terms of reliability calculations and two-dimensional in terms of the optimization process. For the purpose of optimization of cross-sectional area parameters b and h were randomized according to Tab. 2.

Variable	Distribution	mean	Standard deviation	a	с
b [m]	Rectangular	0.125	0.0144	0.1	0.15
h [m]	Rectangular	0.225	0.0144	0.2	0.25

Tab. 2: Randomization of parameters b and h for purpose of optimization

Values a and c in Tab. 2 are parameters of utilized rectangular distribution. The example described was solved by an artificial neural network (ANN) in [13]. The aim of the task was to find such combination of height and width of the cross-section, which corresponds to the value of reliability index for the ultimate limit state function (ULS) given by (21) equal to 3.8 and simultaneously for the serviceability limit state function (SLS) given by (22) equal to 1.5. The result of the solution of described problem by artificial neural network (appear in [13]) is displayed in Tab. 3.

Tab. 3: Results of solution obtained by artificial neural network

mean h	mean b	β1	β2	β1- target	β2- target
0.132	0.214	3.8001	1.5001	3.8	1.5

If we define optimization problem by equation (15) with reliability constraints given by equation (20), then we can solve the same problem of reliability-based optimization using program FNPO. Since that process is not a multi-criteria optimization solution in the real sense, we cannot expect a similar accuracy of solution as in the case of neural network. Future implementations of multi-criteria optimization together with an extension of options to defining constraints could allow the FNPO solve that kind of problems with greater precision.

During the solution of the problem using program FNPO was utilized the option to determine a target value of reliability index for the selected limit state function. Therefore target reliability index for the limit state function given by (22) was defined as $\beta = 1.5$. As a constraint was set interval of allowable values of reliability index for the limit state function given by equation (21) $3.75 < \beta < 3.85$.

During solution of the tasks (using AMS algorithm) the total number of 300 simulations was used. Training of ANN utilized in [13] needed 100 simulations. Note that simple two-dimensional optimization task would AMS algorithm probably master successfully with a lower number of simulations. Due to the specification of the task, it was necessary to ensure that the strict definition of the constraints met by at least one realization in the first cycle of optimization algorithm AMS. This problem should probably remove the application of multi-criteria optimization. The result solution of the task using FNPO is displayed in Tab. 4 and in Fig. 2.

mean h	mean b	β1	β2	β1- target	β2- target
0.131	0.215	3.793	1.50009	3.8	1.5

Tab. 4: The result solution of the task using FNPO

Final solution therefore corresponds well to the values obtained using neural network [13]. The resulting cross-sectional area has a size 0.028 m2.

The graph in Fig. 2 shows the gradual convergence of generated solutions toward the required values of reliability indices.



Fig. 2: Evolution of values of reliability indices during optimization

6 CONCLUSION

The paper presents newly developed university software FNPO designed for reliability-based optimization. The program uses a newly proposed optimization algorithm AMS, which was developed for small sample analysis and existing program FReET for simulation and reliability calculations. Tests of AMS algorithm and program FNPO performed so far provide promising results. However, it is necessary to make another series of tests, especially for high-dimensional problems to determine more accurately effectiveness of the proposed method. Detailed information about the software FNPO and algorithm AMS are available in [3].

ACKNOWLEDGMENT

The presented results were obtained with the support of projects GAČR (SPADD), n. 14-10930S, TAČR (SIMSOFT), n. TA01011019 and the project of the specific university research at Brno University of Technology, registered under the number FAST-J-14-2425.

REFERENCES

- [1] RACKWITZ, R. Optimization the basis of code-making and reliability verification. *Struct.Saf.* 2000, Vol. 22, Nr. 1, pp. 27-60.
- [2] HASOFER, A. M. a N. C. LIND. Exact and invariant second-moment code format. *Journal of Eng. Mech. Division*, ASCE, Vol. 100. ASCE, No. EM1, 1974. pp. 111-121.
- [3] SLOWIK, O. Reliability-based structural optimization. Brno, 2014. Master's thesis. VUT Brno. Supervisor: prof. Ing. Drahomír Novák, DrSc.
- [4] NOVÁK, D., VOŘECHOVSKÝ, M. & RUSINA, R. 2013. *FReET v. 1.5* program documentation. User's and Theory Guides. Brno/Cervenka Consulting, http://www.freet.cz.
- [5] NOVÁK, D.; VOŘECHOVSKÝ, M.; TEPLÝ, B. 2014. FReET: Software for the statistical and reliability analysis of engineering problems and FReET-D: Degradation module. *Advances in Engineering Software (Elsevier)*, Vol. 72, pp. 179-192.

- [6] MARTI, K. Stochastic optimization of structural design. ZAMM Z. angew. Math. Mech., 72 (1992) 6, pp. 452-464.
- [7] TEPLÝ, B. a D. NOVÁK. Spolehlivost stavebních konstrukcí: teorie, numerické metody, navrhování, software. 1. edition. Brno: CERM, 1999, 87 s. ISBN 80-214-1149-X.
- [8] GRIGORIU, M. Methods for approximate reliability analysis. J. Structural safety. No. 1, 1982/1983, pp. 155-165.
- [9] BUCHER, C. G. a U. BOURGUND. Efficient use of Response surface methods. Inst. Eng. Mech., Innsbruck University, report No. 9-87, 1987.
- [10] LI, K. S. a P. LUMB. Reliability analysis by numerical integration and curve fitting. J. *Structural safety*. Vol. 3, 1985, pp. 29-36.
- [11] ALI, M., M. PANT, A. ABRAHAM a V. SNAŠEL. Differential evolution using mixed strategies in competitive environment. *International Journal of Innovative Computing: Information and Control.* 2011, Vol. 7, No. 8, pp. 5063-5084.
- [12] SLOWIK, O. Optimalizace betonových konstrukcí stochastickými metodami optimalizace. Brno, 2012. Dostupné z: https://dspace.vutbr.cz/handle/11012/17001. Bachelor's thesis. VUT Brno. Supervisor: prof. Ing. Drahomír Novák, DrSc.
- [13] NOVÁK, D. a D. LEHKÝ. An inverse reliability analysis based on stochastic simulation and artificial neural network. Cape Town: SEMC, 2010.
- [14] Dřevěné konstrukce podle Eurokódu 5. Vyd. 1. Praha: Informační centrum ČKAIT, 2004, 401 s. ISBN 80-867-6913-5.
- [15] JCSS Probabilistic Model Code. Zurich : Joint Committee on Structural Safety, 2001.

Reviewers:

Ing. Petr Konečný, Ph.D., Department of Structural Mechanics, Faculty of Civil Engineering, VŠB-Technical University of Ostrava.

Ing. Miroslav Sýkora, Ph.D., Department of Structural Reliability, Klokner Institute, Czech Technical University in Prague.

Sborník vědeckých prací Vysoké školy báňské - Technické univerzity Ostrava

číslo 1, rok 2014, ročník XIV, řada stavební

článek č. 20

Jakub SOBEK¹

ANALÝZA TVAROVÝCH FUNKCÍ PRO TĚLESA S TRHLINOU: VARIANTY ROVINNÉ ÚLOHY

SHAPE FUNCTIONS ANALYSIS OF CRACKED SPECIMENS: PLANE PROBLEM VARIANTS

Abstrakt

Příspěvek se zaměřuje na analýzu pole napětí, jmenovitě tvarových funkcí pro aproximaci polí napětí a posunů v tělese s trhlinou, a to pro dvě varianty rovinné úlohy – rovinnou napjatost a rovinnou deformaci. Tvarové funkce, určované přepočtem z hodnot koeficientů členů Williamsova mocninného rozvoje, jsou stanovovány pro zkušební těleso pro test štípáním klínem (WST). Pro určení hodnot koeficientů členů/funkcí je využito tzv. přeurčité metody (ODM).

Klíčová slova

Přeurčitá metoda, rovinná napjatost, rovinná deformace, test štípáním klínem, tvarové funkce, Williamsův rozvoj.

Abstract

The paper is focused on the stress field analysis (especially the shape functions) for approximation of the stress and displacement fields in cracked specimens in two variants of plane problem – the plane stress and the plane strain condition. Shape functions are obtained from calculated values of coefficients of terms of the Williams power series of the wedge-splitting test (WST) specimen. The so called over-deterministic method (ODM) is used for the determination of these shape functions.

Keywords

Over-deterministic method, plane stress, plane strain, wedge-splitting test, shape functions, Williams power series.

1 ÚVOD

Výzkum analýzy polí napětí/deformací v tělesech s trhlinou je obvykle prováděn za předpokladu uvažování zkoumaného problému jako 2D úlohy ve stavu rovinné deformace, jak je to doporučováno v mnoha odborných zdrojích pro numerické simulace různých zkušebních těles (např. [1]). Po zkušenostech z předchozích analýz dospěl autor tohoto příspěvku k otázce, zda by uvažování rovinné úlohy jako rovinné napjatosti (namísto zmíněné rovinné deformace) neposkytovalo odlišné výsledky.

Pro srovnávací analýzu byla vybrána typická varianta lomové zkoušky kvazikřehkých materiálů ve stavebnictví, a to zkušební test štípáním klínem (wedge-splitting test, dále jen WST) v modifikaci se dvěma podporami a roznášecími příložkami, umístěnými v drážce (pro roznášení zatížení do samotného tělesa, rozloženého na vodorovnou štípací sílu a svislou přítlačnou sílu), viz Obr. 1 nalevo.

¹ Ing. Jakub Sobek, Ústav stavební mechaniky, Fakulta stavební, Vysoké učení technické v Brně, Veveří 331/95, 602 00 Brno, tel.: (+420) 541 147 116, e-mail: sobek.j@fce.vutbr.cz.

Numerické simulace, vycházející z uvedeného testu, byly realizovány v systému ANSYS [2] výpočtem v rovinné úloze – rovinné napjatosti. Posuny sledovaných bodů kolem vrcholů trhlin sloužily jako vstupy pro tzv. přeurčitou metodu (ODM) [3], využívající rovnic pro popis polí napětí/posunů těles s trhlinou dle Williamse [4]. Při ODM bylo sledováno, jak se budou jednotlivé bezrozměrné tvarové funkce (přepočítané z hodnot koeficientů členů Williamsova rozvoje) od sebe lišit v závislosti na použité šířce zkušebních těles.

2 NUMERICKÝ MODEL

Výpočtový model, korespondující s Obr. 1 nalevo, byl vytvořen v systému ANSYS [2] jako symetrická polovina tělesa (Obr. 1 napravo). Trhlina je modelována ponecháním stupňů volnosti uzlů porušené části (líců trhliny) tělesa, na zbytku ligamentu je zabráněno horizontálnímu posunu (simulace kontinua tělesa). Vliv singularity na vrcholu trhliny je zohledněn použitím typu konečných prvků PLANE82 (8-mi uzlový rovinný prvek s možností zadání tloušťky – pro úlohy řešené rovinnou napjatostí) při využití funkce KSCON [5], která zohledňuje singularitu napětí na vrcholu trhliny tím, že zkosí síť KP v místě koncentrace napětí – potlačení numerické chyby.



Obr. 1: Geometrie zkušebního tělesa pro test štípání klínem (nalevo), ukázka výpočtového modelu – včetně okrajových podmínek a sítě konečných prvků (napravo)

Relativní délka trhliny $\alpha = a/W_{ef}$, kde a je délka trhliny a W_{ef} je efektivní výška tělesa, se pohybovala od hodnoty 0,125 do 0,925 pro vystižení dostatečného rozsahu porušení. Délka i výška těles W je 100 mm (krychle).

Vlastnosti materiálů byly zvoleny tak, aby simulovaly reálné chování při budoucích zkušebních testech v laboratoři, tj. pro beton E = 35 GPa a v = 0,2 a pro ocel (roznášecí příložky) E = 210 GPa a v = 0,3.

Reálné konstanty, představující tloušťku tělesa *t*, byly zadávány v hodnotách: 0,1; 0,25; 0,5; 1,0; 2,0 m. Počet vybraných uzlů kolem vrcholu trhliny pro další analýzu za použití ODM byl, dle předpokladů z [6,7], stanoven o hodnotě 49 (osvědčené množství vstupů do ODM) a vzdálenost výběru od vrcholu byla 5 mm. Výstupem z výpočtu jednotlivých variant byly posuny vybraných uzlů.

Model byl zatížen dvěma komponentami síly, která působí na ocelovou příložku. Přičemž vertikální (přítlačná) síla je v poměru k horizontální (rozevírající) $P_v = 0.5359 P_{sp}$, kde $P_{sp} = 1$ kN.

3 VÍCEPARAMETROVÁ LINEÁRNÍ ELASTICKÁ LOMOVÁ MECHANIKA

Oproti lineární elastické lomové mechanice (LELM) se u víceparametrové elastické lomové mechaniky (Multi-parameter Linear Elastic Fracture Mechanics – MP-LEFM) bere pro popis polí napětí a posunů v tělese s trhlinou v potaz více členů řešení Williamsovy mocninné řady [4].

3.1 Williamsova řada

Nekonečnou mocninnou řadou – Williamsovým rozvojem – charakterizujeme pole napětí a deformací v homogenním elastickém izotropním tělese porušeném trhlinou. Tenzor napětí $\{\sigma\}$ a vektor deformace $\{u\}$ lze zapsat pro porušení v módu I (štípací test – porušení tahem) ve tvaru:

$$\begin{cases} \sigma_{x} \\ \sigma_{y} \\ \tau_{xy} \end{cases} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2} r^{\frac{n}{2}-1} A_{n} \cdot \begin{cases} \left[2 + (-1)^{n} + \frac{n}{2} \right] \cos\left(\frac{n}{2} - 1\right) \theta - \left(\frac{n}{2} - 1\right) \cos\left(\frac{n}{2} - 3\right) \theta \right] \\ \left[2 - (-1)^{n} - \frac{n}{2} \right] \cos\left(\frac{n}{2} - 1\right) \theta + \left(\frac{n}{2} - 1\right) \cos\left(\frac{n}{2} - 3\right) \theta \\ - \left[(-1)^{n} + \frac{n}{2} \right] \sin\left(\frac{n}{2} - 1\right) \theta + \left(\frac{n}{2} - 1\right) \sin\left(\frac{n}{2} - 3\right) \theta \end{cases},$$
(1)
$$\begin{cases} u \\ v \end{cases} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{n/2}}{2\mu} A_{n} \cdot \begin{cases} \left[\kappa + \frac{n}{2} + (-1)^{n} \right] \cos\frac{n}{2} \theta - \frac{n}{2} \cos\left(\frac{n}{2} - 2\right) \theta \\ \left[\kappa - \frac{n}{2} - (-1)^{n} \right] \sin\frac{n}{2} \theta + \frac{n}{2} \sin\left(\frac{n}{2} - 2\right) \theta \end{cases},$$
(2)

kde:

 A_n – konstanty pro konkrétní délku trhliny [Pa/m^{n/2-1}],

n – index členu řady [-],

E, v – Youngův modul pružnosti resp. Poissonův součinitel, [Pa] resp. [-],

- μ modul pružnosti ve smyku, $\mu = E/(2(1 + \nu))$ [Pa],
- r, θ jsou polární souřadnice (počátek soustavy souřadnic je ve vrcholu trhliny, kladná osa x je orientována ve směru šíření trhliny) [m],

Hodnoty koeficientů A_n se vyjadřují jako funkce relativní délky trhliny a normují se na jednotkové zatížení – takto se definují tzv. bezrozměrné tvarové funkce g_n [8]. Koeficientům jednotlivých členů Williamsovy řady pak odpovídají tyto funkční předpisy:

$$g_n(\alpha) = \frac{A_n(\alpha)}{\sigma} W^{\frac{n-2}{2}} \quad \text{pro } n = 1, 3, 4..., N \quad \text{a} \quad g_2 = t(\alpha) = \frac{4A_2(\alpha)}{\sigma}, \tag{3}$$

kde:

- α je relativní délka trhliny ($\alpha = a/W_{ef}$) [-],
- σ je nominální napětí v centrální rovině tělesa způsobené aplikovaným zatížením ($\sigma = P_{sp}/tW$) [Pa],
- t je tloušťka zkušebního tělesa [m],
- W je výška (rozměr ve směru šířící se trhliny) zkušebního tělesa [m].

3.2 Metoda přeurčitosti (ODM)

Metoda, sloužící k získání libovolného počtu členů Williamsova rozvoje, která se využívá při řešení soustavy rovnic, vycházejících z rovnice (1) a (2), se anglickým názvem označuje jako Over-Deterministic Method (ODM) [3]. Ve výzkumném kolektivu, jehož je autor členem, se zažil ekvivalentní termín – metoda přeurčitosti [6]. Z matematického hlediska jde o metodu nejmenších čtverců, jejíž podstatou je řešení soustavy 2k rovnic, kde k vyjadřuje počet vybraných uzlů kolem vrcholu trhliny, pro až N zvolených členů mocninné řady. Ze znalosti komponentů vektoru posunu (rovinná úloha – dva posuny pro každý z vybraných uzlů) u a v pro k vybraných uzlů KP sítě (např. řešení z běžně dostupného konečně-prvkového softwaru) a polárních souřadnic těchto uzlů lze vyčíslovat předpis (2) až pro N členů řady tak, aby $N \le 2k$. Řešením přeurčité soustavy získáme vektor koeficientů členů řady A_n (popř. vektor odpovídajících tvarových funkcí g_n z (3)).

4 VÝSLEDKY A DISKUZE

Implementace ODM proběhla v softwaru Mathcad11 a k vyhodnocení jednotlivých funkcí posloužil nástroj MS Excel. Pro srovnání variant řešení při stavu rovinné napjatosti posloužila úloha analyzovaná na identickém zkušebním tělese, avšak při uvažování úlohy rovinné deformace [6]. Tab. 1 shrnuje srovnání jednotlivých použitých tlouštěk tělesa *t* při výpočtu při stavu rovinné napjatosti. Srovnání je vybrané pouze pro relativní délku trhliny $\alpha = 0,35$. Členy Williamsovy řady, označované A_n jsou samozřejmě rozdílné, ale po přepočtu na bezrozměrné tvarové funkce g_n vidíme, že hodnota je pro všechny *t* stejná – na výpočet tvarových funkcí, za využití rovinné napjatosti, tedy nemá rozdílná šířka vliv. Je zde ale patrný rozdíl mezi první tvarovou funkcí g_1 a součinitelem intenzity napětí K_1 (vypočítaný v systému ANSYS přes příkaz KCALC, umožňující získání K_1 metodou extrapolace posunů do vrcholu trhliny). Tyto dva členy by si měly být podobné na základě uvážení následujícího vztahu:

$$K_{I} = \sigma \sqrt{\pi a} \cdot Y(\alpha), \ Y(\alpha) = g_{1} \sqrt{\frac{2}{\alpha}}, \tag{4}$$

kde:

 α – je délka trhliny [m],

 π – je matematická konstanta, přibližně 3,14 [-].

 $Y(\alpha)$ – je funkce geometrie tělesa [-].

Tab. 1: Hodnoty členů A_n a tvarových funkcí g_n (včetně K_I) pro rozdílné tloušťky tělesa t (rovinná napjatost) s jednotnou relativní délkou trhliny $\alpha = 0,35$

<i>t</i> [m]	A_1	g_1	K_{I}	A_3	g_3
0,1	96398,77	2,810483	2,928356	-1528992,93	-3,789076
0,25	38559,51	2,810483	2,928356	-611597,17	-3,789076
0,5	19279,75	2,810483	2,928356	-305798,59	-3,789076
1,0	9639,88	2,810483	2,928356	-152899,29	-3,789076
2,0	4819,94	2,810483	2,928356	-76449,65	-3,789076

Obr. 2 ukazuje grafy srovnání situace při uvažování stavu rovinné napjatosti/deformace u průběhů tvarových funkcí g_n (g_1 až g_8) v závislosti na relativní délce trhliny α . Vidíme zde nepatrné odchylky v průběhu funkcí získaných z řešení rovinných úloh při uvažování rovinné napjatosti/deformace zejména v rozmezí relativní délky trhliny α od 0,7 až po koncovou hodnotu 0,925 u každé ze zobrazených tvarových funkcí. Hodnoty g_n pro některé z následujících grafů v místě α kolem 0,9 jsou záměrně potlačeny z důvodu vizuálního zkreslení zobrazení celkové funkce (zvláště pro vyšší členy).



Obr. 2: Srovnání rovinné napjatosti/deformace na průběhu jednotlivých tvarových funkcí g_1 až g_8 v závislosti na relativní délce trhliny α

5 ZÁVĚR

Z provedené analýzy vyplývá, že použití rovinné napjatosti (namísto rovinné deformace) nemá téměř žádný vliv na výsledky tvarových funkcí g_n , jejichž hodnoty nezávisejí na použité tloušťce tělesa t, avšak vyjma oblasti pro dlouhé trhliny. Pro běžné zkoušky se zkušební tělesa vytvářejí se zářezem, kde α není větší než 0,5; pro počáteční stádia zkoušky je tedy provedená analýza bez užitku. Avšak pro přesné vyhodnocení zkoušky pro její stádia pro dlouhé efektivní trhliny (např. oblast

konce sestupné větve zatěžovacího diagramu kvazikřehkých materiálů) je zřejmé, že interpretaci tloušťky tělesa a okrajových podmínek je třeba věnovat náležitou pozornost.

Rozdílné hodnoty součinitele intenzity napětí K_1 a první tvarové funkce g_1 se s největší pravděpodobností liší rozdílností místa výběru vstupujících posunů. U K_1 prostřednictvím KCALC příkazu toto místo leží bezprostředně v místě vrcholu trhliny. Kdežto u výpočtu g_1 pomocí ODM jsou posuny vybírány z prstence o poloměru 5 mm od vrcholu trhliny. Toto platí jak pro úlohu rovinné napjatosti, tak i deformace. Přirozeně, další rozdíl je dán vztahem (4).

Srovnání průběhů tvarových funkcí pro těleso s trhlinou při uvažování rovinné napjatosti a rovinné deformace bylo ukázáno v přehledných grafech. Na převážné části definičního oboru tvarových funkcí nebyly zjištěny téměř žádné rozdíly pro obě úlohy. Znatelné rozdíly jsou pozorovány až pro velmi dlouhé trhliny. Z těchto důvodů se jeví jako opodstatněné pokračovat ve výpočtech za uvažování rovinné deformace. V případě elastického chování materiálu nezáleží na tom, zda výpočet proběhl za podmínky rovinné napjatosti či deformace. Při výrazném nelineárním chování je však srovnání zcela na místě. Dochází zde k výrazným rozdílům v rozsahu plastické zóny u vrcholu trhliny – v případě rovinné napjatosti je větší než při rovinné deformaci. Je to způsobeno rozdílem multiaxiality napjatosti ve vrcholu trhliny.

PODĚKOVÁNÍ

Výzkum byl realizován za finanční podpory VUT v Brně v rámci projektu specifického vysokoškolského výzkumu FAST-J-14-2358.

LITERATURA

- [1] ANDERSON, T.L. Fracture mechanics. Fundamentals and Applications. Boca Raton: CRC Press, 2005. 621 pp. ISBN 978-0-8493-1656-2.
- [2] ANSYS Documentation. Version 11.0, Swanson Analysis System, Inc., Houston, Pennsylvania, 2007.
- [3] AYATOLLAHI, M. R. & NEJATI, M. An over-deterministic method for calculation of coefficients of crack tip asymptotic field from finite element analysis. *Fatigue Fract Engng Mater Struct.* 2010, Nr. 34, pp. 159–176.
- [4] WILLIAMS, M. L. On the stress distribution at the base of a stationary crack. ASME J Appl Mech. 1957, Nr. 24, pp. 109–114.
- [5] SEITL, S., VESELÝ, V., ŘOUTIL, L. Analýza vlivu proporcí válcového zkušebního tělesa na lomové parametry při zkoušce klínovým štípáním. Sborník vědeckých prací Vysoké školy báňské – Technické univerzity Ostrava, řada stavební. 2011, Vol. XI, Issue 1, pp. 299–308.
- [6] SOBEK, J., VESELÝ, V. & ŠESTÁKOVÁ, L. Accuracy of approximation of stress and displacement fields in cracked body for estimation of failure zone extent. *Transactions of the VŠB – Technical University of Ostrava: Construction Series* [online]. Warsaw, Poland: Versita, 2012, Vol. 12, Issue 2, pp. 170–179 (10 p). ISSN 1804-4824 (Online); ISSN 1213-1962 (Print). DOI: 10.2478/v10160-012-0031-5.
- [7] VESELÝ, V., SOBEK, J., ŠESTÁKOVÁ, L., SEITL, S. Accurate description of near-cracktip fields for the estimation of inelastic zone extent in quasi-brittle materials. *Key Engineering Materials*, 2013, Vols. 525–526, pp. 529–532. DOI: 10.4028/www.scientific.net/KEM.525-526.529.
- [8] KNÉSL, Z. & BEDNÁŘ, K. Dvouparametrová lomová mechanika: výpočet parametrů a *jejich hodnoty*. Brno: Ústav fyziky materiálů AV ČR v. v. i., 1998.

Oponentní posudek vypracoval:

Prof. Ing. Michal Šejnoha, Ph.D., DSc., Katedra mechaniky, Fakulta stavební, ČVUT v Praze. Doc. Ing. Jan Zeman, Ph.D., Katedra mechaniky, Fakulta stavební, ČVUT v Praze. Sborník vědeckých prací Vysoké školy báňské - Technické univerzity Ostrava

číslo 1, rok 2014, ročník XIV, řada stavební

článek č. 21

Jan VALEŠ¹

KLOPENÍ NOSNÍKU S POČÁTEČNÍMI IMPERFEKCEMI

LATERAL-TORSIONAL BUCKLING OF A BEAM WITH INITIAL IMPERFECTIONS

Abstrakt

Článek se zabývá statistickou analýzou únosnosti prostě uloženého ohýbaného nosníku průřezu IPE 220 řešeného geometricky nelineárním řešením s vlivem klopení. Prut byl modelován v programu ANSYS s pomocí prvku BEAM188. Imperfekce byly uvažovány jako náhodné veličiny. Počáteční zakřivení a rotace osy jsou uvažovány ve tvaru jedné půlvlny funkce sinus. Korelace mezi amplitudami počátečního zakřivení a počáteční rotace osy je uvažována jako parametr řešení na intervalu od -1 do 1. Je studován vliv této korelace na změnu střední hodnoty a směrodatné odchylky náhodné únosnosti.

Klíčová slova

Klopení, únosnost, imperfekce, nosník, štíhlost, ocel, korelace.

Abstract

The paper deals with a statistical analysis of a simply supported hot-rolled beam IPE 220 in bending which was analysed with respect to lateral-torsional buckling using geometric nonlinear solution. The beam was simulated in ANSYS program using beam element BEAM188. All initial imperfections were considered to be random variables. Initial curvature and rotation of the beam axis had a shape of half-wave sine function. Correlation between the amplitudes of initial curvature and initial rotation of the beam axis was a parameter of the solution within the interval from -1 to 1. Influence of this correlation upon the variance of the mean value and standard deviation of the load-carrying capacity was carried out.

Keywords

Lateral-torsional buckling, load-carrying capacity, imperfection, beam, slenderness, steel, correlation.

1 ÚVOD

Předložený článek se zabývá stochastickou analýzou únosnosti prostě uloženého ohýbaného nosníku průřezu IPE 220. Je studován vliv klopení na únosnost prutu, jehož poměrná štíhlost je 1. Aby bylo možno zohlednit vliv počátečních imperfekcí na únosnost, byl nosník řešen geometricky nelineárním řešením. Počáteční imperfekce osy nosníku je modelována tak, že vychází z prvního vlastního tvaru vybočení při ztrátě stability klopením. Tato imperfekce sestává z vybočení osy nosníku ve směru kolmém na měkčí osu průřezu a natočení průřezů podél osy nosníku. Zakřivení nosníku podle prvního vlastního tvaru vybočení předpokládá, že vybočení osy a natočení průřezů podél osy nosníku jsou funkčně závislé. Není jasné, jak dalece tento předpoklad odpovídá výsledkům, které bychom obdrželi z experimentů.

¹ Ing. Jan Valeš, Ústav stavební mechaniky, Fakulta stavební, Vysoké učení technické v Brně, Veveří 331/95, 602 00 Brno, tel.: (+420) 541 147 116, e-mail: vales.j@fce.vutbr.cz.

Většina laboratorních měření věnuje více pozornosti měření počátečního zakřivení osy nosníku než měření počátečních natočení průřezů. V případě klopení mohou však být obě imperfekce důležité. Otázkou je, jakou mezi nimi uvažovat korelaci. Uvažovat korelaci hodnotou 1 nemusí přesně odpovídat skutečnosti. Korelace mezi nimi je primárně dána výrobními procesy. Abychom získali představu, jak moc velký vliv může mít velikost korelace na statistické charakteristiky únosnosti, je v článku tato problematika studována s pomocí nelineárního výpočtového modelu.

Výpočtový model byl proveden v programu ANSYS, přičemž byl brán v úvahu náhodný vliv všech počátečních imperfekcí.

2 VÝPOČTOVÝ MODEL

Byl vytvořen výpočtový model oboustranně kloubově uloženého nosníku profilu IPE 220, oceli třídy S235. Jeho délka *L* byla vypočítána v závislosti na poměrné štíhlosti při klopení $\overline{\lambda}_{LT}$. Tato štíhlost je dána podle EUROCODE 3 jako

$$\overline{\lambda}_{LT} = \sqrt{\frac{W_{pl,y}f_y}{M_{cr}}} \tag{1}$$

kde:

 $W_{pl,y}$ – je plastický průřezový modul k ose y [m³] (viz Obr. 1),

 f_y – jmenovitá hodnota meze kluzu oceli [Pa] a

M_{cr} – pružný kritický moment při klopení [Nm].

Mcr je dán vztahem

$$M_{\rm cr} = \frac{\pi}{L} \sqrt{EI_z GI_t} \sqrt{1 + \frac{\pi^2 EI_{\omega}}{GI_t L^2}}$$
(2)

kde:

E – je modul pružnosti v tahu a tlaku [Pa],

G – modul pružnosti ve smyku [Pa],

 I_z – moment setrvačnosti průřezu k ose z [m⁴],

 I_t – moment tuhosti průřezu v kroucení [m⁴],

- I_{ω} výsečový moment setrvačnosti průřezu [m⁶] a
- *L* délka nosníku [m].

Ve vztahu (2) se uvažují normové (nominální a charakteristické) hodnoty; a platný pouze pro prostě uložený nosník zatížený koncovými momenty podle Obr. 1. Kombinací vzorců (1) a (2) a dosazením tabulkových (nominálních) hodnot ideálního průřezu dostaneme délku nosníku L = 3,323 m. Schéma nosníku je na Obr. 1.

Zakřivení osy nosníku ve směru měkčí osy, tj. v rovině xy, je popsáno funkcí

$$a_{v} = a_{v0} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \tag{3}$$

a natočení průřezů po délce nosníku je dáno jako

$$a_{\varphi} = a_{\varphi 0} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \tag{4}$$

kde:

 a_{v0} – je amplituda počátečního zakřivení osy nosníku [m], viz Obr. 2 a

 $a_{\varphi 0}$ – amplituda počátečního natočení průřezů po délce nosníku [rad], viz Obr. 2.

Pokud je nosník zakřiven podle prvního vlastního tvaru, tak platí, že

$$a_{vo} = \frac{e_0}{1 + \frac{h}{2} \frac{P_z}{M_{cr}}},$$
(5)

$$a_{\varphi 0} = a_{v0} \frac{P_z}{M_{cr}} \tag{6}$$

kde:

- e_0 je amplituda jedné půlvlny funkce sinus vztahující se k horní hraně průřezu [m],
- *h* výška průřezu [m],
- P_z síla [N], pro niž platí vztah

$$P_z = \pi^2 \frac{EI_z}{L^2}$$
 (7)



Obr. 2: Definování zakřivení uprostřed rozpětí

Výpočtový model byl vytvořen v programu ANSYS za použití prutového prvku BEAM188. Tento prvek je vhodný pro analýzu štíhlých konstrukcí, a to jak při řešení lineárních úloh, velkých rotací, či nelineárních aplikacích velkých poměrných přetvoření. Je založen na Timoshenkově prutové teorii, která zahrnuje smykové deformace [1]. Tento dvou-uzlový prvek má v každém uzlu 7 stupňů volnosti (3 stupně volnosti odpovídají posunům v osách *x*, *y*, *z*, další 3 rotacím kolem těchto os a 7. stupeň volnosti odpovídá deplanaci). Model byl na obou koncích zatěžován ohybovými momenty stejné velikosti a opačného smyslu, viz Obr. 1.

2.1 Počáteční imperfekce

Při generování náhodných veličin (kap. 3) a následném vytváření výpočetního modelu jsou mezi počátečním zakřivením e_0 a počátečním natočením průřezu $a_{\varphi 0}$ uvažovány různé hodnoty korelací, a to v rozmezí -1 až 1 s krokem 0,1. Počáteční zakřivení se simuluje náhodnou vstupní veličinou e_0 , ze které je zakřivení osy a_{v0} vypočítáno podle vzorce (5). Náhodnou imperfekci $a_{\varphi 0}$ volíme jako korelovanou s imperfekcí e_0 . Protože jsme neměli informace o směrodatné odchylce počátečního pootočení $a_{\varphi 0}$, byla tak vypočtena s pomocí (5) a (6) za předpokladu, že e_0 je náhodná veličina a h, P_z , M_{cr} jsou deterministické veličiny dané nominálními geometrickými charakteristikami průřezu. Jelikož je střední hodnota e_0 nulová, tak je nulová i střední hodnota $a_{\varphi 0}$. Poznamenejme, že veličina $a_{\varphi 0}$ není ve výpočtu uvažována jako funkčně závislá na e_0 , tak jak by indikovaly (5) a (6), ale tyto vzorce slouží pouze pro výpočet směrodatné odchylky amplitudy počátečního natočení průřezu $a_{\varphi 0}$ jakožto náhodné vstupní veličiny korelované s e_0 . Směrodatná odchylka e_0 byla vypočítána z předpokladu, že 95 % realizací se nachází v tolerančních mezích normy přípustných odchylek [2].

Výpočty únosností jsou tak provedeny pro série náhodných realizací s 21 různými korelacemi mezi oběma počátečními imperfekcemi. Poznamenejme, že střední hodnoty ani směrodatné odchylky počátečních imperfekcí e_0 a $a_{\varphi 0}$ se nemění se změnou korelace. Příklady samotného počátečního zakřivení osy prutu a počátečního zakřivení v kombinaci s natočením průřezů modelovaného v ANSYSu jsou schematicky znázorněny na Obr. 3.



Obr. 3: Schéma výpočetního modelu: a) samotného počátečního zakřivení osy prutu, b) počátečního zakřivení v kombinaci s natočením průřezů s korelací -1, c) počátečního zakřivení v kombinaci s natočením průřezů s korelací 1

3 STOCHASTICKÁ ANALÝZA ÚNOSNOSTI

3.1 Náhodné vstupní veličiny

Únosnost M_d je obecně náhodná veličina, která je funkcí náhodných geometrických a materiálových charakteristik a může být studována za použití simulačních metod typu Monte Carlo. Pro tuto úlohu bylo pro každou ze série 21 uvažovaných korelací mezi vstupními imperfekcemi simulováno 500 náhodných realizací metodou Latin Hypercube Sampling [3,4]. Celkově tak bylo získáno 10500 hodnot únosností M_d .

Náhodnými vstupními veličinami byly rozměry profilu IPE 220 (Obr. 4) [5], materiálové vlastnosti oceli třídy S235 a počáteční imperfekce e_0 a $a_{\varphi 0}$. Jejich hodnoty jsou uvedeny v Tab. 1. U všech vstupních náhodných veličin je uvažováno Gaussovo rozdělení hustoty pravděpodobnosti. Reziduální napětí nebyla uvažována. Všechny veličiny jsou vyjma počátečních imperfekcí e_0 a $a_{\varphi 0}$ vzájemně statisticky nezávislé.



Obr. 4: Průřez IPE 220

Symbol	Náhodná veličina	Střední hodnota	Směrodatná odchylka	
Ε	Modul pružnosti v tahu	210 000 MPa	10 000 MPa	
f_y	Mez kluzu	297,3 MPa	16,8 MPa	
μ	Poissonův součinitel	0,3	0,009	
e_0	Amplituda počátečního zakřivení	0 m	0,001 695 m	
$a_{arphi 0}$	Amplituda počátečního natočení	0 rad	0,003 958 rad	
h	Výška průřezu	220,22 mm	0,975 mm	
b	Šířka průřezu	111,49 mm	1,093 mm	
t_1	Šířka stojiny	6,225 mm	0,247 mm	
t_2	Šířka pásnice	9,136 mm	0,421 mm	
r	Poloměr zaoblení	12 mm	0,552 mm	

Tab	$1 \cdot M_0$	hadná	votunní	voližinu
Tap.	T: INA	noane	vstubni	vencinv

3.2 Únosnost

Za hodnotu únosnosti M_d je uvažována taková hodnota ohybového momentu M (dle Obr. 1), při níž se von Missesovo napětí v nejvíce namáhaném místě nosníku rovná mezi kluzu f_y . Možnost zplastizování průřezu není uvažována a M_d je tedy hodnota elastické únosnosti. Statistiky únosností jsou zobrazeny v grafech na Obr. 5 a Obr. 6. Statistický soubor dat pro každou hodnotu korelace mezi počátečními imperfekcemi byl podroben Grubbsově testu odlehlých hodnot [6] a grafy jsou sestaveny pouze z hodnot neodlehlých.



Obr. 5: Střední hodnoty únosností pro jednotlivé korelace



Obr. 6: Směrodatné odchylky únosností pro jednotlivé korelace

3.3 Analytický výpočet

Hodnoty elastické únosnosti M_d lze pro korelaci 1 mezi oběma počátečními imperfekcemi, tj. s uvažováním platnosti vzorce (6), vypočítat podle [7]. Hodnoty únosností vypočtené z ANSYSu a z analytického výpočtu jsou porovnány na Obr. 7. Mezi oběma únosnostmi je vysoká korelace přibližně 0,996. Přesto jsou však analytické hodnoty v průměru o 2,14 kNm nižší. Rozdíly hodnot únosností z analytického výpočtu a z výpočtu v ANSYSu jsou zobrazeny na Obr. 8.



Obr. 7: Korelace mezi únosnostmi z výpočtu v ANSYSu a analytického výpočtu



Obr. 8: Rozdíly únosností

4 ZÁVĚR

Z grafů na Obr. 5-6 je patrné, že se vzrůstající korelací mezi počátečním zakřivením e_0 a počátečním natočením průřezů $a_{\varphi 0}$ klesá střední hodnota únosnosti, kdežto směrodatná odchylka má tendenci růst. Pokles střední hodnoty má přitom mírný nelineární trend klesající v oblasti, kde se korelace blíží 1. Pro korelaci 1, tedy plnou funkční závislost mezi těmito dvěma imperfekcemi, byla obdržena nejnižší střední hodnota únosnosti. To potvrzuje, že počáteční natočení prutů je nezanedbatelná imperfekce. Pro korelaci 1 obdržíme nejenom nejnižší hodnotu průměrné únosnosti, ale zároveň i vysokou hodnotu směrodatné odchylky únosnosti. Střední hodnota únosnosti je pro tuto korelaci cca o 9,84 % nižší než střední hodnota únosnosti pro korelaci -1. Pokud bychom počítali návrhovou únosnost jako 0,1 procentní kvantil, tak nízká střední hodnota a vysoká směrodatná odchylka povede na nízkou hodnotu 0,1 procentního kvantilu. Zakřivení osy prutu podle prvního tvaru vybočení (korelace 1) je z hlediska spolehlivosti návrhu konzervativní. Uveď me doporučení, že při praktickém použití metody je vhodné počáteční imperfekci uvažovat podle prvního tvaru vybočení, což je tradiční postup. Pro přesnější výpočet bychom potřebovali znát skutečnou hodnotu korelace mezi e_0 a $a_{\varphi 0}$ zjištěnou z velkého množství experimentů.

Srovnáme-li hodnoty únosností vypočtené z ANSYSu s hodnotami vypočtenými analyticky, obdržíme hodnoty v průměru o 2,14 kNm nižší. To může být způsobeno mimo jiné tím, že ANSYS vypočítává průřezové charakteristiky sám a nemusí se tak přesně shodovat s hodnotami z analytických vzorců. Přesto však je korelace mezi hodnotami únosností z obou metod výpočtů velmi vysoká, cca 0,996.

PODĚKOVÁNÍ

Projekt byl realizován za finanční podpory ze státních prostředků prostřednictvím Grantové agentury České republiky. Registrační číslo projektu je GAČR 14-17997S.

LITERATURA

- [1] ANSYS Element Reference, Release 12.1, ANSYS, Inc. 2009.
- [2] EN 10034:1993 Eurocode: Structural steel I and H sections Tolerances on shape and dimensions, 1993.
- [3] IMAN, R. & CONOVER, W. Small sample sensitivity analysis techniques for computer models with an application to risk assessment. *Communications in Statistics Theory and Methods* 1980; 9(17): 1749-1842.
- [4] McKEY, M., CONOVER, W. & BECKMAN, R. A comparison of the three methods of selecting values of input variables in the analysis of output from a computer code, *Technometrics* 1979; 21(2): 239-245.
- [5] MELCHER, J., KALA, Z., HOLICKÝ, M., FAJKUS, M. & ROZLÍVKA, L. Design Characteristics of Structural Steels Based on Statistical Analysis of Metallurgical Products, *Journal of Constructional Steel Research*, 60(3-5), 2004, s.795-808, ISSN 0141-0296.
- [6] GRUBBS, F. E. Procedures for Detecting Outlying Observations in Samples, *Technometrics*, Vol. 11, No. 1, 1969, s. 1-21.
- [7] KALA, Z. Elastic Lateral-Torsion Buckling of Simply Supported Hot-Rolled Steel I-Beams with Random Imperfections, *11th International Conference o Modern Building Materials, Structures and Techniques*, MBMST 2013, 2013, s. 504-514.

Oponentní posudek vypracoval:

Doc. Ing. Martin Psotný, PhD., Katedra stavebnej mechaniky, Stavebná fakulta, STU v Bratislave. Ing. Vít Křivý, Ph.D., Katedra konstrukcí, Fakulta stavební, VŠB-TU Ostrava. Sborník vědeckých prací Vysoké školy báňské - Technické univerzity Ostrava

číslo 1, rok 2014, ročník XIV, řada stavební

článek č. 22

Jakub VAŠEK¹, Martin KREJSA²

PRAVDĚPODOBNOSTNÍ POSOUZENÍ SPOLEHLIVOSTI PŘÍHRADOVÉ KONSTRUKCE V PROGRAMOVÉM SYSTÉMU MATLAB

PROBABILISTIC RELIABILITY ASSESSMENT OF TRUSS CONSTRUCTION IN MATLAB SOFTWARE PLATFORM

Abstrakt

Příspěvek se zabývá využitím pravděpodobnostních postupů při posouzení spolehlivosti příhradové nosné konstrukce. K výpočtu pravděpodobnosti poruchy posuzovaných nosných prvků i celého nosného systému byla zvolena klasická simulační technika Monte Carlo, aplikovaná v programovém systému MATLAB s využitím daného generátoru pseudonáhodných čísel a možnosti paralelizace u vícejádrových procesorů. Cílem práce byla analýza využitelnosti MATLABu pro pravděpodobnostní výpočty a pravděpodobnostní posudky spolehlivosti nosných konstrukcí.

Klíčová slova

MATLAB, posudek spolehlivosti, pravděpodobnostní metody, Monte Carlo, pravděpodobnost poruchy, funkce spolehlivosti, generátor pseudonáhodných čísel, paralelizace.

Abstract

This paper deals with the use of probabilistic methods in assessing the reliability of the truss support structure. Classical Monte Carlo simulation technique was chosen for calculation of failure probability in structural elements and the entire support system under assessment. Numerical calculation was applied in MATLAB software system using the random number generator and parallelization using multi-core processors. The aim of the study was to analyse the usability of MATLAB for probability calculations and probabilistic reliability assessments of load-bearing structures.

Keywords

MATLAB, reliability assessment, probabilistic methods, Monte Carlo, probability of failure, reliability function, generator of pseudorandom numbers, parallelization.

1 ÚVOD DO PROBLEMATIKY

Nosný systém každé stavební konstrukce by měl splňovat řadu podmínek, které se v proceduře posuzování objevují ve formě kritérií spolehlivosti. Určováním pravděpodobnosti, s jakou budou požadované vlastnosti stavebních objektů zachovány, se zabývá vědní obor teorie spolehlivosti konstrukcí [16]. Aplikace teorie spolehlivosti vede k využívání pravděpodobnostních výpočetních postupů, založených na teorii pravděpodobnosti a matematické statistiky, jejichž vývoj zažívá

¹ Jakub Vašek, Katedra stavební mechaniky, Fakulta stavební, VŠB-Technická univerzita Ostrava, Ludvíka Podéště 1875/17, 708 33 Ostrava - Poruba, student 4. ročníku bakalářského studia oboru Konstrukce staveb, e-mail: jakub.vasek.st@vsb.cz.

² doc. Ing. Martin Krejsa, Ph.D., Katedra stavební mechaniky, Fakulta stavební, VŠB-Technická univerzita Ostrava, Ludvíka Podéště 1875/17, 708 33 Ostrava - Poruba, tel.: (+420) 597 321 303, e-mail: martin.krejsa@vsb.cz.

v poslední době značný vzestup [1, 9, 21].

1.1 Pravděpodobnostní výpočty

Hlavním rysem pravděpodobnostních metod je možnost vyjádření variability, resp. nahodilosti vstupních i výstupních veličin pravděpodobnostně např. formou histogramů. Na rozdíl od současně platných normových postupů, založených na deterministickém pojetí vstupních veličin [13, 14, 15], pak pravděpodobnostní postupy vedou ke kvalitativně vyšší úrovni posudku spolehlivosti i zajištění bezpečnosti uživatelů stavebních objektů [11, 20, 22, 24, 25].

Tato práce si klade za cíl zmapovat možnosti pravděpodobnostních výpočtů v programovém systému MATLAB se zaměřením na posouzení spolehlivosti vybrané příhradové konstrukce.

1.2 Simulační metoda Monte Carlo

Výpočet pravděpodobnosti poruchy u posuzovaných nosných konstrukcí umožňuje řada výpočetních postupů a metod. Nejpočetnější a nejpoužívanější skupinu pravděpodobnostních nástrojů představují metody založené na simulační technice Monte Carlo, tedy na opakovaných vyčísleních (realizacích, simulacích) funkce spolehlivosti.

Klasická simulace Monte Carlo je snadno aplikovatelná a všeobecně srozumitelná [2, 19]. Při řešení výpočetně náročnějších úloh je již však málo efektivní, neboť dostatečně přesné řešení vyžaduje velký počet simulací.

Z tohoto důvodu je patrný rozvoj dalších metod založených na simulacích - tzv. zdokonalené a stratifikované simulační metody (např. Latin Hypercube Sampling – LHS [18, 23], Response Surface Method – RSM [8]), u kterých lze dosáhnout zvýšené efektivity vyčíslení výsledné pravděpodobnosti poruchy redukcí rozptylu jednotlivých simulací a jejich koncentrování do oblasti poruchy, což umožňuje výrazné snížení výpočetního času.

1.3 Pravděpodobnostní posouzení

V procesu návrhu konstrukce se provádí řada výpočetních operací, souvisejících s posudkem spolehlivosti jednotlivých konstrukčních částí nebo konstrukce jako celku. Musí být splněna různá kritéria spolehlivosti, definovaná příslušnými normovými předpisy, ve kterých figurují dvě klíčové veličiny - odolnost konstrukce R a účinek zatížení E.

Pravděpodobnostní posudek spolehlivosti pak může být založen na analýze funkce spolehlivosti, která může být definovaná např.:

$$RF_{(\mathbf{X})} = R - E \quad , \tag{1}$$

kde X je vektor náhodných vstupních proměnných - např. mechanických vlastnosti materiálu, geometrie konstrukce, účinků zatížení nebo vlivu prostředí na konstrukci.

Podmínka spolehlivosti pak může být vyjádřena ve tvaru:

$$E \le R \to R - E \ge 0 \to RF_{(\mathbf{x})} \ge 0 \quad . \tag{2}$$

Nesplnění podmínky (2) představuje z hlediska spolehlivosti nepříznivý, tzn. poruchový stav, kdy účinek zatížení *E* převyšuje odolnost konstrukce *R*.

Analýzou funkce spolehlivosti (1) pak lze získat pravděpodobnost poruchy P_f:

$$P_f = P(RF_{(\mathbf{X})} < 0) = P(R - E < 0) , \qquad (3)$$

kterou lze porovnat s mezní návrhovou pravděpodobností poruchy P_d , definovanou společně se směrnými úrovněmi spolehlivosti v ČSN EN 1993-1-1, podrobněji pak v ČSN ISO 2394. Konstrukce je spolehlivá za splnění podmínky spolehlivosti:

$$P_f \le P_d \quad . \tag{4}$$

Pravděpodobnostní posouzení lze provést i na úrovni indexu spolehlivosti [3, 10]:

$$\beta \ge \beta_d \quad . \tag{5}$$

2 PRAVDĚPODOBNOSTNÍ POSOUZENÍ V PROSTŘEDÍ PROGRAMOVÉHO SYSTÉMU MATLAB

Software MATLAB představuje programovací prostředí s širokou mírou uplatnění. Primárně je tento software určen k maticovým výpočtům, díky rozsáhlé knihovně funkcí jej však lze využít také například ke statistické analýze či k řešení pravděpodobnostních úloh.

2.1 Funkce MATLABu vhodné k pravděpodobnostním výpočtům

Mezi základní operace prováděné při pravděpodobnostních výpočtech patří práce s velkým objemem dat. Ke statistické analýze hodnot představujících například zatížení či materiálové charakteristiky lze s výhodou využít funkci "hist". Tato funkce vytváří ze zadaného statistického souboru (vektoru čísel) histogram, reprezentující četnost jednotlivých hodnot. Výstupem je grafické zobrazení histogramu, vektor absolutních četností a vektor obsahující střední hodnoty tříd, pro které byl histogram určen. Počet tříd představuje vstupní parametr funkce "hist", přičemž implicitně je nastaven na hodnotu 10.

Další možností zadání vstupních veličin do výpočtu může být parametrické rozdělení pravděpodobnosti. Součásti knihovny softwaru MATLAB je také funkce "pdf" (probability density functions), která slouží k vytvoření celé řady parametrických rozdělení pravděpodobnosti, např. rovnoměrné, normální nebo lognormální. Argument této funkce je tvořen názvem parametrického rozdělení pravděpodobnosti, vektorem reprezentující definiční obor zadaného rozdělení a příslušnými parametry. Na funkci "pdf" navazuje nepřímo funkce "cdf" (cumulative distribution function). Vstupní hodnoty jsou totožné, ale výstupem je distribuční funkce. K usnadnění aplikace parametrických rozdělení existují v rámci základního rozhraní softwaru MATLAB také funkce "randtool" a "disttool", které vyvolají okno s možností zobrazení všech implementovaných parametrických rozdělení.

Velký význam má u pravděpodobnostních výpočtů s využitím simulačních technik generátor pseudonáhodných čísel. Pro pravděpodobnostní posudky konstrukcí je využíváno generování pseudonáhodných čísel s rovnoměrným rozdělením. Kvalitu generátoru pseudonáhodných čísel lze vyjádřit periodou opakování neboli skupinou čísel, která se v průběhu generování opakuje. K řešení tohoto případu slouží funkce "rand" [6], která vytváří pseudonáhodná čísla v rozmezí 0 a 1. Funkce "rand" v nejstarších verzích softwaru MATLAB využívala Lehmerova rekurentního vztahu:

$$x_{k+1} = (a.x_k + c) \operatorname{mod} m, \qquad (6)$$

kde jednotlivé veličiny nabývají hodnot: $a = 7^5 = 16807$, c = 0 a $m = 2^{31} - 1 = 2147483647$.

Pro uvedené hodnoty konstant činí perioda opakování přes 2 miliardy čísel. Během zdokonalování výpočetní techniky i samotného systému MATLAB došlo postupně i k úpravě výpočetního algoritmu generátoru. Od 5. verze tohoto softwaru činí perioda opakování 2¹⁴⁹² čísel. Tato hodnota periody je pro simulační metody plně dostačující.

Na ukázku práce generátoru pseudonáhodných čísel v programovém systému MATLAB byl sestrojen histogram četností náhodně generovaných čísel s rovnoměrným rozdělením pravděpodobnosti, jenž je zobrazen na obr. 1. Histogram byl vytvořen pro 1.10⁶ pseudonáhodných čísel generovaných funkcí "rand".

2.2 Optimalizace simulačního výpočtu

K dosažení dostatečně přesného výsledku simulačních metod je důležité velké množství simulačních kroků. S tímto faktem je spojena časová náročnost výpočtu. Opatřením, které eliminuje výpočetní čas, může být paralelizace výpočtu na vícejádrových procesorech (podobně jako v [7]). Tento přístup lze aplikovat i v prostředí programového systému MATLAB. Příkazem, který uvede do pohotovosti jádra procesoru, se nazývá "matlabpool" [17]. Argumentem tohoto příkazu je počet jader, která mají být následně použita pro výpočet. Vzhledem ke skutečnosti, že simulační techniky představují cyklus se známým počtem opakování, lze využít úpravu cyklu "for" na "parfor" [17].



87
88 - matlabpool('open',2)
89
90 - ⊕parfor i=1:n...
117
118 - matlabpool close
119

Obr.1: Histogram vytvořený z vygenerovaných pseudonáhodných čísel



Příklad zápisu těchto příkazů v softwaru MATLAB je zobrazen na obr. 2. V tomto případě se výpočetní operace v simulačním cyklu rozdělí na 2 části, které jsou řešeny odděleně příslušným jádrem procesoru. Tyto výpočetní úkony probíhají dynamicky, kdy se na začátku dalšího kroku cyklu přiřadí příslušná výpočetní operace volnému jádru procesoru, čímž dochází k optimálnímu využití procesoru.

Při použití cyklu "parfor" musí být dodržena určitá omezení. Prvním předpokladem použití této optimalizace je nezávislost jednoho simulačního cyklu na druhém. V případě simulační techniky Monte Carlo u dále uvedeného příkladu byl tento předpoklad splněn, protože v každém simulačním kroku se u každé náhodné proměnné generují nové statisticky nezávislé hodnoty. Další podmínkou je využití pouze jednoho cyklu "parfor". Pokud je z nějakých důvodů nutné využít vnitřní smyčku, musí být použit standardní cyklus "for".

Omezení, které se projevilo při algoritmizaci simulační techniky v softwaru MATLAB, souvisí s ukládáním dat. Pokud se výsledky simulace průběžně zaznamenávají do matice, je ji nutné nejprve vynulovat. Pokud se během paralelní smyčky do matice ukládají data pomocí indexování, je žádoucí předem znát rozměr matice výsledků. Během souběžného výpočtu totiž nelze matici mazat, ani upravovat její velikost. Z tohoto důvodu byl celý níže uvedený simulační proces rozdělen na menší celky, po kterých došlo k částečnému vyhodnocení a vynulování matice výsledků.

3 PRAVDĚPODOBNOSTNÍ POSOUZENÍ PŘÍHRADOVÉ KONSTRUKCE

V softwaru MATLAB byl pomocí výše uvedených funkcí naprogramován výpočetní model pravděpodobnostního posouzení ocelového příhradového vazníku, založeném na simulační technice Monte Carlo. Pravděpodobnost poruchy byla zjišťována jak u jednotlivých nosných prvků - prutů, tak u konstrukce jako celku s referenční dobou 50 let. Pro výpočet vnitřních sil u jednotlivých prutů byla využita obecná deformační metoda.



Obr.3: Statické schéma posuzované příhradové konstrukce
3.1 Popis řešené konstrukce

Posuzovaná příhradová konstrukce je tvořena 29 pruty z oceli pevnostní třídy S 235 (statické schéma viz obr. 3). Příhradový vazník tvoří pruty z rovnoramenných úhelníků, přičemž stojky a diagonální pruty jsou tvořeny dvojicí těchto profilů.

3.2 Vstupní údaje

Řešená konstrukce byla nejprve navržena a posouzena podle stávajících normových postupů. Výsledné dimenze profilů jednotlivých prutů pak byly použity i při definici výpočetního modelu pravděpodobnostního výpočtu.

U řešení pravděpodobnostní úlohy jsou vstupní a výstupní náhodně proměnné veličiny vyjádřeny pravděpodobnostně např. formou useknutých histogramů [4, 12]. K náhodně proměnným veličinám, ovlivňující odolnost ocelové konstrukce, patří napětí na mezi kluzu, průřezové charakteristiky (průřezová plocha a moment setrvačnosti). Variabilita průřezových vlastností může být vyjádřena např. postupem podle [4], který spočívá ve vyjádření statisticky závislých průřezových charakteristik jednoparametricky s využitím histogramu ε (lze rovněž použít postup podle [5]).

Vstupní náhodně proměnné veličiny ovlivňující odolnost řešené konstrukce jsou uvedeny v tabulce 1. Modul pružnosti oceli v tahu a tlaku byl vyjádřen deterministicky E = 210 GPa.

Proměnná	Název	Jednotky	Název histogramu	Rozsah hodnot	
				Minimum	Maximum
Rozptyl charakteristik průřezu	eps	[-]	Epsilon	0,0268	0,0402
Mez kluzu oceli	f_y	[MPa]	Bars-Fy235-01	207	421

Tab.1: Náhodně proměnné veličiny vstupující do výpočtu odolnosti konstrukce

Proměnná	Název	Jednotky	Název histogramu	Rozsah hodnot	
				Minimum	Maximum
Stálé zatížení	DL	1,91	DEAD1	0,818	1
Zatížení sněhem	SL	10,88	SNOW2	0	1
Zatížení větrem	WL	5,01	WIND1	-1	1

Tab.2: Náhodně proměnné veličiny vstupující do výpočtu účinku zatížení

U veličin, reprezentující účinky zatížení, bylo uvažováno s vlivem zatížení stálého, sněhem, větrem a vlastní tíhou. V tabulce 2 jsou uvedeny vstupní hodnoty náhodně proměnných veličin všech typů zatížení. Zatížení větrem, sněhem a zatížení stálé působí ve styčnících horního pásu příhradového vazníku. Síly reprezentující vlastní tíhu jsou přepočítány podle proměnné průřezové plochy a objemové hmotnosti oceli do každého uzlu konstrukce. Výsledné hodnoty vnitřních sil pak v prutech symetrických k ose symetrie dané konstrukce vycházely vzhledem k proměnné průřezové ploše odlišně.

3.3 Výpočetní model

Algoritmus výpočtu lze obecně rozdělit do tří částí. V první části probíhá načtení dat pro příslušné náhodně proměnné veličiny a následně jsou vytvořeny histogramy a příslušné distribuční funkce. Také je potřebné načíst údaje, definující geometrii nosného systému - souřadnice

uzlů, popis prutů, podpor a zatěžovacích vektorů. Pro posouzení spolehlivosti je nutno zadat rovněž hodnoty vzpěrných délek.

V druhé části vytvořeného algoritmu probíhá vlastní simulace Monte Carlo. Při využití simulačních metod je nutné k zjištění přesnějšího řešení vyšší počet simulací. V tomto případě byl výpočet proveden s počtem 30.10⁶ simulací. Variační koeficient výsledné pravděpodobnosti poruchy lze pro malé pravděpodobnosti definovat ve tvaru:

$$v_{P_f} = \frac{1}{\sqrt{N.P_f}} , \qquad (7)$$

kde N je počet simulací a P_f řád určované pravděpodobnosti poruchy. Pro danou úlohu lze tedy očekávat výsledek zatížený chybou, vyjádřenou variačním koeficientem ±5%. Z tohoto hlediska lze počet simulačních kroků považovat za dostatečný.

Během simulace jsou nejprve určeny hodnoty zatížení. Zatěžovací vektory představují síly, kterými je konstrukce zatížena, přičemž vynásobením jednotlivých vektorů zatížení s příslušnou náhodně vygenerovanou hodnotou distribuční funkce dojde k začlenění pravděpodobnosti do výpočtu. Součtem všech zatěžovacích vektorů lze získat zatěžovací vektor celé konstrukce. Následně může proběhnout výpočet obecnou deformační metodou, kterým lze určit náhodně proměnné velikosti vnitřních sil v konstrukci.

Poslední, třetí část algoritmu zpracovává data z výpočtu a porovnává hodnoty vnitřních sil z jednotlivých simulačních kroků s limitními hodnotami. Ke snížení nároků na paměť při samotném posouzení prutů umožňuje algoritmus ukládat do paměti pouze hodnoty 1 nebo 0 u každého ze simulačních kroků (1 reprezentuje stav poruchy, 0 stav spolehlivý), čehož lze využít v případě potřeby pouze číselného vyjádření výsledné pravděpodobnosti poruchy. Pokud jsou ovšem požadovány grafické výstupy výsledků - histogramy výsledných veličin (např. funkce spolehlivosti), algoritmus umožňuje v jednotlivých simulačních krocích ukládat kompletní dosažené výsledky (např. hodnoty vnitřních sil).

3.4 Posouzení spolehlivosti nosných prvků

Posuzovaná příhradová konstrukce je vystavena pouze účinkům osového namáhání, přičemž mohou být nosné prvky namáhány tahem nebo prostým či vzpěrným tlakem.

Při posudku spolehlivosti taženého prutu a prutu namáhaného prostým tlakem je jeho odolnost vyjádřena:

$$R = N_{Rd} = \left| f_y . A \right| \,, \tag{8}$$

kde fy reprezentuje napětí na mezi kluzu oceli [MPa] a A představuje průřezovou plochu prutu [m²].

Při definování odolnosti prutu namáhaného vzpěrným tlakem se vychází z Eulerovy kritické síly:

$$R = N_{Rd} = F_{cr} = \pi^2 \frac{EI_y}{L_{cr}^2} , \qquad (9)$$

kde *E* je modul pružnosti v tahu a tlaku oceli [MPa], I_y moment setrvačnosti průřezu [m⁴] a L_{cr} vzpěrná délka [m].



Obr.4: Schematicky znázorněný výsledek pravděpodobnostního výpočtu



Obr.5: Výstup z programu MATLAB: posouzení spolehlivosti taženého prutu spodního pásu příhradové konstrukce a grafická interpretace výsledků jednotlivých simulací - každá z teček grafu vyjadřuje výsledný účinek zatížení (horizontální osa) a odolnost konstrukce (vertikální osa) pro každý simulační krok, červená přímka vyznačuje hranici poruchy, která odděluje oblast poruchovou (vpravo dole) od oblasti, kdy je spolehlivost konstrukce zachovaná



Obr.6: Výstup z programu MATLAB: posouzení spolehlivosti taženého prutu – vlevo histogram účinku zatížení (zeleně), vpravo histogram odolnosti konstrukce (modře), detail ukazuje oblast poruchy, kde dochází ke vzniku pravděpodobnosti poruchy podle (3)

Na obr. 4 je zobrazena posuzovaná konstrukce s výsledkem pravděpodobnostního posouzení. Černé označené pruty představují nosné prvky, u nichž nedošlo během simulací k poruše. Důvodem tohoto výsledku může být skutečnost, že při návrhu podle ČSN EN 1993-1-1, ze které vycházelo zadání, nehraje roli pouze limitní únosnost, ale také limitní hodnota štíhlosti prvku. Dalším faktorem, ovlivňující nulovou pravděpodobnost u některých prutů je fakt, že se při návrhu dimenzuje vždy skupina prutů (diagonály jsou tvořeny jedním profilem). Modrou barvou jsou zaznačeny pruty, u kterých došlo k překročení únosnosti v tahu. Při gravitačním zatížení vycházejí tahové síly v dolním pásu vazníku, čemuž také odpovídá pravděpodobnostní výsledek. Poslední skupinou prutů odlišených červenou barvou jsou krajní diagonální pruty. U těchto prutů došlo k překročení únosnosti ve vzpěrném tlaku. Namáhání takto uložených prvků při gravitačním zatížení je tahové, vzhledem k působení sání větru však v diagonálních prutech může vzniknout také tlaková normálová síla.

Další výstup pravděpodobnostního výpočtu v programu MATLAB je znázorněn na obr. 5. Uvedený bodový graf byl vytvořen z vypočtených hodnot taženého prutu dolního pásu konstrukce. Každý modrý bod v grafu představuje jeden simulační krok. Vodorovná osa reprezentuje účinky zatížení. Na svislé ose jsou vyznačeny hodnoty odolnosti konstrukce. Body nacházející se pod červeně vyznačenou přímkou nesplňují podmínku spolehlivosti (2), představují tedy simulace, u kterých došlo k poruše prvku s odolností konstrukce R menší nežli účinek zatížení E. Oblast poruchy taženého nosného prvku řešené konstrukce je pak detailně zobrazena na obr. 6.

3.5 Posouzení spolehlivosti konstrukce

Pravděpodobnostní posouzení může probíhat na úrovni jednotlivých prvků, ale také lze zjistit pravděpodobnost poruchy celé konstrukce jako systému. Za poruchový stav konstrukce je považován stav, kdy dojde k poruše alespoň u jednoho z prutů. Z tohoto předpokladu lze usuzovat, že pravděpodobnost poruchy konstrukce jako celku bude vyšší (nebo stejná), než pravděpodobnost poruchy jednotlivých prvků, neboť při výpočtu pravděpodobnosti poruchy celého systému dochází k poruchovým stavům častěji (stačí porucha na jednom z prutů) nežli při posuzování spolehlivosti u jednotlivých prutů (k poruchovému stavu dochází jen na daném prvku, nemají na něj vliv poruchové stavy ostatních prutů). Této skutečnosti odpovídají i výsledné pravděpodobnosti poruchy uvedené v tab. 3. Nutno však podotknout, že toto tvrzení souvisí pouze s řešenou staticky určitou příhradovou konstrukcí a složitějších materiálových modelů by vztah pravděpodobnosti poruchy nosného prvku a celého systému byl komplikovanější. Členové autorského kolektivu by se na zkoumání těchto úloh chtěli zaměřit v dalším bádání.

Posuzovaný prut	Rozhodující namáhání	Počet poruchových stavů	Pravděpodobnost poruchy P _f	Index spolehlivosti β
Diagonála (levá)	Tlak	22	7,33.10-7	4,82
Diagonála (pravá)	Tlak	20	6,67.10-7	4,84
Dolní pás (1. zleva)	Tah	3	1,00.10-7	5,21
Dolní pás (2. zleva)	Tah	186	6,20.10-6	4,38
Dolní pás (3. zleva)	Tah	184	6,13.10-6	4,38
Dolní pás (4. zleva)	Tah	2	6,67.10 ⁻⁸	5,29
Celá konstrukce	-	411	1,37.10-5	4,20

Tab.3: Výsledky pravděpodobnostního posouzení příhradové konstrukce

4 ZÁVĚR

Příspěvek poukázal na možnost využití programového systému MATLAB pro pravděpodobnostní výpočty na základě pravděpodobnostního posouzení nosných prvků i systému ocelového příhradového vazníku. Bylo popsáno pravděpodobnostní řešení, při kterém byla v programovém prostředí systému MATLAB s využitím vestavěných a v příspěvku popsaných funkcí provedena statistická analýza vstupních dat, simulace s využitím metody Monte Carlo i paralelizace simulačního výpočtu.

Ukázalo se, že programový systém umožňuje s výhodou řešit podobně formulované pravděpodobnostní úlohy. Vzhledem k možnosti relativně snadného programování lze MATLAB využít i pro pravděpodobnostní úlohy se složitějším výpočetním modelem (definované např. s využitím obecné deformační metody nebo metody konečných prvků).

PODĚKOVÁNÍ

Tvorba článku byla realizována za finanční podpory z prostředků koncepčního rozvoje vědy, výzkumu a inovací pro rok 2014 přidělených VŠB-TU Ostrava Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy České republiky.

LITERATURA

- [1] BROŽOVSKÝ, J. a P. KONEČNÝ. Stochastic response of reinforced concrete structures to technical seismicity. In: Proceedings of 2nd International Conference on Parallel, Distributed, Grid and Cloud Computing for Engineering, PARENG 2011. Civil-Comp Proceedings, Vol. 95, ISBN: 978-190508842-3, 2011.
- [2] GHOSH, P., P. KONEČNÝ a P. J. TIKALSKY. SBRA model for corrosion initiation of concrete structures. *RILEM Bookseries*, Vol. 5, pp. 85-100 (16 p), ISSN: 22110844, DOI: 10.1007/978-94-007-0677-4_5, 2011.
- [3] HOLICKÝ, M., J. MARKOVÁ a M. SÝKORA. Overview of target reliability levels in present standards. In: Sborník mezinárodní konference Modelování v mechanice 2014, (8 p). VŠB-TU Ostrava, ISBN 978-80-248-3320-0, 2014.
- JANAS, P., M. KREJSA a V. KREJSA. Software Package Probalc from the Point of View of a User. *Transactions of the VŠB – Technical University of Ostrava, Civil Engineering Series*. Vol. X, Issue 1, pp. 1–11, ISSN (Online) 1804-4824, ISSN (Print) 1213-1962, DOI: 10.2478/v10160-010-0010-7, 2010.
- JANAS, P. a M. KREJSA. Statistical Dependence of Input Variables in DOProC Method. *Transactions of the VŠB – Technical University of Ostrava, Civil Engineering Series*. Vol. XII, Issue 2, pp. 48–58 (11 p), ISSN (Online) 1804-4824, ISSN (Print) 1213-1962, DOI: 10.2478/v10160-012-0017-3, 2012.
- [6] KAHÁNEK, P. Generátor náhodných čísel v Matlabu. In: Sborník konference Technical computing 2005, Praha. (10 p) [on-line]. Dostupné na <http://dsp.vscht.cz/konference_matlab/MATLAB05/prispevky/kahanek/kahanek.pdf>, 22.1. 2014
- [7] KONEČNÝ, P. a J. BROŽOVSKÝ. Simulation based reliability assessment method using parallel computing. In: Proceedings of 1st International Conference on Parallel, Distributed and Grid Computing for Engineering, PARENG 2009. Vol. 90, ISBN: 978-190508827-0, 2009.
- [8] KRÁLIK, J. a J. KRÁLIK Jr. Probability assessment of analysis of high-rise buildings seismic resistance. *Advanced Materials Research*, vol. 712-715, pp. 929-936, ISSN 1022-6680, DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMR.712-715.929, 2013.
- [9] KRÁLIK, J. Probabilistic nonlinear analysis of reinforced concrete bubbler tower structure failure. *Transactions of the VŠB – Technical University of Ostrava, Civil Engineering Series*. Vol. XIV, Issue 1, pp. 9–20 (12 p), ISSN (Online) 1804-4824, ISSN (Print) 1213-1962, DOI: 10.2478/tvsb-2014-0002, 2014.
- [10] KREJSA, M., P. JANAS a R. ČAJKA. Using DOProC Method in Structural Reliability Assessment. Applied Mechanics and Materials: Mechatronics and Applied Mechanics II. Zurich, Switzerland: Trans Tech Publications, Vols. 300 - 301, pp. 860-869 (10 p). ISSN 1662-7482. DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMM.300-301.860, 2013.
- [11] KŘIVÝ, V. Reliability assessment of steel frames allowing for corrosion effects. In: 12th International Conference on Civil, Structural and Environmental Engineering Computing, CC 2009, Funchal, Portugal, (15 p). ISBN: 978-190508830-0, 2009.
- [12] MAREK, P., M. GUŠTAR a M. KREJSA. Simulation-based reliability assessment: Tool for efficient steel design. *Journal of Constructional Steel Research*, Vol. 46, Issue 1-3, pp. 156-158 (3 p), ISSN: 0143974X, DOI: 10.1016/S0143-974X(98)80011-4, 1998.
- [13] MARSCHALKO, M., T. PEŇÁZ a L. FOJTOVÁ. The Importance of Implementing Transparent Geological Structure into Land-use Planning Documentation. *Transactions of the*

VŠB – *Technical University of Ostrava, Civil Engineering Series.* Vol. IX, Issue 1, pp. 217–226 (10 p), ISSN (Print) 1213-1962, 2009.

- [14] MARSCHALKO, M., L. TŘESLÍN a H. LAHUTA. The GIS Assessment of Engineeringgeological Zones of Greatest Regional Importance of Slezská Ostrava, Vítkovice and Radvanice. *Transactions of the VŠB – Technical University of Ostrava, Civil Engineering Series.* Vol. VIII, Issue 1, pp. 405–414 (10 p), ISSN (Print) 1213-1962, 2008.
- [15] MARSCHALKO, M. Evaluation of the Influence of Saturation on Slope Stability in Type Models of Deluvial-Eluvial Complexes of Various Thicknesses in the Outer Carpathian Flysch. *Transactions of the VŠB – Technical University of Ostrava, GeoScience Engineering*. Vol. LI, Issue 1, pp. 27-36 (10 p), ISSN 0474-8476, 2005.
- [16] MELCHERS, R. E. Structural Reliability Analysis and Prediction. 2nd edition, John Wiley & Sons Ltd., England, (437 p), ISBN 0-471-98324-1, 1999.
- [17] MOLER, C. Numerical computing with MATLAB, Chapter 9 Random numbers, (15 p), The MathWorks, Inc., Natick, MA (electronic edition), SIAM, Philadelphia (print edition). [on-line]. http://www.mathworks.com/moler/random.pdf, 2004.
- [18] NOVÁK, D., B. TEPLÝ, D. LEHKÝ a R. PUKL. Probabilistic life-cycle assessment of civil engineering concrete structures. In: *Proceedings of the 11th International Conference on Structural Safety and Reliability, ICOSSAR 2013*, pp. 4739-4742 (4 p), ISBN: 978-113800086-5, 2013.
- [19] LOKAJ, A., K. VAVRUŠOVÁ a E. RYKALOVÁ. Application of laboratory tests results of dowel joints in cement-splinter boards VELOX into the fully probabilistic methods (SBRA method). *Applied Mechanics and Materials*, vol. 137, pp. 95-99 (5 p). ISSN: 16609336, ISBN: 978-303785291-0, DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMM.137.95, 2012.
- [20] SLOWIK, O. a D. NOVÁK. Algoritmizace spolehlivostní optimalizace. In: Sborník mezinárodní konference Modelování v mechanice 2014, (12 p). VŠB-TU Ostrava, ISBN 978-80-248-3320-0, 2014.
- [21] SÝKORA, M., M. HOLICKÝ a J. KREJSA. Model Uncertainty for Shear Resistance of Reinforced Concrete Beams with Shear Reinforcement According to EN 1992-1-1. *Transactions of the VSB - Technical University of Ostrava. Civil Engineering Series.* Vol. XIII, Issue 2, pp. 150–159 (10 p), ISSN (Online) 1804-4824, ISSN (Print) 1213-1962, DOI: 10.2478/tvsb-2013-0022, 2013.
- [22] VOŘECHOVSKÁ, D. a B. TEPLÝ. Limit states of RC structures: Reinforcement corrosion, reliability and modelling. In: Proceedings of the 8th International Conference on Fracture Mechanics of Concrete and Concrete Structures, FraMCoS 2013, pp. 2117-2128 (12 p), ISBN: 978-849410041-3, 2013.
- [23] VOŘECHOVSKÝ, M. Extension of sample size in Latin Hypercube Sampling Methodology and software. In: Life-Cycle and Sustainability of Civil Infrastructure Systems - Proceedings of the 3rd International Symposium on Life-Cycle Civil Engineering, IALCCE 2012. pp. 2403-2410 (8 p). ISBN: 978-041562126-7, 2012.
- [24] VROUWENVELDER, A.C.W.M. Developments towards full probabilistic design codes. Structural Safety, Vol. 24, Issue 2–4, pp. 417-432 (16 p), ISSN 0167-4730, DOI: 10.1016/S0167-4730(02)00035-8, 2012.
- [25] VROUWENVELDER, T. The JCSS probabilistic model code. Structural Safety. Vol. 19, Issue 3, pp. 245-251 (7 p). ISSN 0167-4730, 1997.

Oponentní posudek vypracoval:

Prof. Ing. Juraj Králik, PhD., Katedra stavebnej mechaniky, Stavebná fakulta, STU v Bratislave. Ing. Miroslav Sýkora, Ph.D., Oddělení spolehlivosti konstrukcí, Kloknerův ústav, ČVUT v Praze. číslo 1, rok 2014, ročník XIV, řada stavební

článek č. 23

Dita VOŘECHOVSKÁ¹, Miroslav VOŘECHOVSKÝ²

ANALYTICAL AND NUMERICAL APPROACHES TO MODELLING OF REINFORCEMENT CORROSION IN CONCRETE

ANALYTICKÉ A NUMERICKÉ PŘÍSTUPY PRO MODELOVÁNÍ KOROZE V ŽELEZOBETONOVÝCH KONSTRUKCÍCH

Abstract

Corrosion of reinforcement in concrete is one of the most influencing factors causing the degradation of RC structures. This paper attempts at the application of an analytical and numerical approaches to simulation of concrete cracking due to reinforcement corrosion. At first, a combination with detailed analysis of two analytical models proposed by Liu and Weyers (1998) and Li et al. (2006) is suggested and presented. Four distinct phases of the corrosion process are identified and a detailed guide through the mathematical development is described. Next, numerical computations obtained with nonlinear finite element code are presented. The model features the state-of-the-art in nonlinear fracture mechanics modelling and the heterogeneous structure of concrete is modelled via spatially varying parameters of the constitutive law. Finally, the results of the analytical studies are compared to numerical computations and the paper concludes with the sketch of a real-life numerical example.

Keywords

Corrosion, durability, degradation, mathematical modelling.

Abstrakt

Koroze ocelové výztuže v betonu je jedním z hlavních příčin degradace železobetonových konstrukcí. Tento příspěvek předkládá možnosti analytických a numerických přístupů modelování rozvoje trhlin v betonu vzniklých působením koroze výztuže. Nejprve je prezentována kombinace a detailní analýza dvou analytických modelů od Liu a Weyerse (1998) a Li a kol. (2006). Jsou identifikovány čtyři fáze vývoje koroze s detailním popisem matematického modelu. Dále jsou prezentovány numerické výpočty získané nelineární konečně prvkostní analýzou. Použitý model využívá nejnovější nástroje nelineárního modelování s uplatněním přístupů lomové mechaniky. Heterogenní struktura betonu je modelována pomocí náhodného pole vstupních parametrů. Na závěr jsou porovnány výsledky analytických a numerických výpočtů a je uveden příklad aplikace na reálné části konstrukce.

Klíčová slova

Koroze, trvanlivost, degradace, matematické modelování.

¹ Ing. Dita Vořechovská, Ph.D., Institute of Structural Mechanics, Faculty of Civil Engineering, Brno University of Technology, Veveří 95, 602 00 Brno, tel.: (+420) 541 14 73 68, e-mail: vorechovska.d@fce.vutbr.cz.

² Doc. Ing. Miroslav Vořechovský, Ph.D., nstitute of Structural Mechanics, Faculty of Civil Engineering, Brno University of Technology, Veveří 95, 602 00 Brno, tel.: (+420) 541 14 73 70, e-mail: vorechovsky.m@fce.vutbr.cz.

1 INTRODUCTION

Corrosion of reinforcement embedded in concrete is an electrochemical process during which coupled anodic and cathodic reactions take place. Pore water functions as an electrolyte. The detrimental effect of corrosion is due to the fact that a rust product has a volume 2 - 6 times larger than the original steel. Consequently, it causes volume expansion, developing tensile stress in the surrounding concrete. Reinforcement corrosion takes place during the propagation period, and its rate is governed by the availability of water and oxygen on the steel surface. Due to corrosion, the effective area of the steel decreases and rust products grow, causing, at a certain stage, longitudinal cracking, and later, the spalling of concrete cover (delamination). Generally two types of corrosion are distinguished: the uniform (or general) type and the pitting (localized) type of corrosion. The subject of this paper is the uniform type of corrosion.

Modelling of concrete stressed by the rust products developed on the steel reinforcement concerns many authors. Bažant (1979 a,b) developed a physical model for steel corrosion in concrete sea structures formulated as an initial-boundary-value problem. Coupled 3D chemo-hygro-thermo-mechanical model based on microplane model is presented by Ožbolt et al. (2012). The authors apply the model for the calculation of the distribution of radial pressure and the prediction of crack pattern in concrete due to reinforcement corrosion. Bohner et al. (2010) modelled concrete cover cracking due to pitting corrosion of the reinforcement using finite element method based on fracture mechanics approach.

In this paper, a combination and detailed analysis of two analytical models proposed by Liu and Weyers (1998) and Li et al. (2006) is suggested and presented. Next, numerical computations obtained with a nonlinear finite element code which is based on the nonlinear fracture mechanics (NLFM) are introduced and subsequently combined with the spatial variation of concrete parameters reflecting the heterogeneous structure of concrete. Finally, the results of the analytical and numerical approaches are compared and a practical example is shown.

2 FORMULATION OF THE ANALYTICAL MODEL

The model presented here is a combination of analytical models proposed by Liu and Weyers (1998) and Li et al. (2006). As assumed in these models, concrete with an embedded reinforcing steel bar can be modelled as a thick-wall cylinder (Bažant, 1979 a,b, Pantazopoulou & Papoulia, 2001, Tepfers, 1979). This is shown schematically in Fig. 1.

According to Fig. 1, four different stages of reinforcement corrosion propagation can be identified. Firstly, stage I, when no corrosion is present yet, is illustrated in Fig. 1a. Next, in stage II, the porous zone on the reinforcement-concrete interface is filled by corrosion products and the surrounding concrete starts to be stressed due to corrosion (Fig. 1b). When the tangential stress in concrete exceeds its tensile strength, the crack initiates perpendicularly to the interface (Fig. 1c, stage III). After a certain time the crack propagates through the concrete cover (Fig. 1d) and we are able to measure the crack width on the concrete surface, stage IV.



Fig. 1: Scheme of the corrosion induced concrete cracking process; partially adopted from (Li et al., 2006)

Transition from stage I to stage II: To determine the time to corrosion initiation t_i , which is a transition time from stage I to stage II; we may use a wide spectrum of models for concrete carbonation or chloride ingress. The descriptions of those models are not the subject of this paper; see e.g. (Teplý et al., 2007, Vořechovská et al., 2009). In the following text we assume $t_i = 0$.

Transition from stage II to stage III: A time to crack initiation, t_c (Fig.1c), which is a time of transition from stage II to stage III, can be estimated according to (Liu & Weyers, 1998) as:

$$t_{\rm c} = \frac{W_{\rm crit}^2}{2 \times 0.092 \left(\frac{1}{\alpha}\right) \pi \, d_{\rm i} \, i_{\rm corr}} \tag{1}$$

where:

 d_i – is the initial diameter of the reinforcement bar [mm],

 i_{corr} – is the corrosion current density, which is a measure of the corrosion rate [μ A/cm²],

 α – is the coefficient related to the type of corrosion products [-] and

 W_{crit} – is the critical amount of corrosion products that generate the critical tensile stresses [mg/mm] and is defined as (Liu & Weyers, 1998):

$$W_{\text{crit}} = \frac{\rho_{\text{rust}} \pi \left[d_i \left(d_{s,\text{crit}} + d_0 \right) + 2d_0 d_{s,\text{crit}} \right]}{1 - \alpha \rho_{\text{rust}} / \rho_{\text{st}}}$$
(2)

where:

 ρ_{rust} – is the density of corrosion products [kg/m³],

 $\rho_{\rm st}$ – is the density of steel [kg/m³],

 d_0 – is the thickness of the annular layer of concrete pores (i.e. a pore band) at the interface between the bar and the concrete [mm] and

 $d_{s,crit}$ – is the critical thickness of a ring of corrosion products [mm] that is defined as (Liu & Weyers, 1998):

$$d_{\rm s,crit} = \frac{a f_{\rm t}}{E_{\rm ef}} \left(\frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2} + v_{\rm c} \right)$$
(3)

where:

a – is the concrete cover [mm],

 $f_{\rm t}$ – is the tensile strength of concrete [MPa],

 $E_{\rm ef}$ – is the effective modulus of elasticity of concrete [GPa], $E_{\rm ef} = E_{\rm c}/(1+\varphi_{\rm cr})$,

 $E_{\rm c}$ – is the elastic modulus of concrete [GPa],

 $\varphi_{\rm cr}$ – is the creep coefficient of concrete [-],

- v_c is the Poisson ratio [-],
- x is defined as $x = (d_i+2d_0)/2$ [mm] and
- y is defined as $y = a + (d_i + 2d_0)/2$ [mm].

The constant 0.092 is assumed according to Bhargava et al., 2005 (Liu & Weyers, 1998 assume 0.098).

Transition from stage III to stage IV: Once the time t_c is reached, the crack starts to develop and we need to determine whether it has already propagated to the surface (Fig. 1d). The crack divides the thick-wall cylinder into 2 co-axial cylinders: inner cracked and outer uncracked ones, as shown in Fig. 1c. For the outer uncracked concrete cylinder, the theory of elasticity still applies. Let us assume that the cracks in the inner cracked concrete cylinder are smeared and uniformly circumferentially distributed, see Fig. 5a (Pantazopoulou & Papoulia, 2001) and that concrete is

a quasibrittle material. According to Bažant and Jirásek (2002) and Noll (1972) there exists a residual cracked surface along the radial direction depending on the tangential strain of that point; it is a function of the radial coordinate *r*. It is assumed in this model that the residual tangential stiffness is constant along the cracked surface, i.e. in the interval [*x*, *r*₀] and represented by $\alpha_{\text{stiff}} E_{\text{ef}}$, where α_{stiff} (<1) is the tangential stiffness reduction factor. Li et al. (2005, 2006) present a formula for α_{stiff} calculation which is, according to our opinion, not correct. We propose to use a similar formula based on Eq. (7.1.10) in (Bažant & Planas, 1998) in which the (nondimensional) stiffness reduction factor α_{stiff} can be dependent on the average tangential strain ε_0 over the cracked surface as follows (Fig. 2):

$$\alpha_{\rm stiff}\left(\varepsilon_{\theta}\right) = \min\left\{1; \frac{f_{\rm t}}{E_{\rm ef}} \exp[-\gamma(\varepsilon_{\theta} - \varepsilon_{\theta}^{\rm c})]\right\}$$
(4)

where:

 ε_{θ}^{c} – denotes the average tangential cracking strain [-] and

 γ – is a material constant that relates the tensile strength, fracture energy and crack spacing [-]. This variable controls the slope of the descending part of the diagram demonstrated in Fig. 2.



Fig. 2: Plot of the dependence of the residual stiffness α_{stiff} on the tangential strain ϵ_{θ} , see Eq. (4)

After the introduction of the constitutive relationship between the radial and tangential stresses and strains (Pantazopoulou & Papoulia, 2001), the stress equilibrium (Fenner, 1989), the boundary conditions for the concrete cylinder, and the continuity requirements and their combinations (see Li et al., 2006 for more details), we arrive at the following two implicit equations:

$$F_{1}(\alpha_{\text{stiff}}, r_{0}) = 0 = f_{t} - \frac{E_{\text{ef}}}{1 - v_{\text{c}}^{2}} \left[(1 + v_{\text{c}})c_{1}(r_{0}) + \frac{(1 - v_{\text{c}})c_{2}(r_{0})}{r_{0}^{2}} \right]$$
(5)

and

$$F_{2}(\alpha_{\text{stiff}}, r_{0}) = 0 = \frac{f_{t} \exp(-\gamma k_{2})}{E_{\text{ef}} k_{1}} - \alpha_{\text{stiff}}$$

$$k_{1} = \frac{\left(r_{0}^{\sqrt{\alpha_{\text{stiff}}}} - x^{\sqrt{\alpha_{\text{stiff}}}}\right) \left[c_{3}(r_{0}) + c_{4}(r_{0}) / (xr_{0})^{\sqrt{\alpha_{\text{stiff}}}}\right]}{\sqrt{\alpha_{\text{stiff}}} (r_{0} - x)}$$

$$k_{2} = k_{1} - \frac{1}{r_{0} - x} \int_{x}^{r_{0}} \left(c_{1}(\xi) + \frac{c_{2}(\xi)}{\xi^{2}}\right) d\xi$$
(6)

where:

 r_0 – is the distance between the reinforcing bar centre and a crack tip (Fig. 1c) [mm] and $c_1(r_0), c_2(r_0), c_3(r_0)$ and $c_4(r_0)$ – are the coefficients (beyond the scope of this paper, see Li et al. 2006 for details).

If a simultaneous solution to Eqs. (5) and (6), r_0 and α_{stiff} can be found in the intervals: $r_0 \in (x, y)$ and $\alpha_{\text{stiff}} \in (0, 1)$, the crack has not propagated to the surface yet (the process is still in stage III). We have programmed the solution of the problem and based on our experience, the Newton Raphson scheme is successful in solving the set of nonlinear Eqs. (6). A good starting point for the solver is the middle point of the intervals: $r_0 = (x+y)/2$ and $\alpha_{\text{stiff}} = 0.5$. In the case that the solution cannot be found in the identified ranges of r_0 and α_{stiff} , the crack has already penetrated to the surface. By substituting $r_0 \rightarrow y$ in Eqs. (5) and (6) we obtain a new set of nonlinear equations. Their simultaneous solution leads to finding α_{stiff} that is needed for the computation of the crack width w_c :

$$w_{\rm c} = \frac{4\pi d_{\rm s}(t)}{(1 - v_{\rm c})(x/y)^{\sqrt{a_{\rm stiff}}} + (1 + v_{\rm c})(y/x)^{\sqrt{a_{\rm stiff}}}} - \frac{2\pi y f_{\rm t}}{E_{\rm ef}}$$
(7)

where:

 $d_{\rm s}(t)$ – is the thickness of a ring of corrosion products (Fig.1b) that can be determined from:

$$d_{\rm s} = \frac{W_{\rm rust}\left(t\right) \left(1 - \frac{\alpha \rho_{\rm rust}}{\rho_{\rm st}}\right) - \rho_{\rm rust} \pi d_{\rm i} d_{\rm 0}}{\pi \rho_{\rm rust} (d_{\rm i} + 2d_{\rm 0})}$$
(8)

where:

 $W_{\text{rust}}(t)$ – is the mass of corrosion products [mg/mm].

Note that d_s is not correctly derived in (Li et al., 2006) and that is why our Eq. (8) differs from theirs. Obviously, $W_{\text{rust}}(t)$ increases with time and according to Liu and Weyers (1998) can be determined from:

$$W_{\rm rust}(t) = \sqrt{\frac{2 \times 0.092\pi a}{\alpha}} \int_{t_{\rm i}}^{t} i_{\rm corr}(t) dt}$$
(9)

The most complicated part of the approach is the solution of functions $F_1(\alpha_{\text{stiff}}, r_0)$ and $F_2(\alpha_{\text{stiff}}, r_0)$. To help the reader to imagine how the two implicit functions look, their evolution with time is plotted in Fig. 3. For the time of 2 years and a set of realistic inputs the simultaneous solution of $F_1(\alpha_{\text{stiff}}, r_0) = 0$ and $F_2(\alpha_{\text{stiff}}, r_0) = 0$ exists within the above identified ranges of α_{stiff} and r_0 (stage III). The solution is illustrated by the intersection of two curves in the base, see bottom left in Fig. 3. In other words, if the solution exists, the crack still did not reach the concrete cover surface. In Fig. 3 right, we plot a situation for the time of three years: the two curves do intersect indicating crack propagation to the outer surface. The input data may be find in Table 1 in (Matesová & Vořechovský, 2006).

3 NUMERICAL MODEL

In this section an alternative to the above analytical solution is presented, namely numerical solution using finite element method. ATENA program (Červenka & Pukl, 2003) was used for the simulation of a nonlinear response of the corroded reinforcement in concrete. For modelling of a nonlinear behaviour a material constitutive model based on a smeared approach that can successfully describe the discrete crack propagation was applied. In particular, the fracture-plastic model named NLCEM (nonlinear cementitious) available in ATENA program is used. Concrete with reinforcement was modelled as 2D problem and according to the definition of the analytical model; thick-wall cylinder geometry was modelled (see Fig. 1a). The dimensions are: a = 30 mm and $d_i = 20$ mm. The thickness of the annular layer of concrete pores d_0 was ignored, because this thickness is only important for the time analysis; it delays stress development (this void space is firstly filled by the corrosion products). Expansion of corrosion products was simulated by application of (negative) shrinkage of the reinforcement elements.



Fig. 3: Evolution of functions $F_1(\alpha_{\text{stiff}}, r_0)$ and $F_2(\alpha_{\text{stiff}}, r_0)$ from Eqs. (5) and (6) for exposure times 2 and 3 years $(t_i = 0)$

3.1 Deterministic model

At first the system was treated as deterministic to study the damage mechanisms and the development of stresses and cracks. Two extreme cases of boundary conditions were studied: without circuit restraint of the outer concrete face (free margins) and with a circuit restraint by applying the fixed hinge supports around the concrete face (see e.g. Fig. 5a, d for illustration of boundary conditions). The second type of boundary conditions is here to represent the case of ring embedded into a stiff surrounding material.

The major input parameters of the concrete constitutive law were: modulus of elasticity E = 30.32 GPa, compressive strength $f_c = 25.5$ MPa, tensile strength $f_t = 2.317$ MPa and fracture energy $G_F = 57.93$ N/m. The stress-opening law used is exponential according to Hordijk (1991). The standard crack band model (Bažant & Oh, 1983) was employed.

Several important variables have been monitored in the numerical calculations: the radial displacement *d* at the steel-concrete interface and stresses at three positions of concrete: (1) interface with steel, (2) the middle of concrete layer thickness and (3) outer concrete boundary. Two types of stresses were monitored at the three positions: the radial and tangential stresses (σ_r and σ_τ). Their dependence on the displacement *d* is plotted in Fig. 4 for both free and restraint boundary conditions.

For a detailed analysis of stress profiles in concrete presented in Fig. 5, three stages of crack development were chosen coinciding with d = 1, 3 and 6 μ m (circled values from Fig. 4). The first stage ($d = 1 \mu$ m) is characterized by crack initiation from the interface for both free and restrained circuit boundary conditions; the peak tangential stress $\sigma_{\tau 1}$ equals the tensile concrete strength. In the case of free boundary conditions, the radial and tangential stresses differ only in the sign (as can be easily predicted by a simple analytical computation), while in the case of restraint boundaries, a small pressure can be identified perpendicular to the outer concrete interface. The second and third stages record gradual crack growth; the cracks growth is suppressed by the constraint which is prescribed by the fixed hinge supports – see Fig. 5d-f.



Fig. 4: Deterministic solution of the numerical models; comparison of restrained and non-restrained boundary conditions at the outer concrete boundary



Fig. 5: Tangential and radial stresses development and cracks distribution in concrete cover

3.2 Stochastic model

The uniform crack distribution visible in Fig. 5 is not very realistic. In order to simulate the heterogeneous structure of concrete, the spatial variability of material was modelled by modifications of chosen input values of concrete. In reality, concrete does not have uniform properties over its volume and the spatial variability of properties can be suitably modelled by random fields. We remark, that such an approach automatically disturb the rotational stress symmetry and introduce damage initiation similarly to the real situation.

Two parameters of the constitutive law of concrete were selected to be randomized and their effects were studied separately. Namely, the modulus of elasticity E and the tensile strength f_t were randomized to trigger fracturing. The applied random fields were normally distributed with coefficient of variation 30% and 20% respectively. The mean value was taken from the deterministic analyses (section 3.1) to obtain consistent results. One of the most important properties of a random field is the autocorrelation structure defined through the autocorrelation function and the autocorrelation length. Briefly, the autocorrelation length is a parameter controlling the rate of spatial variability of the parameter; see (Vořechovský, 2004, 2008) for details on random field modelling. In our analyses, the correlation lengths of 0.01 m were assumed in both directions together with a squared exponential autocorrelation function (isotropic correlation structure of the field). The autocorrelation length roughly coincides with the maximum aggregate size of concrete. For illustration of the random field and the scale of fluctuation see Fig. 6.



Fig. 6: Realization of a random field of local tensile strength f_t and cracks developed in the post peak stage of σ_{t1}

The results of the stochastic nonlinear calculations are visualized through the dependence of tangential stress $\sigma_{\tau 1}$ on the radial extension of steel (displacement *d*), see diagrams in Fig. 7. As can be seen, the randomization of the local *E* modulus does not affect the crack initiation stress (which still equals the concrete tensile strength) while the randomized strength influences the crack initiation stress while not affecting the initial overall stiffness. We remark, that due to the relatively small dimensions of concrete material with respect to the concrete dimensions, the structure is very ductile (diffused microcracking conveniently modelled as damage) and therefore the mechanism is closer to the parallel coupling of micro-bonds rather than a weakest link principle (see Vořechovský, 2004 for details).



Fig. 7: Results of nonlinear stochastic simulations; comparison of spatial variability applied to modulus of elasticity E and tensile strength f_t of concrete

3.3 Comparison of analytical and numerical model

The comparison of both models was performed at the deterministic level. The numerical model without circuit boundary conditions was used as it coincides with the formulation of the analytical model. The comparison of both models was done through the crack development quantified by coordinate r_c, see Figs. 1c and 4b. The parameters identical for both numerical and analytical approaches are: $d_i = 20$ mm, $d_0 = 0$ mm, a = 30 mm, $f_t = 2.317$ MPa, $E_{ef} = E = 30.32$ GPa and $v_c = 100$ 0.2. The trend of crack length $r_{\rm c}$ in dependence on the displacement d is plotted in Fig. 8 together with tangential stresses σ_{τ} obtained from numerical calculations. Note, that the displacement d monitored during numerical calculations does not coincide with the thickness of a ring of corrosion products d_s that is featured in the analytical approach. The measure of displacement d does not take into account the loss of steel due to rust production. For the purpose of the comparison of both models, d_s was recalculated to d through the steel and rust densities considered as $\rho_{rust} = 3600 \text{ kg/m}^3$ and $\rho_{st} = 7850 \text{ kg/m}^3$ by realizing that the total weight of both materials must be kept constant. The growth of d_s (or d) is related to the time (see Eqs. 8 and 9); this relation depends mainly on the current density i_{corr} . A detailed time analysis is beyond the scope of this paper; only the nonlinear trend of d in time is sketched in the inset of Fig. 8 for $i_{corr} = 1 \mu A/cm^2$. Obviously, in the deterministic case, both models are comparable. However, the numerical model is much more flexible and its predictive capabilities are higher as it can easily accommodate advanced features such as the spatial variability of material parameters or more complex geometries. The latter becomes important when analyzing real-life examples as the one presented in the following section.



Fig. 8: Comparison of the analytical and numerical models through the crack length r_c together with tangential stresses obtained from the numerical simulation. The right bottom inset shows the time dependence of d

4 PRACTICAL APPLICATION

The thick wall cylinder geometry around the steel reinforcement is not a usual geometry of a real structure. To illustrate the real danger of steel corrosion in a reinforced concrete girder, we prepared a model of its lower part together with four reinforcing bars (20 mm thick). A uniform type of corrosion and the same corrosion rate for all four reinforcing bars were assumed. The crack development in concrete due to rust products of steel as predicted by the numerical model is sketched in Fig. 9. Note that in reality, opening of crack accelerates the corrosion progress because of easier transport of oxygen and water. The crack patterns agree well with the damage observed in real structures.



Fig. 9: Crack development due to corrosion in reinforced concrete beam

5 CONCLUSIONS

The application of analytical and numerical approaches to simulation of concrete cracking due to corrosion of reinforcement was presented. At first, a combination with corrections of two existing analytical models by Liu and Weyers (1998) and Li et al. (2006) is proposed. Four distinct phases of the corrosion process are identified and the process is modelled by numerical computations obtained with the nonlinear finite element code. The numerical model features the state-of-the-art in nonlinear fracture mechanics and the heterogeneous structure of concrete is modelled via spatially varying parameters of the constitutive law. These results are of high importance in durability based design of structures.

ACKNOWLEDGEMENTS

The financial support from the specific university research project at Brno University of Technology, registered under the number FAST-S-13-2017 and the Project of the Czech Science Foundation number 13-19416J are gratefully acknowledged.

REFERENCES

- [1] BAŽANT, Z.P. (1979a). Physical Model for Steel Corrosion in Concrete Sea Structures Theory. *Journal of Structural Division, ASCE*, 105, (ST6), 1137-1153.
- [2] BAŽANT, Z.P. (1979b). Physical Model for Steel Corrosion in Concrete Sea Structures application. *Journal of Structural Division, ASCE*, 105, (ST6), 1154-1166. Disc. 1980, 1194-1195.
- [3] BAŽANT, Z.P, & OH, B.H. (1983). Crack band theory for fracture of concrete. *Materials and Structures* RILEM, 16, 155-177.
- [4] BAŽANT, Z.P., & JIRÁSEK, M. (2002). Nonlocal Integral Formulations of Plasticity and Damage: Survey and Progress. *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, 128 (11), 1119-1149.
- [5] BAŽANT, Z.P., & PLANAS, J. (1998). Fracture and Size Effect in Concrete and Other *Quasibrittle Materials*, CRC Press.
- [6] BHARGAVA, K., GHOSH, A.K., MORI, Y. & RAMANUJAM, S. (2005). Modeling of time to corrosion-induced cover cracking in reinforced concrete structures. *Cement and Concrete Research*, 35, 2203-2218.

- [7] BOHNER, E., MÜLLER, H.S., & BRÖHL, S. (2010). Investigations on the mechanism of concrete cover cracking due to reinforcement corrosion. In: Oh, B.H. et al. (eds.), Fracture Mechanics of Concrete and Concrete Structures – Assessment, Durability, Monitoring and Retrofitting of Concrete Structures, Korea Concrete Institute, Seoul.
- [8] ČERVENKA, V., & PUKL, R. (2003). *ATENA Program documentation*, theory guide, Červenka Consulting, Prague.
- [9] FENNER, R.T. (1989). Mechanics of Solids. Blackwell Scientific Publications, Oxford.
- [10] HORDIJK, D.A. (1991). *Local Approach to Fatigue of Concrete*. PhD thesis, Delft University of Technology, The Netherlands.
- [11] LI, C.Q., LAWANWISUT, W., ZHENG, J.J., & KIJAWATWORAWET, W. (2005). Crack width due to corroded bar in reinforced concrete structures. *International Journal of Materials* and Structural Reliability, 3(2), 87-94.
- [12] LI, C.Q., MELCHERS, R.E., & ZHENG, J.J. (2006). An analytical model for corrosion induced crack width in reinforced concrete structures. *ACI Structural Journal*, V. 103, No. 4, 479-482.
- [13] LIU, Y., & WEYERS, R.E. (1998). Modeling the time-to-corrosion cracking in chloride contamined reinforced concrete structures. *ACI Material Journal*, V. 95, No. 6, 675-681.
- [14] MATESOVÁ, D. & VOŘECHOVSKÝ, M. (2006). *Reinforcement corrosion in concrete: analytical approach to modelling*. In: Pravděpodobnost porušování konstrukcí PPK 2006, Brno, Czech Republic.
- [15] NOLL, W. (1972). A New Mathematical Theory of Simple Materials. Arch. Ration. Mech. Anal., 48, 1-50.
- [16] OŽBOLT, J., ORŠANIĆ, F., BALABANIĆ, G., & KUŠTER, M. (2012). Modeling damage in concrete caused by corrosion of reinforcement: coupled 3D FE model. *International Journal* of Fracture, V. 178, No. 1-2, 233-244.
- [17] PANTAZOPOULOU, S.J., & PAPOULIA, K.D. (2001). Modeling Cover-Cracking due to Reinforcement Corrosion in RC Structures. *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, 127 (4), 342-351.
- [18] TEPFERS, R. (1979). Cracking of Concrete Cover Along Anchored Deformed Reinforcing Bars. *Magazine of Concrete Research*, 31, (106), 3-12.
- [19] TEPLÝ, B., MATESOVÁ, D., CHROMÁ, M., & ROVNANÍK, P. (2007). Stochastic degradation models for durability limit state evaluaton: SARA – Part VI. In: 3rd International Conference on Structural Health Monitoring of Intelligent Infrastructure (SHMII-3 2007), Vancouver, Canada.
- [20] VOŘECHOVSKÁ, D., CHROMÁ, M., PODROUŽEK, J., ROVNANÍKOVÁ, P., & TEPLÝ, B. (2009). Modelling of Chloride Concentration Effect on Reinforcement Corrosion. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*, 24, 446-458.
- [21] VOŘECHOVSKÝ, M. (2004). *Stochastic fracture mechanics and size effect*, Brno University of Technology, Brno, Czech Republic.
- [22] VOŘECHOVSKÝ, M. (2008). Simulation of simply cross correlated random fields by series expansion methods. *Structural safety*, 30 (4), 337-363.

Reviewers:

Ing. Petr Konečný, Ph.D., Katedra stavební mechaniky, Fakulta stavební, VŠB-TU Ostrava.

Ing. Miroslav Sýkora, Ph.D., Department of Structural Reliability, Klokner Institute, Czech Technical University in Prague.

číslo 1, rok 2014, ročník XIV, řada stavební

článek č. 24

Rostislav ZÍDEK¹, Luděk BRDEČKO²

TRADIČNÍ KROV – HAVARIJNÍ STAV, MODELOVÁNÍ A PŘÍČINY

TIMBER TRUSS - CRITICAL CONDITION, MODELING AND CAUSES

Abstrakt

V příspěvku je prezentováno modelování postupné degradace krovu zemědělského objektu. Autoři si nekladou za cíl pouze informovat o příčinách poruchy jedné konkrétní konstrukce, ale nabízí některé obecnější zásady pro vytváření výpočtových modelů tohoto typu konstrukcí a pro pochopení jejich statického působení.

Klíčová slova

Dřevěný krov, výpočtový model, spoje, porucha.

Abstract

The paper presents the modeling of progressive failure of a farm building timber truss. Authors do not aims only to inform about causes of the failure of one specific structure, but they also offer some general principles for development of computational models of this type of structures and for understanding their static behavior.

Keywords

Timber truss, computational model, joints, failure.

1 ÚVOD

Je málo tak rozšířených konstrukcí jako jsou tradiční krovy. Jsou to konstrukce minulosti, ale i současnosti. Jejich obrovské rozšíření odpovídá dostupnosti základního materiálu, snadnosti opracování a celkové láci. Postupným empirickým vývojem se dospělo k souboru tesařských spojů a k několika základním typům funkčních nosných systémů s množstvím variant, lišících se regionálně, dobově i podle konkrétních tesařských mistrů. Ještě v relativně nedávné době se dřevěné krovy navrhovaly empiricky, bez statického výpočtu, a tato praxe byla obecně akceptována. Toto je možná jeden z důvodů proč stávající konstrukce dřevěných krovů mnohdy vykazují poruchy, které jsou způsobeny přešlapy a chybami v návrhu a provedení konstrukce. Tyto chyby, pokud nejsou fatální, se projevují po dlouhá desetiletí především nadměrnými a stále se zvětšujícími deformacemi, které mohou postupně ztěžovat až znemožňovat užívání konstrukce. Havárie krovů jsou však poměrně vzácné a projevují se obvykle ve výjimečných zimách, u nás především zima na přelomu let 2005 a 2006. Autoři příspěvku ve své praxi navrhovali nové dřevěné krovy i posuzovali či navrhovali adaptace stávajících konstrukcí. V tomto příspěvku jsou na jedné konkrétní konstrukce, které postupně znemožnily užívání stavby a jejichž následkem je havarijní stav a plánovaná demolice.

¹ Ing. Rostislav Zídek, Ph.D., Ústav stavební mechaniky, Fakulta stavební, Vysoké učení technické v Brně, Veveří 95, 602 00 Brno, tel.: (+420) 541 147 368, zidek.r@fce.vutbr.cz.

² Ing. Luděk Brdečko, Ph.D., Ústav stavební mechaniky, Fakulta stavební, Vysoké učení technické v Brně, Veveří 95, 602 00 Brno, tel.: (+420) 541 147 368, zidek.r@fce.vutbr.cz.

Stavba je umístěna v centrální části Českomoravské vrchoviny a představuje typickou regionální konstrukci zemědělské budovy z 1. poloviny 20. století.

2 KONSTRUKCE A MODEL

Popisovaná zemědělská hala (obr. 3) byla postavena na konci dvacátých let 20. století a byla používána ještě ve zcela nedávné době. Základní uspořádání konstrukce ukazuje obrázek 1. Stavba sestává z podpůrných zdí a krovu, jehož hlavní nosnou částí jsou plné vazby stojaté stolice (dvojité věšadlo), které podpírají vaznice a krokve. Krytina je skládaná, tašková. Na části stavby je mezipatro, které sloužilo ke skladování sena a slámy.



Obr. 1: Základní uspořádání konstrukce



Obr. 2: Výpočtový model

Pro analýzu konstrukce byl vytvořen prostorový prutový model (obr. 2). Při jeho tvorbě se částečně vycházelo z modelů krovů obsažených v knihách [3] a [4]. Při vlastním modelování byla uvážena specifika, která plynou především z technologie výstavby a statického působení tradičních dřevěných konstrukcí:

- Dva dřevěné prvky nelze klasickými prostředky spojit monoliticky. Výsledkem je vždy kloub. Bezmyšlenkovitá implementace kloubů do modelu však může vést k mechanismu a tím k singulární soustavě rovnic. Je tedy třeba uplatňovat klouby na základě skutečné funkce prvků a spojů v konstrukci, protože některá kloubová připojení se ve skutečnosti neuplatní. V případě předkládaného modelu se jedná o kloub mezi pozednicí (krajní vaznicí) a sloupkem. Převládající tlakové namáhání a čepový spoj zabraňují otevření spáry mezi sloupkem a pozednicí. Kromě toho, modelováním tohoto kloubu a zároveň kloubu mezi vazným trámem a sloupkem bychom dosáhli mechanismu.
- Modelování oslabení prvků zářezy. Velká část tradičních tesařských spojů se vytváří vzájemným zapuštěním, což s sebou nese oslabení průřezu. V některých případech je možno ho ignorovat, někdy musí být zohledněno. Typickým příkladem je osedlání krokve, jak je popsáno v kapitole 2 a 3.3.
- Neschopnost některých typů tesařských spojů přenášet tahová napětí. Tato skutečnost může vést v případě některých kombinací zatížení k úplnému vyřazení taženého prvku z funkce.
- Změna průřezů dřevěných prvků. Tradiční výroba dřevěných trámů neprobíhala řezáním, ale otesáváním boků klády. Pracnost této technologie se zvyšuje s množstvím hmoty, která musí být tesáním odstraněna. Typický tesaný trám má tedy obliny a velmi často průřez blízký čtverci, který se zmenšuje podle stromu, ze kterého byla kláda vyrobena. Průřez, který vstupuje do výpočtu, by měl být naměřený nejlépe z místa očekávaného extrému namáhání.
- Únosnost spojů. Z důvodu empirického návrhu konstrukcí bývají některé spoje výrazně poddimenzované a během používání konstrukce mohou ztratit svoji funkci. V případě krovu stodoly se jedná typicky o spoj kleštiny a krokve, jak o něm bude pojednáno níže. Na druhou stranu, kvalita provedení tesařských spojů bývá na vysoké úrovni dané pečlivou výrobou pomocí ručních nástrojů dlát a pil s jemnými zuby. Mezi přesně opracovanými plochami je zaručen dobrý přenos sil. V současnosti běžně používané řetězové pily vedou ke znatelně menší přesnosti z důvodu mnohem obtížnějšího vedení řezu.

Konkrétní uspořádání modelu objasňuje obrázek 4. Stropní konstrukce, působící nezávisle na krovu, modelována nebyla.



Obr. 3: Současný stav budovy

Konstrukce byla modelována a posuzována podle platné normy [1], která vychází z normy DIN 1052 a je variací platného Eurokódu 5 [2]. Dřevo bylo uvažováno třídy C22 s výpočtovou pevností v ohybu 15,23 MPa, charakteristická mez kluzu oceli v posudcích spojů se uvažovala hodnotou 360 MPa. Cílem práce nebylo posouzení únosnosti ve smyslu normy [1], ale nalezení mechanismu porušení a způsobu sanace.

Během práce bylo vytvořeno několik výpočtových modelů na různé úrovni zjednodušení, zde je prezentován nejvýstižnější. Vycházelo se z geometrie nepoškozené konstrukce; modelování vycházející z deformované konstrukce vedlo pouze k nepodstatným změnám v deformacích i ve vnitřních silách.



Obr. 4: Výpočtový model – příčný a podélný řez

3 STATICKÉ PŮSOBENÍ KONSTRUKCE

3.1 Původní konstrukce

Předpokládejme, že v původní konstrukci byly všechny spoje funkční. I za tohoto předpokladu jsou na řadě míst překročena mezní napětí a konstrukce tedy formálně nevyhoví. Překročení návrhových napětí řádově o deset procent na vaznicích není nebezpečné. Na krokvích, v místech uložení na vaznice a tedy oslabení zářezem pro osedlání je dosahováno podstatně vyšších napětí (charakteristické 20,8 MPa; návrhové 30,1 MPa). Je ale zjevné, že toto namáhání nevedlo ke kolapsu (skutečná pevnost zdravého smrkového dřeva v tahu je až 60 MPa).

Větší problém nastane na styku kleštiny a krokve. Kleština má v této konstrukci dvojí statické působení. Mezi sloupky je to rozpěra dvojitého věšadla, mezi sloupkem a krokví se jedná o kleštinu zachycující vodorovné síly, vyvolané zejména působením krokve, jak je objasněno v kapitole 3.3. Normálová síla v kleštině mezi sloupkem a krokví je v návrhové hodnotě 23,4 kN (odpovídající charakteristická hodnota je 16,1 kN). Přenos síly je zajištěn kolíkem a jednostranným rybinovým přeplátováním. Schéma spoje je na obrázku 6. Skutečné chování takového typu spoje je poměrně komplikované, jak prokazuje analýza [5]. Pro účely této studie je dostačující určit únosnost jako součet únosnosti otlačovaného dřeva silami podle obrázku 6 a únosnosti kovového kolíku. Takto vypočtená únosnost spoje je cca 5 krát překročena (i po započtení únosnosti ocelového kolíku) a jak dokládá obrázek 5, spoje jsou porušené a nefunkční. Tím dochází ke změně statického systému.

Svislý posun hřebene střechy se pohybuje od 6 mm v místě plných vazeb po 35,2 mm uprostřed mezi plnými vazbami.



Obr. 5: Detail styku vaznice, sloupku, kleštin a krokve

3.2 Změna statického systému

Ve druhém stádiu funguje konstrukce naprosto bez příčného ztužení, spoj mezi kleštinami a krokví je zcela vyřazen. Dochází k radikálnímu přerozdělení napětí. Stavebně mechanicky se krokve přibližují staticky určité konstrukci a klesá tak jejich další schopnost přerozdělení napětí. V této fázi dochází k natočení vaznic směrem ven o cca 6,3° až 7° a roste i svislý posun hřebene (až 70 mm). Napětí v sedlech krokví v místě spoje s vaznicí stouplo na 37,0 MPa v návrhové hodnotě, oproti 15,23 MPa návrhové pevnosti. Nejvýznamnějším problémem je spoj vaznice a krokve. Smykovou sílu přenáší hřebík šikmo zaražený přes krokev do vaznice (obr. 7). Tento hřebík je namáhán kombinací smyku a vytažení. Uvažujeme-li jenom čistý smyk (což je jistě na stranu nebezpečnou), je jeho výpočtové namáhání 2,95 kN a únosnost 1,576 kN pro prům. 6 mm a 0,807 kN pro prům. 4 mm. Z mechanismu působení (obr. 7) je patrné, že tento hřebík je namáhán na vytažení a že skutečná únosnost bude nižší, než předpokládá výpočet na smyk. Z prohlídky konstrukce se nedá průměr hřebíků určit, a zdá se, že někde dokonce úplně chybějí (obr. 8). Je ale jasné, že v osedlání krokví došlo ke značnému posunu, které zvětšilo excentricitu působícího svislého zatížení a tímto mechanismem došlo k drastickému pootočení vaznic, které se blíží úplnému kolapsu (obr. 5).

Z fotografie (obr. 1) je jasně patrné, že vzdálenější část střechy je poškozená více než bližší. Dle vyjádření majitele to bylo způsobeno vzrostlým stromem, který rostl v těsné blízkosti objektu a který část střechy zatěžoval.



Obr. 6: Detail styku krokve a kleštin. Rybinový spoj - působící síly



Obr. 7: Detail styku krokve a vaznic. Osedlání - působící síly



Obr. 8: Poškozený styk vaznice a krokve

3.3 Sanace

V době, kdy to ještě mělo význam, bylo možno konstrukci sanovat velmi jednoduchým způsobem, který plyne ze statického působení krokve. Zjednodušeně, nicméně výstižně, lze osedlání v krokvi modelovat kloubem, protože zářez do jedné třetiny výšky průřezu způsobí pokles ohybové tuhosti na méně než 30%. Potom se z horní části krokve stane trojkloubový rám. Nabízí se vytvořit trojkloubový rám s táhlem pomocí prkna připevněného svorníkem nebo hřebíky (obr. 9). Namáhání krokve, ale i vaznic bude rovněž mnohem příznivější, stejně jako namáhání spoje krokve s vaznicí. Spoj mezi krokví a kleštinou touto úpravou ztrácí význam a není třeba ho obnovovat.

Pro přenos zatížení větrem se doplní vodorovné prvky (kleštiny) mezi pozednicí a sloupkem. Namáhání všech prvků potom klesne na mez vyhovující normovým požadavkům a rovněž se značně sníží deformace konstrukce.

Bohužel, zachraňovat konkrétně tuto konstrukci je zbytečné a zbývá jenom demolice. Jak ukazují zkušenosti autorů, menší deformace se často dají alespoň částečně sanovat pomocí jednoduchých mechanických prostředků, jako jsou upínací kurty nebo řehtačkové zvedáky (hupcuky) a po doplnění dalších prvků, eventuálně zvýšení únosnosti, či sanaci poškozených či poddimenzovaných prvků konstrukce má konstrukce předpoklad pro další život.



Obr. 9: Statické působení krokve s táhlem

4 ZÁVĚR

Značná část krovů a to i postavených v nedávné době, vykazuje menší či větší nedostatky. Při striktním posouzení podle současných norem dojdeme velmi často k závěru, že konstrukce jsou poddimenzovány. Přesto fungují dlouhá desetiletí byť i za cenu značných deformací. V těchto konstrukcích však bývá materiál namáhán za mez svojí dovolené únosnosti již při běžném používání. Náhodné přetížení, či oslabení konstrukce např. hnilobou, způsobenou zatékáním, mohou vést až ke kolapsu, zvláště v extrémních zimách.

Správné pochopení statického systému je důležité pro návrh sanace stávající konstrukce i pro vyvarování se chyb při návrhu konstrukce nové. Velmi důležitý je výstižný výpočtový model, který závisí zejména na idealizaci kloubů a zohlednění skutečnosti, že některé tesařské spoje umožní přenesení tahových namáhání buď omezeně, nebo vůbec. Spoje bývají často problematické a je třeba jim věnovat pozornost. Rovněž platí, že nelze činit předčasné závěry kvůli nedostatečné únosnosti prvku konstrukce vyjádřené v řádu procent nebo i desítek procent. Z pochopení statického systému potom plyne způsob sanace, která může být překvapivě jednoduchá a účinná.

PODĚKOVÁNÍ

Tento příspěvek vznikl díky podpoře projektu OP VK OKTAEDR – partnerství a sítě stavebnictví, registrační číslo projektu: CZ.1.07/2.4.00/31.0012.

LITERATURA

- [1] ČSN 73 17 02, Navrhování výpočet a posuzování dřevěných stavebních konstrukcí: Obecná pravidla a pravidla pro pozemní stavby. Český normalizační institut, 2007.
- [2] EN 1995-1-1: Navrhování dřevěných konstrukcí, Část 1-1: Společná pravidla a pravidla pro pozemní stavby. Český normalizační institut, 2006.
- [3] Straka, B., Novotný, M., Krupicová, J., Šmak, M., Šuhajda, K., Vejpustek, Z., *Konstrukce šikmých střech*. Grada publishing, Praha 2013. ISBN 978-80-247-4205-2.
- [4] Vinař, J., Kufner, V., Horová, I., Historické krovy. EL CONSULT, Praha 1995. ISBN 80-902076-0-X.
- [5] DRDÁCKÝ, M., F., Wald, F., Mares, J.: Modelling of Real Historic Timber Joints. In Structural Studies - Historical Buildings VI. Southampton: Witpress, 1999. s. 169-178. ISBN 1-85312-690-X.

Oponentní posudek vypracoval:

Doc. Ing. Jaroslav Sandanus, PhD., Katedra kovových a drevených konštrukcií, Stavebná fakulta, STU v Bratislave.

Ing. Mikolášek David, Ph.D., Katedra stavební mechaniky, Fakulta stavební, VŠB-TU Ostrava.

Sborník vědeckých prací Vvsoké školv báňské – Technické univerzity Ostrava číslo 1, rok 2014, ročník XIV, řada stavební Transactions of the VŠB – Technical University of Ostrava No. 1, 2014, Vol. 14, Civil Engineering Series Redakční rada / Editorial board: Šéfredaktor / Editor in chief: doc. Ing. Martin Krejsa, Ph.D., VŠB-TU Ostrava, Fakulta stavební Zástupce šéfredaktora / Deputy editor: doc. RNDr. Eva Hrubešová, Ph.D., VŠB-TU Ostrava, Fakulta stavební Členové redakční rady / Members of the editorial board: prof. Michael Beer, University of Liverpool, Spojené království doc. Ing. Jiří Brožovský, Ph.D., VŠB-TU Ostrava, Fakulta stavební prof. Ing. Radim Čajka, CSc., VŠB-TU Ostrava, Fakulta stavební Dr. Peter Dusicka, Ph.D., P.E., Portland State University, USA Pratanu Ghosh, Ph.D., Assistant Professor, California State University, Fullerton, USA prof. David Hui, University of New Orleans, USA prof. Chih Chen Chang, Ph.D., FHKIE, Hong Kong University of Science and Technology, Hong Kong prof. Qi Chengzhi, Beijing University of Civil Engineering and Architecture, Čína doc. Ing. arch. Ján Ilkovič, CSc., Fakulta architektúry STU v Bratislave, Slovensko prof. Gela Kipiani, Georgian Technical University, Tbilisi, Gruzie prof. Ing. Alois Materna, CSc., MBA, VŠB-TU Ostrava, Fakulta stavební prof. Ing. Jozef Melcer, DrSc., Žilinská univerzita v Žiline, Stavebná fakulta, Slovensko prof. Suren Mkhitaryan, Doctor of Sciences Corresponding Member of the National Academy of Sciences, Arménie doc. Ing. Jaroslav Navrátil, CSc., VŠB-TU Ostrava, Fakulta stavební Ing. arch. Hana Paclová, Ph.D., VŠB-TU Ostrava, Fakulta stavební Assoc. Prof. Doncho Partov, PhD. Eng., Higher School of Civil Engineering "Lyuben Karavelov", Sofie, Bulharsko Ing. Jindřich Pater, ČKAIT, oblastní kancelář Ostrava prof. Dr. hab. inž. Jaroslav Rajczyk, Fakulta stavební, Polytechnika Czestochowa, Polsko doc. Ing. Miloslav Řezáč, Ph.D., VŠB-TU Ostrava, Fakulta stavební doc. Ing. Vlastislav Salajka, CSc., Vysoké učení technické v Brně, Fakulta stavební doc. Ing. Jaroslav Solař, Ph.D., VŠB-TU Ostrava, Fakulta stavební doc. Ing. Richard Šňupárek, CSc., Ústav geoniky AV ČR prof. Hovhannes Tokmajvan, Doctor of Sciences Yerevan State University of Architecture and Construction, Arménie prof. dr hab. inż. Jerzy Wyrwal, Fakulta stavební, Polytechnika Opole, Polsko prof. Alphose Zingoni, PrEng, CEng, PhD, FSAAE, FIABSE, FIStructE University of Cape Town, Jihoafrická republika Technický redaktor:

Ing. Markéta Maluchová, VŠB-TU Ostrava, Fakulta stavební

Publikované články jsou recenzovány. Za jazykovou správnost odpovídá autor.

Adresa redakce:

Ludvíka Podéště 1875/17 708 33 Ostrava - Poruba Česká republika

web: http://www.fast.vsb.cz/cs/okruhy/veda-a-vyzkum/odborna-cinnost-fakulty/sbornik-vedeckych-praci

© Vydala Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava Tisk a vazba: in-PRESS cz, Opletalova 608/2, 736 01 Havířov-Šumbark

Náklad: 150 ks

Neprodejné

ISSN 1213-1962